



全国高职高专教育精品规划教材

计算机 数学基础

JISUANJI SHUXUE JICHU

主编◎赵永建 方晓华



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

全国高职高专教育精品规划教材

计算机数学基础

主 编	赵永建	方晓华	
副主编	杜凤英	胡晓飞	韦 渤
参 编	胡英武	曹鸷鹑	王金生
	张向平	王昌贵	付宏伟
	罗 飞	潘天娟	

北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是根据高等职业技术教育教学的要求,结合当前高职高专院校计算机类专业对高等数学教学内容的需求而编写的。全书共分10章,内容包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,多元函数微积分,线性代数初步,图论, MATLAB 数学实验。

本书取材注意从实际问题出发,配有大量专业及生活案例,突出数学思想方法及数学应用教学。

本书适合作为高职高专院校计算机专业及其他工科专业的教材,也可作为广大自学者及工程技术人员的参考用书。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/赵永建,方晓华主编. — 北京:北京交通大学出版社,2011.9
(全国高职高专教育精品规划教材)

ISBN 978 - 7 - 5121 - 0760 - 1

I. ①计… II. ①赵… ②方… III. ①电子计算机 - 数学基础 - 高等职业教育 - 教材
IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 189685 号

责任编辑:薛飞丽

出版发行:北京交通大学出版社

电话:010-51686414

北京市海淀区高粱桥斜街44号

邮编:100044

印刷者:北京泽宇印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印张:18.5 字数:450千字

版 次:2011年9月第1版 2011年9月第1次印刷

书 号:ISBN 978 - 7 - 5121 - 0760 - 1/TP·668

印 数:1~4000册 定价:33.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

全国高职高专教育精品 规划教材丛书编委会

主任：曹 殊

副主任：武汉生（西安翻译学院）

朱光东（天津冶金职业技术学院）

何建乐（绍兴越秀外国语学院）

文晓璋（绵阳职业技术学院）

梅松华（丽水职业技术学院）

王 立（内蒙古建筑职业技术学院）

文振华（湖南现代物流职业技术学院）

叶深南（肇庆科技职业技术学院）

陈锡畴（郑州旅游职业学院）

王志平（河南经贸职业学院）

张子泉（潍坊科技职业学院）

王法能（青岛黄海学院）

邱曙熙（厦门华天涉外职业技术学院）

逯 侃（步长集团陕西国际商贸学院）

委员：黄盛兰（石家庄职业技术学院）

张小菊（石家庄职业技术学院）

邢金龙（太原大学）

孟益民（湖南现代物流职业技术学院）

周务农（湖南现代物流职业技术学院）

周新焕（郑州旅游职业学院）

成光琳（河南经贸职业学院）

高庆新（河南经贸职业学院）

李玉香（天津冶金职业技术学院）

邵淑华（德州科技职业学院）

刘爱青（德州科技职业学院）

宋立远（广东轻工职业技术学院）

孙法义（潍坊科技职业学院）

颜 海（武汉生物工程学院）

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分,其根本任务是培养生产、建设、管理和
服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的应用型专门人才,所培养的学生在掌握必要的
基础理论和专业知识的基础上,应重点掌握从事本专业领域实际工作的基础知识和职业技
能,因此与其对应的教材也必须有自己的体系和特点。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教育改革和教材建设的需要,在教育部的指导
下,我们在全国范围内组织并成立了“全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会”
(以下简称“教材研究与编审委员会”)。“教材研究与编审委员会”的成员所在单位皆为教
学改革成效较大、办学实力强、办学特色鲜明的高等专科学校、成人高等学校、高等职业学
校及高等院校主办的二级职业技术学院,其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术
学院。

为了保证精品规划教材的出版质量,“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“全
国高职高专教育精品规划教材编审委员会”(以下简称“教材编审委员会”)成员和征集教
材,并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线
的优秀教师和专家。此外,“教材编审委员会”还组织各专业的专家、教授对所征集的教材
进行评选,对所列选教材进行审定。

此次精品规划教材按照教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”而编写。
此次规划教材按照突出应用性、针对性和实践性的原则编写,并重组系列课程教材结构,力
求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向;反映当前教学的新内容,突出基础理论知
识的应用和实践技能的培养;在兼顾理论和实践内容的同时,避免“全”而“深”的面面俱
到,基础理论以应用为目的,以必要、够用为尺度;尽量体现新知识和新方法,以利于学生
综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外,为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性,我们真心希望全国从事
高职高专教育的院校能够积极参与到“教材研究与编审委员会”中来,推荐有特色、有创
新的教材。同时,希望将教学实践的意见和建议及时反馈给我们,以便对出版的教材不断修
订、完善,不断提高教材质量,完善教材体系,为社会奉献更多、更新的与高职高专教育配
套的高质量教材。

此次所有精品规划教材由全国重点大学出版社——北京
交通大学出版社出版。适合于各类高等专科学校、成人高等
学校、高等职业学校及高等院校主办的二级技术学院使用。

全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会
2011年8月

总 序

历史的年轮已经跨入了公元 2011 年,我国高等教育的规模已经是世界之最,2010 年毛入学率达到 26.5%,属于高等教育大众化教育阶段。根据教育部 2006 年第 16 号《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》等文件精神,高职高专院校要积极构建与生产劳动和社会实践相结合的学习模式,把工学结合作为高等职业教育人才培养模式改革的重要切入点,带动专业调整与建设,引导课程设置、教学内容和教学方法改革。由此,高职高专教学改革进入了一个崭新阶段。

新设高职类型的院校是一种新型的专科教育模式,高职高专院校培养的人才应当是应用型、操作型人才,是高级蓝领。新型的教育模式需要我们改变原有的教育模式和教育方法,改变没有相应的专用教材和相应的新型师资力量的现状。

为了使高职院校的办学有特色,毕业生有专长,需要建立“以就业为导向”的新型人才培养模式。为了达到这样的目标,我们提出“以就业为导向,要从教材差异化开始”的改革思路,打破高职高专院校使用教材的统一性,根据各高职高专院校专业和生源的差异性,因材施教。从高职高专教学最基本的基础课程,到各个专业的专业课程,着重编写出实用、适用高职高专不同类型人才培养的教材,同时根据院校所在地经济条件的不同和学生兴趣的差异,编写出形式活泼、授课方式灵活、满足社会需求的教材。

培养的差异性是高等教育进入大众化教育阶段的客观规律,也是高等教育发展与社会发展相适应的必然结果。只有使在校学生接受差异性的教育,才能充分调动学生浓厚的学习兴趣,才能保证不同层次的学生掌握不同的技能专长,避免毕业生被用人单位打上“批量产品”的标签。只有高等学校的培养有差异性,其毕业生才能有特色,才会在就业市场具有竞争力,从而使高职高专的就业率大幅度提高。

北京交通大学出版社出版的这套高职高专教材,是在教育部“十一五规划教材”所倡导的“创新独特”四字方针下产生的。教材本身融入了很多较新的理念,出现了一批独具匠心的教材,其中,扬州环境资源职业技术学院的李德才教授所编写的《分层数学》,教材立意新颖,独具一格,提出以生源的质量决定教授数学课程的层次和级别。还有无锡南洋职业技术学院的杨鑫教授编写的一套《经营学概论》系列教材,将管理学、经济学等不同学科知识融为一体,具有很强的实用性。

此套系列教材是由长期工作在第一线、具有丰富教学经验的老师编写的,具有很好的指导作用,达到了我们所提倡的“以就业为导向培养高职高专学生”和因材施教的目标要求。

教育部全国高等学校学生信息咨询与就业指导中心择业指导处处长

中国高等教育学会毕业生就业指导分会秘书长

曹 殊 研究员

前 言

本教材是根据教育部“高职高专教育专业人才培养目标及规格”和“高职高专教育基础课程教学基本要求”，结合当前高职高专院校高等数学课程改革的实际，在我们编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材（《高等数学》（理工科用）第2版，机械工业出版社，已发行13万余册）的基础上编写的高职高专类数学教材。

编写时从高职高专的实际出发，以培养应用型人才为目标，借鉴数学建模在提高学生综合能力和素质方面的成功经验，将数学基本知识、数学建模和数学实验有机融合。具体如下。

1. 精简内容、降低难度、突出应用、合理衔接。删去不必要的逻辑推导；强化基本概念的教学；淡化数学技巧的训练；突出应用能力的培养。在解决应用问题时，努力培养学生将实际问题抽象成数学模型的能力。并在充分了解中学数学教材及教学状况的基础上，将相关内容与中学知识进行合理地衔接，更突出了学习数学的应用性目的。

2. 突破传统的教学编排体系，形成知识的“正迁移”，符合高职学生的认知规律。

3. 直观性、通俗性。本书大量使用数表、图形、标注，使教材清晰、直观，浅显易懂。由于本书是通过实际问题来说明数学思想方法的，所以它比抽象的叙述要丰富、具体，而且易为读者接受。对重要的概念或疑难的问题，书中多处用“注意”来补充说明，这对于数学基础知识较欠缺的高职学生来说无疑会大有帮助。

4. 融入信息技术。结合常用工具软件 Excel 对部分问题进行求值、作图及回归分析；用 MATLAB 进行数学实验，以提高学生利用现代信息技术求解数学问题及解决实际问题的能力。

全书由方晓华统稿。

限于编者水平，加之时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编 者

2011 年 8 月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	(1)
1.1 函数、方程与数学模型	(1)
1.1.1 函数的概念	(1)
1.1.2 函数的几种特性	(4)
1.1.3 反函数与反三角函数	(6)
1.1.4 初等函数	(8)
1.1.5 方程与函数	(9)
1.1.6 数学模型	(12)
习题 1-1	(15)
1.2 极限的概念	(16)
1.2.1 数列的极限	(17)
1.2.2 函数的极限	(18)
1.2.3 无穷小与无穷大	(20)
习题 1-2	(22)
1.3 极限的运算	(23)
1.3.1 极限运算法则	(23)
1.3.2 两个重要极限	(25)
1.3.3 无穷小的比较	(28)
习题 1-3	(29)
1.4 函数的连续性	(30)
1.4.1 函数的连续性的概念	(30)
1.4.2 函数的间断点及分类	(32)
1.4.3 闭区间上连续函数的性质	(33)
习题 1-4	(33)
复习题 1	(34)
第 2 章 导数与微分	(37)
2.1 导数的概念	(37)
2.1.1 导数的定义	(37)
2.1.2 可导与连续的关系	(43)
习题 2-1	(44)
2.2 导数的运算	(45)
2.2.1 函数四则运算的求导法则	(46)
2.2.2 复合函数的求导法则	(48)
2.2.3 隐函数的求导法	(50)
2.2.4 由参数方程所确定的函数的求导法	(52)

2.2.5 高阶导数	(52)
习题 2-2	(53)
2.3 微分的概念	(54)
2.3.1 微分的定义	(54)
2.3.2 微分公式和微分的运算法则	(55)
2.3.3 微分在近似计算中的应用	(57)
习题 2-3	(58)
复习题 2	(59)
第 3 章 导数的应用	(62)
3.1 函数的单调性及凹凸性	(62)
3.1.1 拉格朗日中值定理	(62)
3.1.2 函数的单调性	(63)
3.1.3 函数的凹凸性	(64)
习题 3-1	(66)
3.2 函数的极值与最值	(67)
3.2.1 函数的极值及其求法	(67)
3.2.2 函数的最大值和最小值	(68)
习题 3-2	(70)
3.3 洛必达法则	(71)
3.3.1 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(71)
3.3.2 可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(72)
习题 3-3	(73)
3.4 曲率	(73)
3.4.1 弧微分	(73)
3.4.2 曲率及其计算公式	(74)
3.4.3 曲率圆与曲率半径	(75)
习题 3-4	(77)
复习题 3	(77)
第 4 章 不定积分	(79)
4.1 不定积分的概念和性质	(79)
4.1.1 原函数的概念	(79)
4.1.2 不定积分的定义	(79)
4.1.3 不定积分的几何意义	(80)
4.1.4 不定积分的性质	(80)
4.1.5 基本积分公式	(81)
4.1.6 直接积分法	(81)
习题 4-1	(83)
4.2 换元积分法	(83)
4.2.1 第一类换元积分法	(84)

4.2.2 第二类换元积分法	(87)
习题 4-2	(88)
4.3 分部积分法	(89)
习题 4-3	(91)
复习题 4	(91)
第 5 章 定积分及其应用	(93)
5.1 定积分的概念	(93)
5.1.1 定积分的定义	(96)
5.1.2 定积分的几何意义	(97)
5.1.3 定积分的性质	(97)
习题 5-1	(99)
5.2 微积分基本公式	(99)
5.2.1 变上限积分函数及性质	(99)
5.2.2 微积分基本公式	(100)
习题 5-2	(101)
5.3 定积分的积分法	(101)
5.3.1 定积分的换元积分法	(101)
5.3.2 定积分的分部积分法	(103)
习题 5-3	(104)
5.4 广义积分	(104)
5.4.1 无穷区间上的广义积分	(104)
5.4.2 无界函数的广义积分	(106)
习题 5-4	(107)
5.5 定积分的几何应用举例	(107)
5.5.1 微元法	(107)
5.5.2 平面图形的面积	(108)
5.5.3 立体的体积	(110)
5.5.4 平面曲线的弧长	(111)
习题 5-5	(112)
5.6 定积分的物理应用举例	(113)
5.6.1 变力做功	(113)
5.6.2 液体的压力	(114)
5.6.3 平均值和方均根	(114)
习题 5-6	(116)
复习题 5	(116)
第 6 章 常微分方程	(119)
6.1 微分方程的基本概念	(119)
习题 6-1	(121)
6.2 一阶微分方程	(121)
6.2.1 可分离变量的微分方程	(121)
6.2.2 一阶线性微分方程	(124)

习题 6-2	(127)
6.3 二阶常系数线性微分方程	(127)
6.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程	(128)
6.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	(131)
习题 6-3	(133)
复习题 6	(134)
第 7 章 多元函数微积分	(136)
7.1 空间解析几何简介	(136)
7.1.1 空间直角坐标系	(136)
7.1.2 空间曲面	(137)
习题 7-1	(139)
7.2 多元函数的概念	(139)
7.2.1 多元函数的定义	(139)
7.2.2 二元函数的几何意义	(141)
习题 7-2	(141)
7.3 偏导数与全微分	(142)
7.3.1 偏导数的概念	(142)
7.3.2 高阶偏导数	(144)
习题 7-3	(145)
7.4 全微分的概念	(145)
7.4.1 全微分的定义	(145)
7.4.2 全微分在近似计算中的应用	(147)
习题 7-4	(148)
7.5 多元函数的求导法则	(149)
7.5.1 多元复合函数的求导法则	(149)
7.5.2 隐函数的求导法则	(151)
习题 7-5	(152)
7.6 多元函数的极值	(153)
7.6.1 二元函数极值的概念	(153)
7.6.2 二元函数极值的判别法	(153)
7.6.3 条件极值	(155)
7.6.4 最小二乘法	(156)
习题 7-6	(157)
7.7 二重积分	(158)
7.7.1 二重积分的概念和性质	(158)
7.7.2 二重积分的计算	(160)
习题 7-7	(167)
复习题 7	(167)
第 8 章 线性代数初步	(170)
8.1 行列式的概念及性质	(170)
8.1.1 二阶和三阶行列式	(170)

8.1.2	n 阶行列式	(172)
8.1.3	行列式的性质	(174)
8.1.4	克莱姆法则	(177)
	习题 8-1	(178)
8.2	矩阵的概念与运算	(180)
8.2.1	矩阵的定义	(180)
8.2.2	矩阵的线性运算	(182)
8.2.3	矩阵的乘法运算	(184)
8.2.4	矩阵的转置运算	(187)
	习题 8-2	(188)
8.3	逆矩阵	(189)
8.3.1	逆矩阵的概念及性质	(189)
8.3.2	逆矩阵的求法及应用	(190)
	习题 8-3	(192)
8.4	矩阵的初等变换与秩	(193)
8.4.1	矩阵的初等变换	(193)
8.4.2	矩阵的秩	(194)
	习题 8-4	(196)
8.5	线性方程组	(196)
8.5.1	消元法	(196)
8.5.2	一般线性方程组的求解问题	(198)
	习题 8-5	(201)
	复习题 8	(202)
第 9 章	图论	(204)
9.1	图的基本概念	(205)
9.1.1	图的概念	(205)
9.1.2	关联与相邻	(206)
9.1.3	顶点的度数	(206)
9.1.4	多重图与简单图	(207)
9.1.5	完全图	(208)
9.1.6	子图与补图	(208)
9.1.7	图的同构	(209)
	习题 9-1	(209)
9.2	通路、回路、图的连通性	(211)
9.2.1	通路与回路	(211)
9.2.2	图的连通性	(212)
	习题 9-2	(213)
9.3	图的矩阵表示	(214)
9.3.1	无向图的关联矩阵	(214)
9.3.2	有向图的关联矩阵	(215)
9.3.3	有向图的邻接矩阵	(216)

9.3.4 无向简单图的邻接矩阵	(217)
9.3.5 有向图的可达矩阵	(217)
习题 9-3	(218)
9.4 最短路径问题	(218)
习题 9-4	(221)
9.5 树	(221)
9.5.1 无向树及生成树	(221)
9.5.2 根树及其应用	(224)
习题 9-5	(227)
复习题 9	(228)
第 10 章 MATLAB 数学实验	(231)
10.1 MATLAB 基本操作	(231)
10.1.1 MATLAB 的安装与启动	(231)
10.1.2 命令窗口	(232)
10.1.3 MATLAB 窗口操作命令	(234)
10.1.4 常量与变量、函数	(234)
10.1.5 M 文件	(236)
10.2 函数运算与作图	(237)
10.2.1 函数运算	(237)
10.2.2 函数作图	(238)
10.3 微积分的常用符号运算	(242)
10.3.1 求函数的极限	(242)
10.3.2 导数和微分计算	(243)
10.3.3 求一元函数的最值	(246)
10.3.4 积分	(246)
10.3.5 级数	(247)
10.4 符号方程(组)的求解	(248)
10.4.1 代数方程的求解	(248)
10.4.2 常微分方程	(249)
10.5 矩阵运算及解线性方程组	(250)
10.5.1 矩阵运算	(250)
10.5.2 解线性方程组	(252)
复习题 10	(254)
附录 A 基本初等函数的图形及主要性质	(256)
附录 B 初等数学常用公式	(258)
附录 C 希腊字母	(263)
附录 D 习题参考答案	(264)
参考文献	(281)

第 1 章 函数、极限与连续

函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型,是数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.

1.1 函数、方程与数学模型

1.1.1 函数的概念

在研究某一过程中,往往会发现多个变量同时发生变化,而且它们的变化不是孤立的,而是按照一定的规律相互联系着,这就说明它们之间存在着相互依赖的关系.

例 1.1 [自由落体运动] 某物体做自由落体运动,经过 2 s 落到地面,物体的下降距离 h (单位: m) 随下落时间 t (单位: s) 的运动规律为

$$h = 4.9t^2 \quad (1-1)$$

下落时间 t 的变化范围是数集 $A = \{t | 0 \leq t \leq 2\}$, 下降距离 h 的变化范围是数集 $B = \{h | 0 \leq h \leq 19.6\}$. 由题可知,对于数集 A 中的任意一个时间 t , 按照对应关系式 (1-1), 在数集 B 中都有唯一确定的距离 h 和它对应.

例 1.2 [股价走势曲线] 图 1-1 所示是沪市股票“冠农股份”在 2011 年 4 月 20 日的股价分时图,最高股价是 30.42 元,最低股价是 29.01 元,沪市交易时间是上午 9:30—11:30,下午 13:00—15:00.

这里,时间 t 的变化范围是数集 $A = \{t | 9:30 \leq t \leq 11:30\} \cup \{t | 13:00 \leq t \leq 15:00\}$, 股票价格 y 的变化范围是数集 $B = \{y | 29.01 \leq y \leq 30.42\}$. 由题可知,对于数集 A 中的任意一个时间 t , 按照图中曲线,在数集 B 中都有唯一确定的股价和它对应.

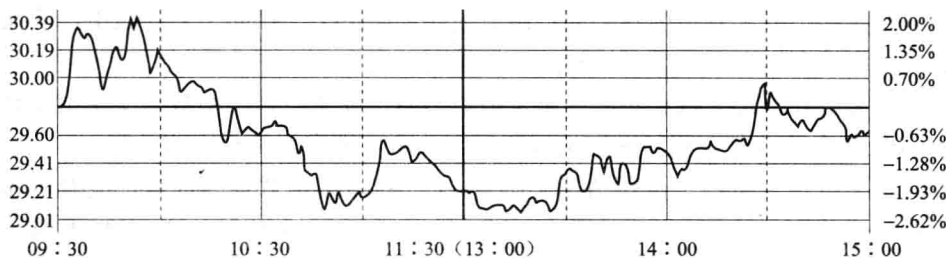


图 1-1 股价走势曲线

例 1.3 [恩格尔系数] 国际上常用恩格尔系数反映了一个国家人民生活质量的高低,恩格尔系数越低,生活质量越高. 表 1-1 中是恩格尔系数随时间(年)变化的情况.

$$\text{恩格尔系数} = \frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}}$$

表 1-1 2000—2009 年我国城镇居民恩格尔系数变化情况

时间/年	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
城镇居民家庭恩格尔系数/%	39.4	38.2	37.7	37.1	37.7	36.7	35.8	36.3	37.9	36.5

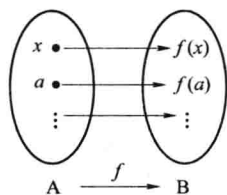
以上 3 个实例中变量之间的关系用数学语言描述出来就得到了函数的定义.

定义 1.1 设在某个变化过程中有两个变量 x 与 y , 如果对于 x 在其变化范围内的每一个数值, 变量 y 都有唯一确定的数值和它对应, 那么称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 又称 x 为自变量, y 为因变量.

函数是不断发展的一个数学概念, 定义 1.1 是函数的早期定义, 它用于描述变量间的相依关系, 比较方便, 至今仍采用, 但是它的缺陷在于函数与因变量这两个概念混淆不清, 也不便于函数概念的推广. 随着集合概念的出现和对函数研究的深入, 提出如下函数定义.

定义 1.2 设 A 、 B 是非空实数集合, 如果按照某种确定的对应关系 (也称对应规则或对应法则) f , 使对于集合 A 中的任意一个 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应, 则称 f 为集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in A$$



其中, x 称为自变量, 其变化范围 A 称为函数的定义域, 记作 $D(f)$; 与 x 对应的 y 值称为函数值, 也称因变量; 函数值的取值范围, 即数集 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 称为函数 f 的值域, 记作 $R(f)$, 显然 $R(f) \subseteq B$.

函数 f 可用图 1-2 来描述.

图 1-2 函数

如果 x_0 是一个确定的数, 则 $f(x_0)$ 表示当自变量 x 取 x_0 时 (常常表述为“在点 x_0 处”) 的函数值, 也可记作 $y|_{x=x_0}$.

表示函数的记号是可以任意选取的, 除了常用的 f 外, 还可使用其他的英文字母或希腊字母, 如“ g ”, “ F ”, “ φ ”等. 相应的, 函数可记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作 $y = y(x)$. 在同一个问题中, 涉及几个不同的函数时, 为了表示区别, 需用不同的记号来表示它们.

由函数定义可知, 定义域和对应关系是函数的两个要素, 一个函数与变量用什么字母表示无关. 如果两个函数具有相同的定义域和对应关系, 则它们是相同的函数.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: ① 对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定, 如例 1.1 中函数 $h = 4.9t^2$ 的定义域为 $t \in [0, 2]$; ② 对抽象地用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为函数的自然定义域, 若不考虑问题的背景, 函数 $h = 4.9t^2$ 的自然定义域则为 $t \in [-\infty, +\infty]$, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是开区间 $(-1, 1)$.

表示函数有 3 种方法, 分别为解析法 (例 1.1)、图形法 (例 1.2) 和列表法 (例 1.3), 其中, 用图形法表示函数是基于函数图形的概念, 即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 的图形 (图 1-3), 图中的 $R(f)$ 表示函数 $y = f(x)$ 的值域. 通常, 函数 f 的图形是坐标平面 xOy 上的曲线.

例 1.4 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{\ln(2-x)};$$

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-3, 7]$, 求 $f(2x+1)$ 的定义域.

解 (1) 要使函数 y 有意义, 必须满足

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ \ln(2-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

所以函数的定义域为: $D = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

(2) 要使函数 $f(2x+1)$ 有意义, 必须满足

$$-3 \leq 2x+1 \leq 7, \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

即 $f(2x+1)$ 的定义域为: $D = [-2, 3]$.

例 1.5 [个人所得税] 2011 年 6 月 30 日, 十一届全国人大常委会第二十一次会议通过了修改个人所得税法的决定, 2011 年 9 月 1 日开始将工资薪金免征额 (起征点) 由每月 2 000 元上调至每月 3 500 元 (3 500 元是指扣除“三险一金”后的收入, 即工薪收入 4 545 元以下不用缴个税), 税率结构由 9 级累进税率调整为 7 级累进税率.

工资、薪金所得是指个人因任职或受雇而取得的工资、薪金、奖金、年终加薪、劳动分红、津贴、补贴以及与任职、受雇有关的其他所得. 表 1-2 是工资薪金个人所得税率计算表, 计算公式为:

$$\text{个人所得税应纳税额} = \text{应纳税所得额} \times \text{适用税率} - \text{速算扣除数}$$

试用数学方法对前三级的计算加以解释.

表 1-2 个人所得税率计算表

级数	应纳税所得额	税率/%	速算扣除数
1	不超过 1 500 元的部分	3	0
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10	105
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20	555
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25	1 005
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30	2 755
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35	5 505
7	超过 80 000 元的部分	45	13 505

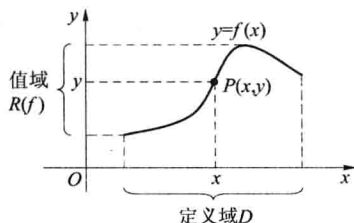


图 1-3 函数的图形表示法

解 设某人月收入(除去“三险一金”)为 x 元, 个人所得税应纳税额为 y 元.

当 $0 \leq x \leq 3500$ 时, $y = 0$

当 $3500 < x \leq 5000$ 时, $y = (x - 3500) \times 3\%$

当 $5000 < x \leq 8000$ 时,

$$y = 1500 \times 3\% + (x - 3500 - 1500) \times 10\% = (x - 3500) \times 10\% - 105$$

当 $8000 < x \leq 13500$ 时,

$$\begin{aligned} y &= 1500 \times 3\% + (4500 - 1500) \times 10\% + (x - 3500 - 4500) \times 20\% \\ &= (x - 3500) \times 20\% - 555 \end{aligned}$$

“三险一金”指基本养老保险、医疗保险、失业保险及住房公积金

从而

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 3500 \\ (x - 3500) \times 3\%, & 3500 < x \leq 5000 \\ (x - 3500) \times 10\% - 105, & 5000 < x \leq 8000 \\ (x - 3500) \times 20\% - 555, & 8000 < x \leq 13500 \end{cases}$$

例 1.5 中的一个函数用几个式子表示, 这种在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数通常称为**分段函数**. 分段函数在工程技术中经常出现, 须注意分段函数表示的是一个函数, 而不是几个函数, 它的定义域是各段自变量取值集合的并. 常用的绝对值函数可以表示为

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

例 1.6 [开关函数] 赫维赛德函数 H 定义如下:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

它被用在电路的研究中, 用来表示电闸接通的瞬时电路中电流或电压的突然变动, 也称为开关函数(见图 1-4).

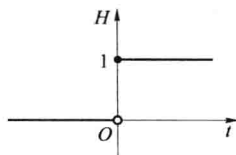


图 1-4 开关函数

例 1.7 设函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

(1) 求 $f(-1)$, $f(2)$;

(2) 求该函数的定义域并作图.

解 (1) 因为 $-1 \in (-\infty, 0)$, 所以 $f(-1) = 3 \times (-1) = -3$;

而 $2 \in (0, 2]$, 则 $f(2) = 2^2 + 1 = 5$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2]$, 函数图形如图 1-5 所示.

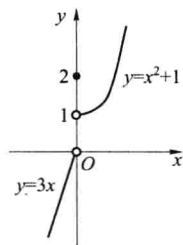


图 1-5 例 1.7 图

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称