

ANSYS原厂策划 万水精心出品

ANSYS核心产品系列

ANSYS®



万水ANSYS技术丛书

ANSYS 非线性有限元分析方法 及范例应用

张洪伟 高相胜 张庆余 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

万水 ANSYS 技术丛书

ANSYS 非线性有限元分析方法及 范例应用

张洪伟 高相胜 张庆余 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书以 ANSYS 14.0 平台为基础,主要针对 ANSYS 中几何非线性(大位移、大转动和大应变)、材料非线性以及状态非线性基础理论和工程应用进行系统讲解。本书最大特色在于以 ANSYS 14.0 为平台,将非线性有限元理论和软件操作结合,着重从力学基本概念及工程应用结合的角度系统讲解相关技术。

本书具体介绍 ANSYS 14.0 非线性有限元方法的工程应用,在每章通过实例讲解非线性力学理论及其在 ANSYS 中的具体实现;系统讲解软件操作步骤,有限元模拟过程及相关注意事项;结合范例,由浅入深讲解非线性有限元的基本思想,帮助用户积累实际操作经验。本书主要内容包括典型的几何非线性、材料非线性、接触非线性等,并包含其他书籍中难以见到的关键技术,如单元积分方案选择、锁定问题处理、MPC 接触算法、材料界面剥离功能等,使读者真正理解非线性有限元的相关概念及在 ANSYS 中的具体实现。书中范例尽量兼顾科研及工程计算两方面,满足不同读者的需求。

本书适用于机械、航空航天、土木专业的高年级本科生、研究生和工程技术人员,并可作为学习掌握 ANSYS 软件的参考教材。通过本书的详细讲解,读者不但可以熟练掌握软件的相关操作,而且能深刻理解 ANSYS 非线性有限元的工程应用。

本书配有实例的源文件,读者可以从中国水利水电出版社网站以及万水书苑下载,网址为: <http://www.waterpub.com.cn/softdown/>或 <http://www.wsbookshow.com>。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS非线性有限元分析及范例应用 / 张洪伟, 高相胜, 张庆余编著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2013. 4

(万水ANSYS技术丛书)

ISBN 978-7-5170-0380-9

I. ①A… II. ①张… ②高… ③张… III. ①有限元分析—应用程序 IV. ①0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第286151号

策划编辑: 杨元泓

责任编辑: 宋俊娥

封面设计: 李 佳

书 名	万水 ANSYS 技术丛书 ANSYS 非线性有限元分析及范例应用
作 者	张洪伟 高相胜 张庆余 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京蓝空印刷厂
规 格	184mm×260mm 16 开本 19.75 印张 502 千字
版 次	2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷
印 数	0001—4000 册
定 价	49.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

从 20 世纪 50 年代发展至今,有限元方法已经成为计算力学和计算工程科学领域里最为有效的计算方法,给工程、科学以至人类社会带来急剧的革命性的变化,而且已经开发了一批通用和专用的有限元软件,其应用日益广泛,已经渗入到各个工程行业研发的各个环节,已由辅助的验证工具转变为驱动产品创新的重要引擎,并且已从最初的固体力学和结构分析领域扩展到流体力学、电磁、温度和声学等领域,从简单的静力分析发展到非线性分析、动力分析、多物理场耦合分析等复杂计算。

ANSYS 软件是一款集结构、热、流体、电磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件,具有多物理场耦合功能,允许在同一模型上进行各种各样的耦合计算。它是美国机械工程师协会(ASME)、美国核安全局(NQA)及近二十种专业技术协会认证的标准分析软件,可广泛应用于机械制造、汽车、造船、石油化工、航空航天、国防军工、电子、土木工程、能源、生物医学、水利、日用家电等一般工业及科学研究领域。

本书以 ANSYS 14.0 为平台,从力学基本概念及工程应用结合的角度系统讲解非线性相关技术,强调非线性有限元方法的工程应用和融会贯通,使读者能够应用非线性有限元方法求解材料非线性、几何大变形和接触这些非线性力学问题,力求在软件平台 ANSYS 实践的基础上,提高工程结构中非线性计算和仿真能力,促进非线性有限元的教学和科研水平。

全书共分为 9 章,第 1 章介绍非线性问题的基本理论、ANSYS 非线性问题的求解和 ANSYS 14.0 的新功能;第 2 章介绍非线性有限元求解技术及非线性分析相关建议;第 3 章介绍非线性分析单元技术,包括实体单元、板壳单元和梁单元,介绍了剪切锁定和体积锁定问题及锁定问题的处理方案;第 4 章介绍几何非线性问题的求解;第 5 章介绍材料非线性问题的求解;第 6 章介绍接触非线性问题的求解;第 7 章介绍高级接触分析功能;第 8 章介绍单元生死技术;第 9 章介绍复合材料分析。本书案例丰富,每一章均提供了具体应用范例,在讲解过程中,结合了图形用户界面操作和命令流操作两种模式,每个实例均提供了详细的 GUI 操作路径和 APDL 命令流,读者可以根据自己的需要进行选择。

本书适用于机械、航空航天、土木专业的高年级本科生、研究生和工程技术人员,同时可以作为高校学生学习掌握 ANSYS 软件非线性分析应用的参考教材。

本书由张洪伟、高相胜、张庆余编著,感谢北京石油化工学院机械工程学院各位同事的支持,感谢北京航空航天大学同门师兄的鼓励和帮助,感谢空军航空大学飞行器与动力系各位老师的帮助。在本书的写作过程中,得到了安世亚太科技股份有限公司及其很多员工的支持和帮助。参加本书编写的还有姬宜朋、席军、董晓慧、白贤灵、闫秀柱、陈书军、肖凯、

王庆、张波、吕田、马勇杰、吴琼等人。在本书创作期间，中国水利水电出版社老师给予了大力支持，正是他们的辛苦付出，才使得本书在第一时间与读者见面。在此，作者向所有参与和关心本书出版的领导、老师、亲人和朋友致以诚挚的谢意。

由于时间仓促及作者水平有限，难免存在错误和纰漏之处，敬请广大读者批评指正。

编 者

2013 年 1 月

序

我国正处于从中国制造到中国创造的转型期，经济环境充满挑战。由于 80% 的成本在产品研发阶段确定，如何在产品研发阶段提高产品附加值成为制造企业关注的焦点。

在当今世界，不借助数字建模来优化和测试产品，新产品的的设计将无从着手。因此越来越多的企业认识到工程仿真的重要性，并在不断加强应用水平。工程仿真已在航空、汽车、能源、电子、医疗保健、建筑和消费品等行业得到广泛应用。大量研究及工程案例证实，使用工程仿真技术已经成为不可阻挡的趋势。

工程仿真是一件复杂的工作，工程师不但要有工程实践经验，同时要对多种不同的工业软件了解掌握。与发达国家相比，我国仿真应用成熟度还有较大差距。仿真人才缺乏是制约行业发展的重要原因，这也意味着有技能、有经验的仿真工程师在未来将具有广阔的职业前景。

ANSYS 作为世界领先的工程仿真软件供应商，为全球各行业提供能完全集成多物理场仿真软件工具的通用平台。对有意从事仿真行业的读者来说，选择业内领先、应用广泛、前景广阔、覆盖面广的 ANSYS 产品作为仿真工具，无疑将成为您职业发展的重要助力。

为满足读者的仿真学习需求，ANSYS 与中国水利水电出版社合作，联合国内多个领域仿真行业实战专家，出版了本系列丛书，包括 ANSYS 核心产品系列、ANSYS 工程行业应用系列和 ANSYS 高级仿真技术系列，读者可以根据自己的需求选择阅读。

作为工程仿真软件行业的领导者，我们坚信，培养用户走向成功，是仿真驱动产品设计、设计创新驱动行业进步的关键。



ANSYS 大中华区总经理，副总裁

于上海，2013 年 1 月 16 日

目 录

序

前言

第 1 章 ANSYS 非线性问题概述	1
1.1 非线性有限元基本理论	1
1.1.1 弹塑性本构关系	1
1.1.2 大变形几何关系	2
1.1.3 接触非线性问题	4
1.2 ANSYS 非线性有限元的功能特点	5
1.3 ANSYS 14.0 新功能介绍	9
第 2 章 非线性有限元求解技术	13
2.1 非线性求解算法	13
2.1.1 牛顿-拉普森求解	13
2.1.2 迭代过程	15
2.1.3 收敛准则	16
2.2 载荷步与子步	17
2.2.1 基本概念	17
2.2.2 阶跃载荷与渐变载荷	18
2.3 非线性稳定性方案	18
2.4 计算流程及如何获得收敛解	22
2.4.1 非线性分析的建议	22
2.4.2 非线性分析的相关选项	23
第 3 章 非线性分析单元技术	27
3.1 连续实体单元	27
3.1.1 连续体单元概述	27
3.1.2 ANSYS 14.0 中常用实体单元介绍	28
3.2 壳单元	29
3.2.1 壳单元概述	29
3.2.2 ANSYS 14.0 中 SHELL181/SHELL281 单元介绍	30
3.3 梁单元	30
3.3.1 梁单元概述	30
3.3.2 BEAM188/BEAM189 单元的定义	31
3.3.3 BEAM188/BEAM189 单元的网格划分及载荷施加	32
3.3.4 BEAM188/BEAM189 单元的后处理	33

3.4 剪切和体积锁定问题	33
3.4.1 剪切锁定	34
3.4.2 体积锁定	34
3.5 单元公式及锁定问题处理	36
3.5.1 选择缩减积分 (B-bar 方法)	36
3.5.2 一致缩减积分	36
3.5.3 增强应变积分	37
3.5.4 简单增强应变积分	38
3.5.5 混合 U-P 公式	38
3.6 非线性分析单元选择建议	38
3.6.1 一般原则	38
3.6.2 线性分析和小应变非线性分析	38
3.6.3 有限应变非线性分析	39
3.7 实例: 超弹性悬臂梁不同单元公式非线性分析	39
3.7.1 问题描述	39
3.7.2 数值模拟过程 (GUI 方法)	39
第 4 章 几何非线性与屈曲分析	47
4.1 几何非线性分析	47
4.1.1 大应变效应	47
4.1.2 应力和应变度量	48
4.1.3 大位移/大转动 (小应变)	49
4.1.4 应力刚化	49
4.1.5 旋转软化	50
4.2 几何非线性分析实现及提示	50
4.2.1 建模策略	50
4.2.2 网格质量检查	51
4.2.3 求解选项	51
4.2.4 加载和边界条件	51
4.2.5 后处理	51
4.3 屈曲分析	52
4.3.1 屈曲分析概述	52
4.3.2 特征值屈曲	52

4.3.3 特征值屈曲分析的步骤	53	5.6.2 超弹性材料本构模型	107
4.4 非线性屈曲分析	57	5.6.3 求解过程	111
4.4.1 非线性屈曲分析	57	5.7 实例：超弹性 O 形密封圈变形及应力分析	112
4.4.2 非线性后屈曲分析	59	5.7.1 问题的描述	112
4.5 实例：超弹性材料拉伸试件的大变形分析	60	5.7.2 数值模拟过程（GUI 操作）	113
4.5.1 问题描述	60	5.7.3 命令流	118
4.5.2 数值模拟过程（GUI 操作过程）	60	5.8 实例：带槽口平板的棘轮行为分析	120
4.6 实例：拱结构的线性屈曲分析	67	5.8.1 问题的描述	120
4.6.1 问题描述	67	5.8.2 数值模拟过程（GUI 操作）	121
4.6.2 数值模拟过程（GUI 操作过程）	67	5.9 实例：铝合金毛坯自然时效分析	130
4.7 实例分析：受集中载荷薄壳的失稳分析	72	5.9.1 问题的描述	130
4.7.1 问题描述	72	5.9.2 数值模拟过程（GUI 操作）	130
4.7.2 数值模拟过程（GUI 方法）	72	5.9.3 命令流	134
第 5 章 材料非线性分析	77	第 6 章 接触非线性分析	137
5.1 材料非线性分析概述	77	6.1 接触非线性分析概念	137
5.2 塑性理论介绍	77	6.2 接触类型及接触单元	139
5.2.1 屈服准则	78	6.2.1 接触分类	139
5.2.2 流动准则	81	6.2.2 接触单元	139
5.2.3 强化准则	81	6.2.3 接触对的建立	142
5.2.4 常用塑性材料本构关系	82	6.2.4 接触向导	143
5.2.5 循环强化和循环软化	86	6.3 接触分析基本参数设置	145
5.2.6 棘轮和调整效应	87	6.3.1 接触刚度	145
5.2.7 ANSYS 对塑性过程的考虑	88	6.3.2 接触算法	146
5.3 蠕变分析	90	6.3.3 穿透容差	148
5.3.1 蠕变现象	90	6.3.4 接触行为	148
5.3.2 一般蠕变方程	91	6.3.5 球形域	149
5.3.3 隐式蠕变过程	93	6.3.6 接触探测	151
5.3.4 显式蠕变过程	95	6.4 摩擦	153
5.3.5 ANSYS 蠕变分析的求解过程	100	6.4.1 摩擦机制	153
5.3.6 隐式蠕变与显式蠕变的比较	102	6.4.2 库仑摩擦	153
5.4 DP 材料模型	102	6.4.3 摩擦参数定义	154
5.4.1 DP 材料简介	102	6.5 接触分析高级选项	155
5.4.2 DP 材料定义及求解	103	6.5.1 控制节点	155
5.5 混凝土材料模型	104	6.5.2 初始接触状态调整	156
5.5.1 混凝土材料简介	104	6.5.3 对称接触/非对称接触	159
5.5.2 混凝土材料定义及求解	105	6.5.4 接触诊断工具	160
5.6 超弹性材料	105	6.6 面-面接触	161
5.6.1 超弹性材料背景	105	6.6.1 应用面-面接触单元	161

6.6.2 接触分析的步骤	161	6.12.3 求解过程(命令流)	225
6.6.3 建立几何模型并划分网格	161	6.13 实例:管夹装配体的接触分析	227
6.6.4 识别接触对	162	6.13.1 问题的描述	227
6.6.5 指定接触面和目标面	162	6.13.2 数值模拟过程(GUI操作)	227
6.6.6 定义目标面	163	第7章 高级接触功能	234
6.6.7 定义柔体的接触面	167	7.1 MPC方法简介	234
6.6.8 设置实常数和单元关键选项	169	7.2 MPC方法应用	235
6.6.9 控制刚性目标面的运动 (刚体-柔体接触)	180	7.2.1 连接非协调网格	235
6.6.10 热接触模拟	181	7.2.2 连接不同单元类型	235
6.6.11 给柔体单元加必要的边界条件	183	7.2.3 施加远处载荷	236
6.6.12 定义求解和载荷步选项	183	7.3 实体-板壳单元 MPC 连接技术	237
6.6.13 求解	185	7.3.1 实体/实体接触	237
6.6.14 检查结果	185	7.3.2 壳体/壳体接触基本过程	237
6.7 点-面接触	188	7.3.3 实体/壳体接触基本过程	238
6.7.1 使用点-面接触单元	188	7.4 实体-梁与板壳-梁 MPC 连接技术	238
6.7.2 点-面接触分析的步骤	188	7.4.1 实体-梁连接	238
6.8 点-点接触	199	7.4.2 壳体-梁连接	239
6.8.1 建立几何实体及分网	200	7.5 施加表面约束载荷	240
6.8.2 生成接触单元	200	7.6 实例:梁对实体的多点约束接触分析	241
6.8.3 定义接触的法线方向	201	7.6.1 问题描述	241
6.8.4 定义初始过盈或间隙	202	7.6.2 数值模拟过程(GUI方法)	241
6.8.5 选择接触算法	202	7.7 实例:筒体与斜接管接头应力分析	247
6.8.6 施加必要的边界条件	203	7.7.1 问题描述	247
6.8.7 定义求解选项	203	7.7.2 数值模拟过程(GUI方法)	247
6.8.8 求解	204	第8章 单元生死技术	259
6.8.9 检查结果	205	8.1 单元生死背景	259
6.9 装配体接触分析	205	8.2 单元生死实现过程	260
6.10 接触分析建议	206	8.2.1 单元生死的工作原理	260
6.10.1 接触对的定义	206	8.2.2 单元生死的实现过程	260
6.10.2 接触参数设置	206	8.2.3 使用 ANSYS 结果控制单元生死	262
6.10.3 收敛困难原因	206	8.2.4 进一步说明	263
6.11 实例:厚壁圆筒套装的过盈分析	207	8.2.5 单元生死应用实例 1	264
6.11.1 问题的描述	207	8.2.6 单元生死应用实例 2—地铁开挖 过程模拟	269
6.11.2 数值模拟过程(GUI操作)	207	第9章 复合材料分析	277
6.11.3 求解过程(命令流)	212	9.1 复合材料分析技术	277
6.12 实例:两等长圆柱体赫兹接触分析	214	9.1.1 单元理论和技术	277
6.12.1 问题的描述	214	9.1.2 复合材料单元	281
6.12.2 数值模拟过程(GUI操作)	214	9.1.3 定义材料的叠层结构	283

9.2 失效准则及分析过程中的相关建议	285	9.4.1 问题的描述	291
9.2.1 定义失效准则	285	9.4.2 数值模拟过程（GUI 操作）	292
9.2.2 应遵循的建模和后处理规则	288	9.5 实例：复合材料工字梁的承载分析	297
9.3 新增 Debonding 模拟材料分离行为	290	9.5.1 问题的描述	297
9.3.1 Debonding 功能概述及分析步骤	290	9.5.2 数值模拟过程（GUI 操作）	297
9.3.2 接触单元	291	9.5.3 命令流	301
9.3.3 粘结区材料模型	291	参考文献	304
9.4 实例：粘结材料的界面开裂分析	291		

ANSYS 非线性问题概述

1.1 非线性有限元基本理论

从一般的角度来说,固体力学中的所有现象都是非线性的。对于许多工程实际问题,近似地用线性理论来处理可以使计算简单可行,并符合工程上的精度要求。但是对于工程中的许多问题,如金属材料成形过程、切削加工过程、地震作用下结构的弹塑性动力响应、高层建筑抗风、超弹性材料不可压缩、薄壁结构失稳、装配体过盈接触等问题的研究,仅仅假设为线性问题是远远满足不了实际需求的,必须进一步考虑为非线性问题。因此,对各种工程结构的非线性分析就显得日益迫切和重要了。非线性系统的响应不是所施加载荷的线性函数,因此不能通过叠加来获得不同载荷情况的解答。每种载荷情况都必须作为独立的分析进行定义和求解。

通常,把非线性问题分为三种类型:

(1) 材料非线性。非线性的应力应变关系是结构非线性的常见原因,如弹塑性材料、超弹性材料等,许多因素都可以影响材料的应力应变性质,包括加载历史、温度、加载时间总量等。

(2) 几何非线性。如果结构经历大变形,则变化了的几何形状可能会引起结构的非线性响应,这又可以分为两类情形。

第一种情形,大挠度或大转动问题。例如板、壳等薄壁结构在一定载荷作用下,尽管应变很小,甚至未超过弹性极限,但是位移较大,材料元素有较大的转动。这时的平衡方程必须建立在变形后的构形上,同时应变表达式中应包括位移的二次项,从而平衡方程和几何方程都为非线性的。

第二种情形,大应变或有限应变问题。例如金属成形过程的有限塑性变形,处理这类大应变问题,除了非线性的平衡方程和几何关系外,还需要引入相应的应力-应变关系。

(3) 状态非线性。由于系统刚度和边界条件的性质随物体的运动发生变化所引起的非线性响应。例如,一根只能受拉的钢索可能是松散的,也可能是绷紧的;轴承套可能是接触的,也可能是不接触的;冻土可能是冻结的,也可能是融化的。这些系统的刚度和边界条件由于系统状态的变化在不同的值之间突然变化。

1.1.1 弹塑性本构关系

按性质分类,弹塑性问题应属于材料非线性问题。所谓材料非线性,是指材料的应力-应变关

系是非线性的。非线性弹塑性问题是不可逆的，即有残余变形存在。

工程中，考虑塑性的应变公式为

$$\{\mathbf{d}\varepsilon\} = \{\mathbf{d}\varepsilon_e\} + \{\mathbf{d}\varepsilon_p\} \quad (1-1)$$

其中， $\{\mathbf{d}\varepsilon_e\}$ ， $\{\mathbf{d}\varepsilon_p\}$ 为弹性应变增量和塑性应变增量。

$\{\mathbf{d}\varepsilon_e\}$ 服从 Hooke 定律，即

$$\{\mathbf{d}\varepsilon_e\} = [D_e]^{-1} \{\mathbf{d}\sigma\} \quad (1-2)$$

式中， $[D_e]$ 为材料的弹性矩阵， $\{\mathbf{d}\sigma\}$ 为应力增量。

$\{\mathbf{d}\varepsilon_p\}$ 服从流动法则，即

$$\{\mathbf{d}\varepsilon_p\} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (1-3)$$

式中， F 为加载面。采用 Mises 屈服准则，可得到理想弹塑性模型增量形式的应力-应变关系

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = ([D]_e - [D]_p) \{\mathbf{d}\varepsilon\} = [D]_{ep} \{\mathbf{d}\varepsilon\} \quad (1-4)$$

其中，

$$[D_e] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{(1-\mu)} & \frac{\mu}{(1-\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{(1-\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

$$[D_p] = \frac{9G^2}{3G\bar{\sigma}^2} \begin{bmatrix} S_{xx}^2 & & & & & \\ S_{xx}S_{yy} & S_{yy}^2 & & & & \\ S_{xx}S_{zz} & S_{yy}S_{zz} & S_{zz}^2 & & & \\ S_{xx}S_{xy} & S_{yy}S_{xy} & S_{zz}S_{xy} & S_{xy}^2 & & \\ S_{xx}S_{yz} & S_{yy}S_{yz} & S_{zz}S_{yz} & S_{xy}S_{yz} & S_{yz}^2 & \\ S_{xx}S_{zx} & S_{yy}S_{zx} & S_{zz}S_{zx} & S_{xy}S_{zx} & S_{yz}S_{zx} & S_{zx}^2 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

式中， S_{ij} 为偏量应力 ($i, j = x, y, z$)， $\bar{\sigma}$ 为等效应力。

1.1.2 大变形几何关系

在工程上采用 Lagrange 坐标变量描述大变形，Green 应变的分量可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ \varepsilon_z &= w_{,z} + \frac{1}{2}(u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2) \\ \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} + (u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z}) \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} + (u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z} + w_{,x}w_{,z}) \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \right. \quad (1-7)$$

采用有限单元法, 应变 $\{\varepsilon\}$ 和单元节点位移 $\{d_e\}$ 之间的关系

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d_e\} \quad (1-8)$$

式中, $[B]$ 为单元应变矩阵。 $[B]$ 能分成线性部分 $[B_L]$ 和非线性部分 $[B_{NL}]$ 之和, 即

$$[B] = [B_L] + \frac{1}{2}[B_{NL}] \quad (1-9)$$

采用全拉格朗日法来考虑应力和应变的增量的关系, 即用在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻紧相邻的两次迭代计算结果来考虑工程应力、应变增量, 对于两次迭代计算, 若分别用 p 和 $p+1$ 表示, 则有

$$\left\{ \begin{aligned} \{\Delta\varepsilon\} &= \{\varepsilon\}^{(p+1)} - \{\varepsilon\}^{(p)} \\ \{\Delta\sigma\} &= \{\sigma\}^{(p+1)} - \{\sigma\}^{(p)} \end{aligned} \right. \quad (1-10)$$

根据式 (1-9), 应变增量可分解为线性部分 $\{\Delta\varepsilon_L\}$ 和非线性部分 $\{\Delta\varepsilon_{NL}\}$, 即

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_L\} + \{\Delta\varepsilon_{NL}\} \quad (1-11)$$

式中,

$$\left\{ \begin{aligned} \{\Delta\varepsilon_L\} &= [B_L]\{\Delta d_e\} \\ \{\Delta\varepsilon_{NL}\} &= \frac{1}{2}[B_{NL}]\{\Delta d_e\} \end{aligned} \right. \quad (1-12)$$

$[B_L]$ 还可以分为常数 $[B_0]$ 和一次函数阵 $[B_{L1}]$ 之和, 即

$$[B_L] = [B_0] + [B_{L1}] \quad (1-13)$$

根据式 (1-12), 在 $p+1$ 次迭代中, 单元应力为

$$\{\sigma\}^{(p+1)} = \{\sigma\}^{(p)} + \{\Delta\sigma\} = \{\sigma\}^{(p)} + [D]\{\Delta\varepsilon\} \quad (1-14)$$

根据以上各式, 采用虚功原理来推导平衡方程, 可以得到单元平衡的增量形式, 即

$$([K_e]_0 + [K_e]_\sigma + [K_e]_L)\{\Delta d_e\} = \{\Delta F_e\} \quad (1-15)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} [K_e]_0 &= \iiint [B_0]^T [D] [B_0] dV \\ [K_e]_L &= \iiint ([B_0]^T [D] [B_{L1}] + [B_{L1}]^T [D] [B_0] + [B_{L1}]^T [D] [B_{L1}]) dV \\ [K_e]_\sigma \{d_e\} &= \iiint [B_{NL}]^T \{\sigma\}^{(p)} dV \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

以及

$$\{\Delta F_e\} = \{F_e\}^{(p+1)} - \iiint [B_L]^T \{\sigma\}^{(p)} dV \quad (1-17)$$

根据式 (1-15), 可以三个矩阵的含义:

$[K_e]_0$ ——小位移刚阵, 即一般的线性刚阵;

$[K_e]_\sigma$ ——初应力刚阵，即由大变形引起的刚阵；

$[K_e]_L$ ——大位移刚阵，即单元应力水平决定的刚阵。

考虑材料非线性问题，只需要将矩阵表达式中的弹性矩阵 $[D]$ 用弹塑性矩阵 $[D]_{ep}$ 就可以了。

在式(1-15)的基础上，按组装规律进行组装，可以得到整体结构的增量有限元方程。

1.1.3 接触非线性问题

接触的非线性是由状态（边界）条件的非线性引起的，这主要包括两个方面：一是接触表面的改变，即自由表面边界的一部分转变为接触面边界，或者反之，由接触面边界放松接触而变化成为自由边界；二是接触面的变形、摩擦和滑移，可能出现强烈的非线性性质。随着载荷和位移的改变，接触表面能在滑动状态与粘着状态之间相互转变，同时滑动的摩擦力也会表现出非线性性质。需要注意的是，应把加载前已经接触的边界和加载后可能接触的边界都看成是接触边界；把已接触边界上的任意一个节点看成是属于两接触体的一对节点，把可能接触边界上的节点也成对配置。这种接触边界上成对的节点称为接触节点对。

接触问题属于不定边界问题，即使是简单的弹性接触问题也具有非线性，其中既有接触面积变化而产生的非线性以及由接触压力分布变化而产生的非线性，也有由摩擦作用产生的非线性。物体相互接触，随着载荷的增加或减少，在接触面会出现弹塑性变形及塑性卸载的情况，这使求解过程更为复杂。对于这类问题，若求得解析结果是十分困难的，甚至是不可能的，只能采用数值模拟的方法。其中非线性有限元是目前可以给出这类问题近似解的最有效途径之一。

为简述方便，设接触体系 Ω 由两物体构成，如图1-1所示，分别为 Ω_1 和 Ω_2 。虽然接触也可以发生在一个物体的几个部分或多个物体之间，但原理是一样的。物体的边界可以区分为给定外力边界 $S_p^{(a)}$ 、给定位移边界 $S_u^{(a)}$ 和可能发生接触的边界 $S_c^{(a)}$ ，这里上标 $a=1, 2$ 指两个可能发生接触的物体。

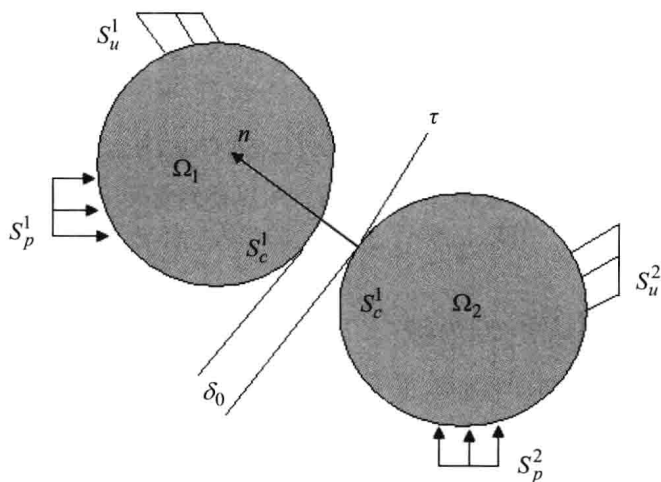


图 1-1 接触体系

假设所研究的问题满足如下条件：

- (1) 接触物体是弹性的，且位移和变形很小；

- (2) 接触表面连续;
- (3) 接触表面的摩擦力遵循一定的规律 (如库仑摩擦定律)。

1.2 ANSYS 非线性有限元的功能特点

ANSYS 软件是集结构、热、流体、电磁场、声场和耦合场分析为一体的大型通用有限元分析软件,涵盖了机械、航空航天、能源、交通运输、土木建筑、水利、电子、地矿、生物医学、教学科研等众多领域。ANSYS 具有极强的结构分析能力,可以处理各种线性和非线性问题,提供了丰富的单元库和各种材料本构模型。

下面将针对非线性问题进一步介绍。

在日常生活及工程应用中会经常遇到各种结构非线性。例如,无论何时用钉书针钉书,金属钉书钉将永久地弯曲成一个不同的形状 (如图 1-2 (a) 所示)。如果在一个木架上放置重物,随着时间的迁移,木架将越来越下垂 (如图 1-2 (b) 所示)。当在汽车或卡车上装货时,汽车或卡车的轮胎和下面路面间接触将随货物重量的变化而变化 (如图 1-2 (c) 所示)。如果将上面例子的载荷变形曲线画出来,将发现这些例子都显示了非线性结构的基本特征——变化的结构刚性。如图 1-2 (d) 至图 1-2 (f) 所示为轧制成形过程、喷丸强化过程及金属切削过程等,在这些过程中,有显著的接触非线性、材料非线性和几何非线性现象。

非线性结构的基本特征是结构刚度随载荷的改变而变化。如果绘制一个非线性结构的载荷-位移曲线,则力与位移的关系是非线性函数,如图 1-3 所示。当载荷增加时,载荷-位移曲线的斜率也在改变。在本例中结构是“软化”的。

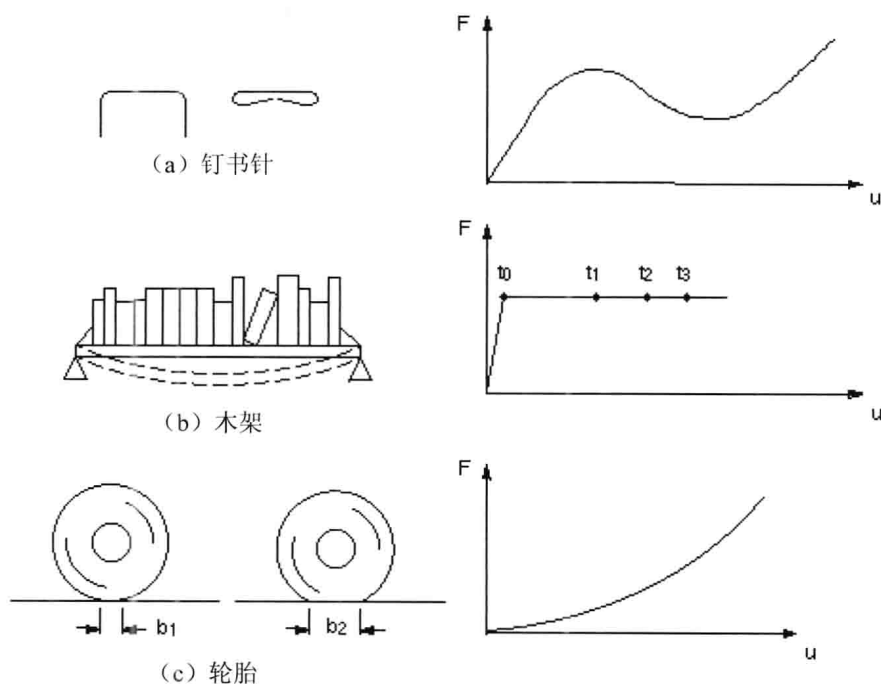


图 1-2 非线性结构行为的例子

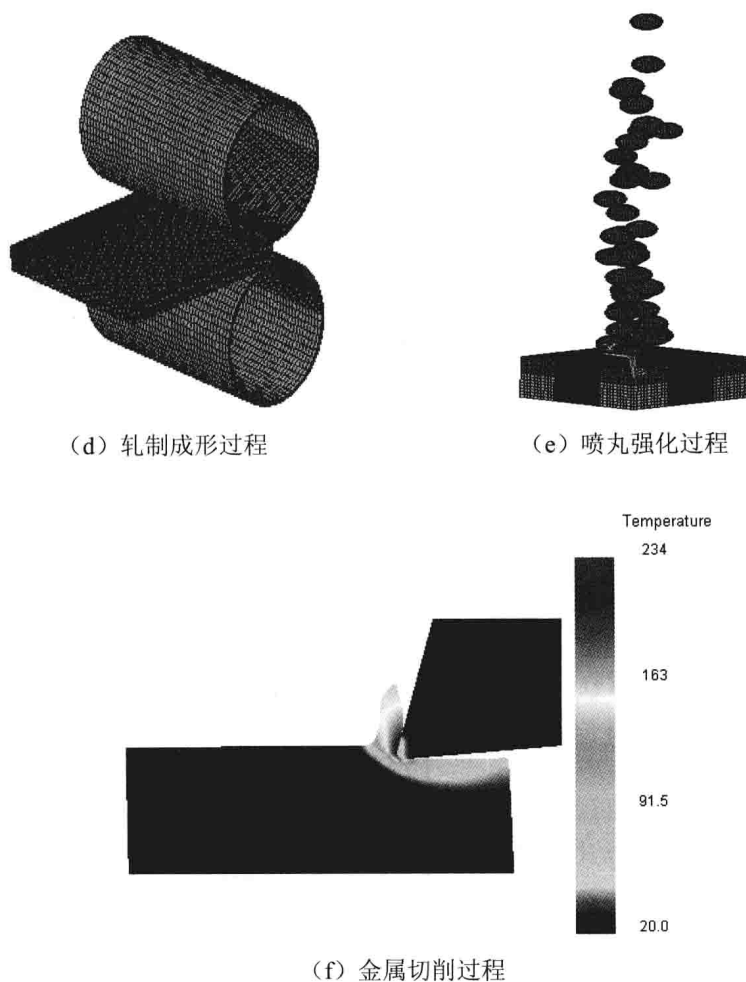


图 1-2 非线性结构行为的例子 (续图)

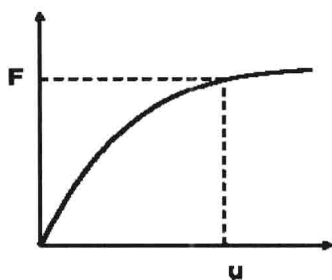


图 1-3 力和位移的关系

引起结构非线性的原因很多，可以分成三种主要类型。

(1) 状态变化 (包括接触)。

许多普通结构表现出一种与状态相关的非线性行为。例如，一根只能拉伸的电缆可能是松散的，也可能是绷紧的。轴承套可能是接触的，也可能是不接触的，冻土可能是冻结的，也可能是融化的。这些系统的刚度由于系统状态的改变在不同的值之间突然变化。状态改变也许和载荷直接有

关（如在电缆情况中），也可能由某种外部原因引起（如在冻土中的紊乱热力学条件）。ANSYS 程序中单元的激活与杀死选项用来给这种状态的变化建模。

接触是一种很普遍的非线性行为，接触是状态变化非线性类型中一个特殊而重要的子集。如图 1-4 所示，接触面积未知，它取决于施加载荷的大小。

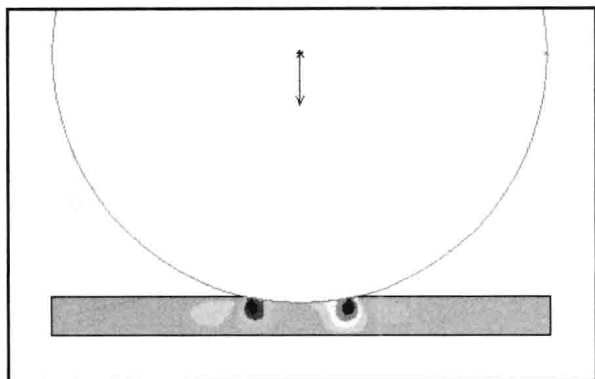


图 1-4 接触非线性

（2）几何非线性。

如果结构经受大变形，它变化的几何形状可能会引起结构的非线性响应。图 1-5 所示的钓鱼杆为几何非线性，在轻微的横向载荷下，杆的端部是极度柔性的，当载荷增加时，杆的几何形状改变（变弯曲）并减少了力臂（由于载荷移动），从而导致杆的刚度在较高载荷下不断增大。

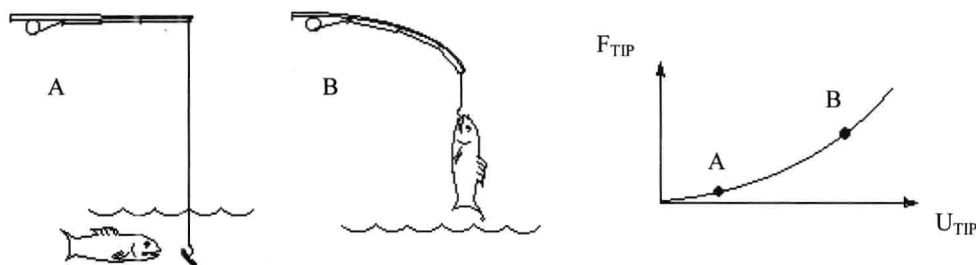


图 1-5 钓鱼杆几何非线性示范

（3）材料非线性。

非线性的应力-应变关系是结构非线性的常见原因。许多因素可以影响材料的应力-应变性质，包括加载历史（如在弹-塑性响应状况下）、环境状况（如温度）、加载的时间总量（如在蠕变响应状况下）。

对于 ANSYS 非线性有限元的结果而言，需要注意的是：①不能使用叠加原理；②结构响应与路径有关，也就是说加载的顺序可能是重要的；③结构响应与施加的载荷可能不成比例。

ANSYS 程序的方程求解器计算一系列的联立线性方程来预测工程系统的响应。然而，非线性结构的行为不能直接用这样一系列的线性方程表示。需要一系列的带校正的线性近似来求解非线性问题。其特点如下：

（1）求解需迭代。

ANSYS 程序的方程求解器计算一系列的联立线性方程来预测工程系统的响应。然而，非线性