中学数学学习指导

高中版

ZHONG XUE SHU XUE XIZHI DAO

主编：何淦涛　张　驰　邱锦泉

气象出版社

中学数学学习指导

（高中）

主　编：何淦涛　张　弛　邱锦泉
副主编：刘祚藩　谢定坤　危恒仁　刘隄坊
编　委：李庆鹏　朱士平　潘正矩　杨　云
郭炳坤　王墨森　王必志　徐更生
主　审：陆海泉　邱锦泉

气象出版社

前　　言

我们奉献给读者的《中学数学学习指导》，是专门为广大中学生编写的一套中学数学优秀文章荟萃。全书内容覆盖面大，论述深刻，作者们根据现行《中学数学教学大纲》及新大纲的精神，注意从中学教学实际出发，选题和举例都源于课本，但又不拘于课本。居高临下地提出问题、引导思考、发展思维。因此，本书对于巩固学生基础知识，加强学生的基本训练，启发学生开拓思路、掌握解题的方法与技巧，具有一定的指导意义和实用价值。

全书分初中、高中两册，可分别供初中、高中各年级学生阅读、参考。为了方便读者使用，《教材梳理》与《解题技巧》两大重点部分基本上按教材顺序编排。

本书的作者、编者大多是全国知名的特级教师、高级教师，其中也编入了部分崭露头角的青年教师的文章。

我们衷心地欢迎广大读者对本书提出宝贵意见。

编　者

1993年10月

目　录

第一部分　思维方法

第二部分　学法指导

第三部分　教材梳理

第四部分　解题技巧

第五部分　智能开发

第一部分　思维方法

学习数学思想方法　提高辩证思维素质

刘隄坊

在数学学习中掌握数学思想方法的辨证关系，对于优化思维品质，提高分析问题和解决问题的能力及形成科学的人生观至关重要。本文仅从一般数学思想方法方面谈谈提高辩证思维素质的问题。

一、分析与综合并进

思维发展心理学认为，任何一个问题的解决要经过求解性思维、上升性思维和决策性思维的过程。解数学题的主要策略之一是分析与综合。分析是执果索因，应侧重于它的探索性与发现性，注意它的启发性和暴露思维过程的特点的发挥。综合是由因导果，应侧重于条理性，强化它的表达求解、论证过程的基本程序。在数学教学中，分析与综合是并进的，相互依赖，相互转化、相互过渡，使问题尽快解决，来实现辩证思维的目的性。

例1　设a、b、c、m、$\in R^+$，且满足$c^m = a^m + b^m$，问m取何值时，以a、b、c为边可构成何种三角形？

显然$m = 1$时，$c = a + b$，a、b、c不构成三角形（决策——综合）；$m = 2$，$c^2 = a^2 + b^2$，可构成直角三角形（回

前)；若用余弦定理$\cos C=(c^2-(a^2+b^2))/2ab=0$，亦可判断$a$，$b$、$c$构成直角三角形（上升——综合）。

由此可见$\cos C<0\Longleftrightarrow c^2<a^2+b^2\Longleftrightarrow c^m<(a^2+b^2)c^{m-2}$ $-c^{m-2})+b^2(b^{m-2}-c^{m-2})<0$（上升——分析）而$c>a$ $c>b$。若$m-2>0$即$m>2$则a、b、c构成钝角三角形（决策——综合）。

同理$1<m<2$时，a、b、c构成锐角三角形（决策—综合）。

二、归纳与演绎并重

归纳与演绎常被人们看成是不相容的认识方法，忽视两者之间的辩证关系．事实上，归纳以演绎为前导，演绎以归纳为基础，它们是互相补充、互为前提、相互渗透、相互促进的．数学概念的形成离不开归纳与演绎，我们就是要启发学生参与形成概念的全过程，以增强学生辩证思维的完整性．

例2　求多项展开式的项数．

由二项式展开的系数为C_n^k，k有$n+1$种取法，即$k=0$，$1,\cdots,n$则二项展开式有C_{n+1}^1项及三项式系数$C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}$当k_1取定时，$C_{n-k_1}^{k_2}$为二项式系数，k_2有$C_{n-k_1+1}^1$种取法，即$k_2=0，1，\cdots，n-k_1$经演绎推理归纳出三项展开式项数为$C_{n+1}^1+C_n^1+\cdots+C_1^1=C_{n+2}^2$．

从而归纳出r项展开式项数为$C_{n+r-1}^{r-2}+C_{n+r-2}^{r-2}$

$$+\cdots+C_{n-2}^{r-2}=C_{n+r-1}^{r-1}．$$

三、抽象到具体

抽象上升到具体及透过现象看本质是由感性认识到理性认识的过程，是辩证法的基本规律，解决数学问题通常是由陌生到熟悉的过程中通过由近及远、由内向外，由表及里，去粗取精，去伪存真的思维方式，达到举一反三、触类旁通的目的，从而发展学生的辩证思维运动性。

例3 已知集合A和B各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数.

（1）$C\subset A\cap B$且C中含有3个元素；

（2）$C\cap A\neq\varnothing$（1986年高考第6题）

此题乍看起来，是一个难于理解的集合问题，但细分析其实质是一个集合符号为外衣的组合问题，即求$A\cap B$的20个元素中每次取出3个且其中至少包含A中1个元素，这样的组合有多少个，因此不难用组合的多种方法来解：

$C_{12}^{3}+C_{12}^{2}\ C_{8}^{1}+C_{12}^{1}\ C_{8}^{2}$或$C_{20}^{3}-C_{8}^{3}$（1084个）.

四、化归与转换相结合

化归法是数学家思维的一种独特方式，在解决许多数学难题过程中，不是对其直接进攻，而是先对问题进行多向的联想与类比，实现一般向特殊（或特殊向一般）、复杂向简单（或简单向复杂）的转换，发展辩证思维的联系性.

例4 设a、b、$\in(0,1)$求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

（1）由左边四个算术平方根的和联想到基本不等式$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$（$x>0$、$y>0$），由此思路可用三角代换$a=\sin^2\alpha$，$b=\cos^2\beta,\alpha$、$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$将原式转化为三角不等式来证明；

再由左边的共同特征$\sqrt{x^2+y^2}$；又联想到复数$x+yi$的模，因此又可用复数模的性质证明；

还可通过平面上两点距离公式，将问题转化成证明平面内点（a、b）到点（0,0）（1,0）、（0,1）、（1,1）四点的距离之和不小于$2\sqrt{2}$；

如能联想到勾股定理，也可将问题转化成四线段之和不小于$2\sqrt{2}$来解决。

五、抓重点与分层次

一个实际问题要构造出数学模型，有时考虑的对象较多，形成较复杂的矛盾，这就要我们抓住主要矛盾和矛盾的主要方面，常用抓重点、选基本元、分类分层逐步突破，从中掌握辩证思维的矛盾性。

六、发散与收敛、分（解）与合（成）统一

数学问题中的一题多解、一题多变、一法多用是一种狭义的发散与收敛，从广义上讲，在思考任何一个问题时，首先都有一个发散过程（分），继而是通过汇聚检索到收敛（合）过程，在这个过程中，一方面可以培养辩证思维的批判性，寻求最佳途径，达到问题解决，另一方面可以提高思维的探索性，求得问题深化。

例 5 设A、B、C为三角形的内角，求证$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

笔者曾以此题对学生进行发散性思维训练至少找出了十种证法，然后分析综合，比较理想的（适合中学生的）有六种（详见《高中生语数外》1988第5期），作进一步探索：

（1）在分析、综合、判别式等证法中，考虑将条件推广到$A+B+C=n\pi$（$n\in Z$）的情形：当$n=4m+1$（$m\in Z$）时，结论仍然成立；当$n=4m+3$（$m\in Z$）时$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant-\frac{1}{8}$.

（2）在替换法中，因$A+B+C=\pi$，则$(\pi-2A)+(\pi-2B)+(\pi-2C)=\pi$，从而有$\sin\frac{\pi-2A}{2}\sin\frac{\pi-2B}{2}\sin\frac{\pi-2C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$即$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$.

同理$[(4n+1)\pi-2(4n+1)A]+[(4n+1)\pi-2(4n+1)B]+[(4n+1)\pi-2(4n+1)C]=(4n+1)\pi$，则$\cos(4n+1)A\cos(4n+1)B\cos(4n+1)C\leqslant\frac{1}{8}$.

（3）作三角变换，不难得出一系列新的不等式

1. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

则$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$，

2. $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$，则

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$,

3. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

则$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4}$.

进一步研究数学思想方法中辩证思维是加快和深化数学教学改革，提高数学教学质量的需要，有待于我们在教育改革中作广泛深入的探究.

浅淡数学解题思维策略的分类与应用

郭炳坤

数学解题的思维策略，是指解决数学问题的人为实现解题目标而采取的最佳方针、方式和方法. 研究表明：学生解决数学问题技能，是随着一系列数学思维策略的运用而发展提高的. 那么解决数学问题应遵循哪些最基本的思维策略，这些思维策略包括哪些常用的数学方法，在解题中又会起什么作用呢？

一、升格策略揭示问题本质

根据数学问题的特点把一维转向多维，形象化问题转向抽象化问题，局部性问题转化为整体性问题，常量问题转化为变量问题等，都是升格思维在数学中的体现，其关键是按照问题的原型构造恰当的数学模型. 可用下图表示：

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{原问题}A} \arrow[r] & \boxed{A\text{的数学模型}B} \arrow[r] & \boxed{B\text{的数学结果}} \arrow[d, "\text{还原}"] \\
& A\text{的解答} \arrow[ull] & \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

例 1　求证$\sqrt{1992} < \sqrt[1992]{1992!}$

分析　按习惯证明方法，不论怎样进行都比较麻烦．根据问题的特点，我们来考察，$(n!)^2 = n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^2 \cdots \cdots 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (1-n) \cdot 2(n-2) \cdots \cdots k(n-k+1) \cdots \cdots \cdots n \cdot 1$ 再看$k(n-k+1)-n=(n-k)(k-1)$，当$n>k\geqslant 2$时，$(n-k)(k-1)>0$，即$k(n-k+1)>n$。当k取2、3、……、$n-1$时，可推得$(n!)^2>n^2$，两边开$2n$次方得$\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$．

这不仅轻松地获得了原问题的解，更重要的是得到了求解的一般结论，实属一举两得．

二、降格策略探求解题方法

降格策略，指人们对复杂、抽象和一般性的事物一时认识不清楚，暂退到简单、形象、具体但仍能保持事物特征的情态、探求事物规律或关系的一种策略．

降格策略反映在数学中的数学方法常有：尝试探索法，经验归纳法，递归法、降维法，特殊（例）法，变量问题常量法等等．利用降格思维策略，辅之于具体的数学方法，有助于我们从特殊性认识普遍性，发现一般问题的规律，找到解决问题的途径，发现证明问题的方法．

例 2　设k是给定的正整数，求证不等式$|x|+|y|<k$的整数解的组数为$2k^2-2k+1$．

分析 字母k较抽象，给证明带来困难，为了探索证明方法，给$k=1$、2、3.

当$k=1$时，不等式只有$x=y=0$一组整数解.

当$k=2$时，不等式只有$x=0$时$y=0$，$y=\pm1$和$x=\pm1$时，$y=0$五组整数解.

当$k=3$时，不等式只有$x=0$时$y=0$，$y=\pm1$，$y=\pm2$；$x=\pm1$时，$y=0$，$y=\pm1$和$x=\pm2$时，$y=0$十三组整数解，而$k=1$、2、3时$2k^2-2k+1$分别为1、5、13、与命题吻合. 这就启发我们为找各组整数解提供途径. 于是，不等式的整数解为：

$x=0$时，$y=0$，$y=\pm1\cdots\cdots\pm(k-1)$有$2k-1$组

$x=\pm1$时，$y=0$，$y=\pm1\cdots\cdots\pm(k-2)$有$2(2k-3)$组……

$x=\pm(k-2)$时，$y=0$，$y=\pm1$ 有2×3组

$x=\pm(k-1)$时，$y=0$ 有2×1组

因此原不等式的整数解共有$2k-1+2[(2k-3)+(2k-5)+\cdots+3+1]=\cdots\cdots=2k^2-2k+1$组整数解.

三、更格策略使问题化难为易

更格策略，是指保持数学的某些不变条件，改变信息形态，借以解决数学问题的一种策略。这种策略是为解决数学问题提供了化难为易，化繁为简的基本途径。常用到的数学方法有换元法、数形转化法、关系映射反演法、几何图旋转、平移、投影、对称变换等.

例3 （如图所示）有一长m米，宽n米（m，n均为大于1的整数）的矩形，某人沿着宽一米的“带形”中心线按

箭头所指方向走完共走了多少米？

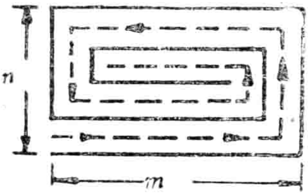

图1－01

分析　此题按常规方法就是把“带形”的长度分成几个等差数列的求和，由于题设条件抽象，难以找出相关元素的数量关系，若将问题进行变更，建立长度与面积的对应关系，将其转化到矩形有多少平方米，此人就走了多少米（$m\times n$米）。问题到此使人有山穷水尽到柳暗花明之感。

四、分格策略　将问题各个击破

分格策略，就是把综合性较强结构复杂的数学问题分解成若干个子问题，通过解决若干个子问题从而达到解决问题整体的一种策略。

分格策略的常规数学方法有分解法（数、式分解；图形分解）、分类辨析法、分域讨论法、枚举法等。

例4　已知$x\in R$，求证$f(x)=x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

分析　由于x的分域“广阔”，所以必须根据$f(x)$中偶次幂前面是“+”号，奇次幂前是“－”号的特点，采取分步“过关”。（1）当$x\leqslant 0$时$f(x)>0$。（2）当$x\geqslant 1$时$x^{12}\geqslant x^9$。$x^{12}-x^9\geqslant 0$，同理$x^4-x\geqslant 0$，$\therefore$ $f(x)>0$。（3）当$0<x<1$时，$x^4>x^9$，$x^4-x^9>0$，$1-x>0$，$f(x)=x^{12}+(x^4-x^9)+(1-x)>0$。而$\{x\mid x\leqslant 0\}\cup\{x\mid 0<x<1\}\cup\{x\mid\geqslant 1\}=R$。　$\therefore$ 当$x\in R$，总有$f(x)>0$。

五、逆格策略　变问题一蹴而就

逆格策略，就是在研究问题的过程中，去进行与习惯性思维完全相反的探索。即顺推不行就考虑逆推，直接解决不易就考虑间接解决；利用可能考虑问题困难就研究问题的不可能性。

例 5　当n，k都是给定的正整数，且$n>2$。当$k>2$时$n(n-1)^{k-1}$可以写成几个连续偶数的和。

分析　若直接将$n(n-1)^{k-1}$分成怎样的几个连续偶数和显然是一筹莫展。我们不妨设n个连续偶数为$2n$，$2n+2$，……$2a+2(n-1)$，且其和为$n[2a+(n-1)]$，令$n(n-1)^{k-1}=[2a+(n-1)]n$，则$a=\frac{1}{2}(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]$，只要证明$a$为正整数就行（易证从略），所以$n(n-1)^{k-1}$可以分成以$(n-1)[(n-1)^{k-1}]$为首项的$n$个连续偶数之和。

最后值得说明的是：要运用这些思维策略达到有效地解决数学问题的目的，必须具有较为扎实的数学基础知识和基本技能、丰富的解题实践经验及综合运用这些思维策略的机智。并遵循其熟悉化、简单化、具体化、和谐化的策略原则。在此不一一赘述。

（原载《数理天地》（高中版）1993年第4期）

探　求　法　举　隅

张　弛　郑新民

探求法是一种思维方法，它包括两层意思，其一是试探一下；其二是假设成立，会怎么样？

一、规律探求

例1　问：$1!+2!+3!+\cdots+1987!$ 的个位数值是几？

试探一下。

对自然数的阶乘作数字试探：

$1!=1$，$2!=2$，$3!=6$，$4!=24$，$5!=120$，$6!=720\cdots$发现规律，当$n\geqslant 5$时，$n!$ 的个位数值是零。

在求数列的通项公式的过程中也经常采用探求法。探求就是分析，思维观察，发现规律的过程。

二、构造探求

例2　假设梯形的腰$AB=AD+BC$，则$\angle A$，$\angle B$的平分线必相交于另一腰上。

试探　分别取AB，CD的中点F、E，连结EF，AE，BE。

$$\because\quad EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}AB=AF=BF,$$

$\therefore\quad \angle 1=\angle 5$，$\angle 3=\angle 6$。

$\therefore\quad AD\parallel FE\parallel BC$，

$\therefore\quad \angle 5=\angle 2$，$\angle 6=\angle 4$。

则$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。

$\therefore\quad \angle A$，$\angle B$的平分线交于CD之中点E。

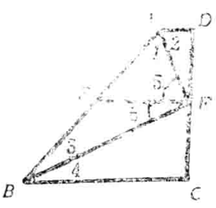

图1－02

由此可知此题取特殊点进行试探一举成功。除此以外，还可构造图形，方程，不等式，函数来