21世纪高等学校工科数学辅导教材

# 高等数学学习方法与解题指导

赵晓颖　聂　宏　等编著
陈明明　主　审

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

# 高等数学学习方法与解题指导

赵晓颖　聂　宏　等编著
陈明明　主　审

化学工业出版社
·北京·

本书以教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，与同济大学编《高等数学》（第六版）教材相配套。

全书共分12章，每章内容包括教学基本要求、内容提要、典型例题与练习题（A题、B题），书末附有四套自测题以及练习题和自测题的参考答案。本书将高等数学诸多问题进行了合理的归类，并通过对典型例题的解析，诠释解题技巧和进行方法归纳，帮助读者在理解概念的基础上，充分掌握知识和增强运算能力。

本书可作为理工类普通高等院校各专业的教学用书或教学参考书，也可作为《高等数学》课程学习、训练与提高的参考资料。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学学习方法与解题指导/赵晓颖，聂宏等编著. —北京：化学工业出版社，2012.7

21世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-14787-5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①赵…②聂…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第152476号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　　装帧设计：张　辉

责任校对：蒋　宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 $15\frac{3}{4}$　字数410千字　2012年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http：//www. cip. com. cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：26.50元

# 前　言

高等数学作为理工科高等院校学生的必修课，历来备受青睐。它不但是学好其他课程的基础，其本身内容也是比较丰富的。通过高等数学的学习，会提高学生的空间想象能力、严格的逻辑推理能力和深刻的思维能力。

然而，高等数学的学习又往往因其内容抽象、公式定理繁多难懂使学生产生畏惧心理，致使大多数学生盲目地去做题，缺乏科学的选择以及归纳梳理，最后很难达到预期的学习目的，同时又浪费了许多的宝贵时间。编写本书的目的，就是为学生学好高等数学课程提供有益的参考。

本书将高等数学诸多问题进行合理的归类，通过对典型例题的解析和方法归纳，帮助读者理解基本概念，增强运算能力，同时介绍一些方便快捷的解题方法，使读者耳目一新。每章附有练习题以及答案与提示。初学者只要求试做练习题中的 A 题，B 题可作为学有余力的同学选做。

参加本书编写的有赵晓颖（第 1 章、第 2 章、自测题），侯景臣（第 3 章），谢丽红（第 4 章），刘国志（第 5 章），张钟元（第 6 章），魏晓丽（第 7 章），刘晶（第 8 章），陈德艳（第 9 章），聂宏（第 10 章），姜凤利（第 11 章），李金秋（第 12 章）。全书由赵晓颖老师组稿，宋岱才教授阅读了全文并修改定稿。陈明明教授主审。

本书适用于理工科高等院校的学生，特别适合使用同济大学应用数学系编写的《高等数学》作为教材的学生，对于有志报考研究生的学生也是一本有益的参考书。

本书在编写过程中得到了辽宁石油化工大学教务处和理学院广大教师的支持和帮助，编者在此谨向有关作者及各位老师表示感谢！

由于作者水平所限，疏漏与不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

**编　者**

**2012 年 5 月**

# 目　录

# 第1章　函数与极限

**本章基本要求**

在中学已有的函数知识基础之上，加深对函数概念和性质的理解；理解极限的概念和性质，了解极限的$\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$等定义；熟练掌握极限的运算法则，会计算极限；理解无穷小与无穷大的概念，会利用等价无穷小求极限；理解两个极限存在准则，会利用两个重要极限求极限；理解函数连续和间断的概念，会判断间断点的类型；了解连续函数的运算与初等函数的连续性；理解闭区间上连续函数的性质。

## 1.1　内容提要

### 1.1.1　函数

（1）函数的基本概念

**定义1**　设数集$D\subset \mathbf{R}$，则映射$f:D\to \mathbf{R}$为定义在$D$上的函数．记作：$y=f(x)$，$x\in D$．其中：$x$称为自变量，$y$称为因变量，$D$称为定义域．

**定义2**　设函数$f:D\to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射$f^{-1}$为函数$f$的反函数．记作：$f^{-1}(y)=x$，$y\in f(D)$．

**定义3**　设函数$y=f(u)$的定义域为$D_f$，函数$u=g(x)$的定义域为$D_g$，且其值域$R_g\subset D_f$，则函数$y=f[g(x)]$，$x\in D_g$称为由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$构成的复合函数，变量$u$称为中间变量．

（2）函数的几种特性

① 有界性．设函数$f(x)$的定义域为$D$，区间$I\subset D$，若存在$M>0$，对一切$x\in I$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间$I$上有界．

② 单调性．若对于区间$I$上的任意两点$x_1$与$x_2$，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$，则称函数$f(x)$在区间$I$上单调增加（减少）．

③ 奇偶性．设函数$f(x)$的定义域为$D$关于原点对称，若对于任意$x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$ $[f(-x)=f(x)]$，则称函数$f(x)$为奇函数（偶函数）．

④ 周期性．设函数$f(x)$的定义域为$D$，若存在正数$T$，对任意$x\in D$，有$f(x+T)=f(x)$，则称函数$f(x)$为周期函数，$T$为周期．

（3）初等函数

① 基本初等函数．幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数统称为基本初等函数．

② 初等函数．由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并用一个式子表示的函数称为初等函数．

### 1.1.2　极限

（1）极限的概念

**定义 4（数列的极限）** $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 $a$ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限．通常说，当 $n$ 趋于无穷时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$. 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

若数列没有极限，则称数列是发散的.

注意：①$\varepsilon$ 是任意小的正数，否则不足以说明 $x_n$ 与 $a$ 的接近程度；

② 对于任意给定的 $\varepsilon$，$N$ 只要存在即可；并且一般情况下，$N$ 与 $\varepsilon$ 有关，但 $N$ 并不是 $\varepsilon$ 的函数，因为 $N$ 以后的项都可以取成定义中的 $N$，故 $N$ 并不唯一.

**定义 5（自变量趋于无穷大时函数的极限）** $\forall \varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限．记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

若将不等式 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 或 $x>X$，则可得到 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义.

注意：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

**定义 6（自变量趋于有限值时函数的极限）** $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限．记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

若将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限．记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

类似地，可以定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A.$

注意：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A.$

另外，在以后的问题叙述中，若 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 时结论都成立，则极限符号简记为 lim.

（2）极限的性质

① 唯一性．若极限存在，则其值必然唯一.

② 有界性．若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则其必然有界．（此性质对函数仍成立）

③ 保号性．若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（$A<0$），则必存在 $U(x_0,\delta)$，使 $f(x)>0$[$f(x)<0$]．若在 $U(x_0,\delta)$ 内有 $f(x)\geqslant 0$[$f(x)\leqslant 0$]，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（$A\leqslant 0$）.

（3）无穷小量与无穷大量

**定义 7（无穷小量）** 在定义 5 和定义 6 中，若 $A=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷小（量）.

**定义 8（无穷大量）** $\forall M>0$，$\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大（量）．记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

类似的，可以定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 的定义.

① 无穷小与无穷大的关系：不等于零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

② 无穷小与函数极限的关系：$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

③ 无穷小的性质：在自变量的同一变化过程中，有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

有限个无穷小的和、积仍是无穷小.

④ 无穷小的比较：若 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq 0$，又 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$，则当 $c=0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$；

$c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

$c=\infty$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶无穷小；

除此之外，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

特别地，$\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 $k$ 阶无穷小.

⑤ 等价无穷小的传递性和替换性：在自变量的同一变化过程中，

若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，则有 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$；

若 $\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$，$\beta(x)\sim\bar{\beta}(x)$，且 $\lim\dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$ 存在，则有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$.

⑥ 常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a$.

(4) 极限的运算

① 极限的四则运算法则：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim f(x)g(x)=AB$；当 $B\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

② 极限存在准则：

a. 夹逼准则，若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

b. 单调有界准则，单调有界数列必有极限.

③ 两个重要极限：　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

一般地，若 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则

$$\lim\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\ \lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e.$$

④ 几个结论：$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}\infty, & |q|>1\\ 0, & |q|<1\end{cases}$；　$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{cases}$；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ 0, & m<n\\ \infty, & m>n\end{cases}.$$

### 1.1.3 函数的连续性与间断点

(1) 函数的连续性

**定义 9**　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

注意：① 函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 连续必须满足的条件是：a. $f(x)$ 在 $x_0$ 点有定义；

b. $f(x_0-0)$及$f(x_0+0)$都存在；c. $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\left[\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\right]$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$右（左）连续.

③ 若函数在区间上每一点都连续，则称函数在该区间上连续.

(2) 连续函数的性质

① 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数；若函数$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$连续，且$u=\varphi(x)$在点$x_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x_0$仍连续.

② 一切初等函数在它们的定义区间上都是连续的.

③ 闭区间上的连续函数：a. 必有最大值与最小值；b. 必有界；c. 若两端点的函数值异号，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$；d. 必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

(3) 函数的间断点

**定义 10** 若函数在点$x_0$处不连续（即不同时满足连续定义中的三个条件），则称点$x_0$为函数$y=f(x)$的间断点.

间断点的类型：① 第一类间断点包括可去间断点与跳跃间断点，其特征是$f(x_0\pm0)$都存在，若$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，此间断点称为可去间断点，否则称为跳跃间断点.

② 除此之外的间断点统称为第二类间断点，如：无穷间断点和振荡间断点.

### 1.1.4 曲线的渐近线

① 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则直线$y=c$称为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$称为函数$y=f(x)$的图形的铅直（垂直）渐近线.

③* 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则直线$y=kx+b$称为函数$y=f(x)$的图形的斜渐近线.

## 1.2 典型例题

### 1.2.1 函数的定义域和性质

**【例 1】** 设$f(x)=\dfrac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{36-x^2}$，求$f(x)$的定义域.

**【解】** 由题设应有$2-x>0$，$2-x\neq1$，且$36-x^2\geqslant0$，故$f(x)$的定义域为$[-6,1)\cup(1,2)$.

**【例 2】** 判定函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的奇偶性.

**【解】** 因为$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=f(x)$，故$f(x)$为偶函数.

### 1.2.2 极限的计算

(1) 利用基本性质和公式求极限

**【例 3】** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=$________.

**【解】** 分子分母同除以$3^{n+1}$，再取极限得$\dfrac{1}{3}$.

**【例 4】** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\arctan x=$________.

【解】 $x\to-\infty$时，$\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$，$e^x\to 0$，所以应填 0.

【例 5】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=$________.

【解】 做此类题时，应用极限运算的常用结论，主要考虑分子、分母中 $x$ 的最高次数即可．在此，分子为 $4^3x^6\cdot 3^4x^4$，分母为 $6^5x^{10}$，所以极限为$\dfrac{2}{3}$.

（2）利用数列求和求极限

【例 6】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\right]$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n(n-1)}{2n^2}\right]=\dfrac{1}{2}$.

【例 7】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2}\right)=2$.

【例 8】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

【解】 由于$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$，所以有

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=1.$$

（3）消去零因子的不定型法

【例 9】 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

注意：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x^2-1}=0$ 是错误的.

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$（$m$ 和 $n$ 都是正整数）.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\dfrac{m}{n}$.

注意：主要是通过通分或根式有理化，消去“0”因子，再用极限运算法则或连续函数求极限的方法求解.

（4）利用两个重要极限求极限

【例 11】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}=1$.

【例 12】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}=$________.

【解】 $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{3x+1}$，利用重要极限得知，应填 $e^3$.

注意：对于形如 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限，若 $\lim u(x)=1$，又 $\lim v(x)=\infty$ 时，应考虑用重要极限来做.

（5）利用有界函数与无穷小的乘积为无穷小求极限

【例 13】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.

注意：由于 $x\to0$ 时，$x$ 为无穷小量，而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，所以极限为 0.

【例 14】 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$ 的结果是（　　）.

（A）无穷大　　（B）零　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）不存在，但不是无穷大

【解】 因为 $\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$，而 $\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ 是有界函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，所以原极限等于 0. 因此应选（B）.

（6）利用等价无穷小代换求极限

【例 15】 求 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sqrt{1-\cos x}}{e^{\sin x}-1}$.

【解】 由于 $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}$，当 $x\to0$ 时，$\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$，

所以　原式 $=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{2}}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 16】 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

【解】 当 $x\to1$ 时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}\sim2\sqrt[3]{x^2-1}$，

所以　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$.

【例 17】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

注意：利用等价无穷小代换求极限是常用的一种方法，要求熟记几个常用的等价无穷小公式．但在应用时要注意，加减关系一般不能代换．如：若认为 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，则结果是错误的.

（7）利用极限存在准则求极限

【例 18】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

【解】 由于 $\frac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

【例 19】 设数列 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 数列 $\{x_n\}$ 显然是单调增加的，又 $x_1=\sqrt{2}<2$，若假设 $x_{n-1}<2$，则

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2,$$

即数列也是有界的．从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限得：$a^2=2+a$，即 $a=2$ 及 $a=-1$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

（8）利用函数连续性求极限

【例 20】 $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)=$________.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{x}=\pi$，所以应填 $-1$.

【例 21】 设 $f(x)$ 处处连续，且 $f(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=$________.

【解】 由于 $f(x)$ 处处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，所以应填 2.

（9）左、右极限

【例 22】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ x+1, & x\geqslant1\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 当 $x\to1$ 时的结果是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）0　　（D）不存在

【解】 因为 $f(1-0)=1$，$f(1+0)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在．因而应选（D）.

【例 23】 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}$ 的结果是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）不存在但不是 $\infty$　　（D）$\infty$

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}$ 不存在，也不是无穷大．因而应选（C）.

*注意：以上对极限运算的几种常用方法进行了列举，随着学习内容的增加，还会有更多的求极限的方法.*

### 1.2.3 判断间断点的类型

【例 24】 设 $f(x)=x\cos\frac{2}{x}+x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）跳跃间断点　　（B）可去间断点　　（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，即 $f(0-0)=f(0+0)$，而 $f(0)$ 没有定义，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点．应选（B）.

【例 25】 设 $f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点　　（C）无穷间断点　　（D）振荡间断点

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{3}\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{2}$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点．应选(B).

【例 26】 下列函数在指出的点间断，说明这些间断点属于哪一类.

① $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1,x=2$；　　② $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1\\ 3-x, & x>1\end{cases}$，　$x=1$.

【解】 ① 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$，$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty$，所以 $x=1$ 是第一类可去间断点，令 $y(1)=-2$，则 $y(x)$ 在 $x=1$ 处连续；而 $x=2$ 是第二类无穷间断点.

② 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} y(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+} y(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，左右极限存在但不相等，所以 $x=1$ 是函数的第一类跳跃间断点.

### 1.2.4 确定函数及极限式中的常数

【例 27】 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^p}=\frac{1}{2}$，则 $p=$________.

【解】 注意到：$\frac{\tan x-\sin x}{x^p}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{p-1}}$，而 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，可知 $p=3$.

【例 28】 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求 $a$ 和 $b$.

【解】 当 $x\to 1$ 时，分母 $x-1\to 0$，必有分子的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$，即有 $a+b+1=0$，将 $b=-a-1$ 代入原式得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=a+2=3,$$

所以 $a=1$，$b=-2$.

【例 29】 已知 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ a+x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$，确定 $a$ 的值，使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续.

【解】 当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，函数为初等函数，所以函数在 $(-\infty,\infty)$ 内是否连续关键是在分界点 $x=0$ 处是否连续.

由于 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$，又 $f(0)=a$，所以当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续.

【例 30】 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{a+b\cos 10x}{e^{x^2}-1}, & x\neq 0\\ 50, & x=0\end{cases}$，试确定常数 $a,b$，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解】 由函数在一点连续的定义知，在此须有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+b\cos 10x}{e^{x^2}-1}=50,$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)=0$. 故应分子的极限 $\lim\limits_{x\to 0}(a+b\cos 10x)=0$，得 $a+b=0$，即 $b=-a$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+b\cos 10x}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-a\cos 10x}{e^{x^2}-1}=a\lim\limits_{x\to 0}\frac{50x^2}{x^2}=50a$，得 $a=1$. 从而当 $a=1$，$b=-1$

时，$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

**【例 31】** 若 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}-a}{x(x-1)}$有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，求 $a$.

**【解】** 由条件知，$x\to0$ 时，$f(x)\to\infty$，而 $x\to1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，所以只要 $a\neq e^{-1}$，就有第一个条件满足，而当 $x\to1$ 时，由于 $e^{x-1}-1\sim x-1$，则$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1+1-a}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-a}{x(x-1)}$，要使极限存在必有 $a=1$.

### 1.2.5　闭区间上连续函数的性质

**【例 32】** 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且不超过$a+b$.

**【证明】** 设 $f(x)=x-a\sin x-b$，显然它在$[0,a+b]$上连续，又 $f(0)=-b<0$，而

$$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant0.$$

若 $f(a+b)=0$，知 $a+b$ 即为方程 $x=a\sin x+b$ 的一个正根，结论得证.

若 $f(a+b)>0$ 则有零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$，使得 $f(\xi)=0$，

即方程至少有一个正根，并且不超过 $a+b$.

**【例 33】** 设 $f(x),g(x)$都是闭区间$[a,b]$上的连续函数，且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，试证明在$(a,b)$内至少有一点 $\xi$，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

**【证明】** 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(x)$在区间$[a,b]$上连续，又 $F(a)=f(a)-g(a)>0$，$F(b)=f(b)-g(b)<0$，由零点定理知结论成立.

### 1.2.6　杂例

**【例 34】** 当 $x\to x_0$时，若 $f(x)$有极限，$g(x)$没有极限，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $f(x)g(x)$当 $x\to x_0$时必无极限

(B) $f(x)g(x)$当 $x\to x_0$时必有极限

(C) $f(x)g(x)$当 $x\to x_0$时可能有极限，也可能无极限

(D) $f(x)g(x)$当 $x\to x_0$时，若有极限其极限必等于零

**【解】** 看以下两例：$x\to0$ 时，$f(x)=x$，有极限 0，$g(x)=\dfrac{1}{x}$无极限．但当 $x\to0$ 时，$f(x)g(x)$有极限 1；而 $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to0$ 时，$f(x)g(x)$无极限．由此排除(A),(B),(D). 应选(C).

**【例 35】** 当 $x\to x_0$时，若 $\alpha(x)$与 $\beta(x)(\beta\neq0)$都是无穷小，则 $x\to x_0$时，下列哪一个表示式不一定是无穷小（　　）.

(A) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\beta(x)]$　　　　(D) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

**【解】** 由于在自变量的同一变化过程中，有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和、积仍是无穷小，但是无穷小的商不一定是无穷小．比如，$x\to0$ 时，$\alpha(x)=x$，$\beta(x)=x^3$均为无穷小，而$\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}=\dfrac{1}{x}$不再是无穷小．而当 $x\to x_0$时，由于 $\alpha(x),\beta(x)$都是无穷小，所以 $\ln[1+\alpha(x)\beta(x)]\sim\alpha(x)\beta(x)$. 因而应选 (D).

**【例 36】** 当 $x\to0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 $x$ 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　　　(B) 同阶无穷小，但非等价无穷小

(C) 低阶无穷小　　(D) 等价无穷小

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x}{x}=-1$，所以是同阶无穷小，但不是等价无穷小．应选 (B).

【例 37】 无穷大量与无界量的关系是 (　　).

(A) 无穷大量可能是有界量　　(B) 无穷大量一定不是有界量

(C) 有界量可能是无穷大量　　(D) 不是有界量就一定是无穷大量

【解】 用无穷大的定义和无界的定义来区别这两个概念．$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是指在$x=x_0$处的充分小邻域内，对于"所有的$x$"，$f(x)$都可以任意大；而无界并不要求"所有的$x$"．故无穷大量与无界函数的关系是：无穷大量必然是无界函数，反之不一定成立．故选 (B).

【例 38】 设曲线的方程为$y=\frac{\sin x}{x}+\arctan(1-\sqrt{x})$，则 (　　).

(A) 曲线没有渐近线　　(B) $y=-\frac{\pi}{2}$是曲线的渐近线

(C) $x=0$是曲线的渐近线　　(D) $y=\frac{\pi}{2}$是曲线的渐近线

【解】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{-\pi}{2}$，所以直线$y=\frac{-\pi}{2}$为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线．$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1+\frac{\pi}{4}$，从而函数$y=f(x)$没有铅直渐近线．所以应选 (B).

## 1.3 练习题

### ☆ A 题 ☆

**1. 填空题**

(1) 函数$y=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|-1}}$的定义域是__________.

(2) 设$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则$f(\cos x)=$__________.

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=$__________.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^3}=$__________.

(5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=$__________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}=$__________.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$__________.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin x)}{1-\cos x}=$__________.

(9) 若$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-a}{x^2-1}=2$,则$a=$__________.

(10) 若$\lim\limits_{x\to 0}(1-kx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则$k=$__________.

(11) $x=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 的________间断点.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 点连续，则 $a=$________.

**2. 选择题**

(1) "数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在" 是 "数列 $\{x_n\}$ 有界" 的（　　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分条件，也非必要条件

(2)（2003 年考研数学二）设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）.

(A) $a_n<b_n$ 对任意 $n$ 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 $n$ 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(3) 下列各式不正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　(C) $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 不存在　　(D) $\infty$

(5) 若 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则必有（　　）.

(A) $a=2,b=8$　　(B) $a=2,b=5$　　(C) $a=0,b=-8$　　(D) $a=2,b=-8$

(6) 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x)=$（　　）.

(A) $e^{x-1}$　　(B) $e^{x+2}$　　(C) $e^{x+1}$　　(D) $e^{-x}$

(7) 当 $x\to+\infty$ 时，为无穷小量的是（　　）.

(A) $x\sin\frac{1}{x}$　　(B) $e^{\frac{1}{x}}$　　(C) $\ln x$　　(D) $\frac{1}{x}\sin x$

(8) 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小（　　）.

(A) $x^2$　　(B) $1-\cos x$　　(C) $x-\tan x$　　(D) $\ln(1+x^2)$

(9) 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=2^x+3^x-2$ 是 $x$ 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 低阶无穷小　　(D) 等价无穷小

(10) 点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 1, & x=1\\ 3-x, & x>1\end{cases}$ 的（　　）.

(A) 连续点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 可去间断点　　(D) 第二类间断点

(11) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）.

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(12) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，结论正确的为（　　）.