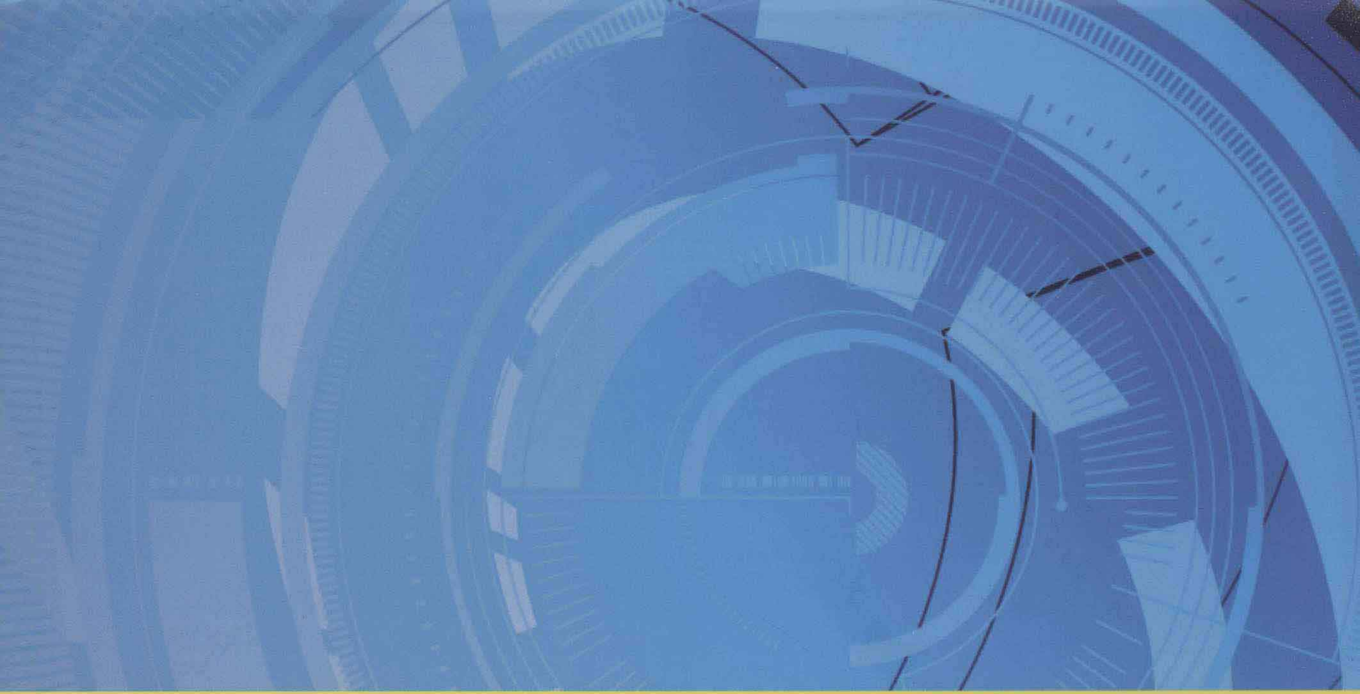

# 大学物理学习指导

DAXUE WULI XUEXI ZHIDAO


主　编　臧涛成　马春兰　程新利

编　者　葛丽娟　毛红敏　时善进

孙　坚　王　艺



苏州大学出版社

# 大学物理学习指导

主　编　臧涛成　马春兰　程新利
编　者　葛丽娟　毛红敏　时善进
孙　坚　王　艺

苏州大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

大学物理学习指导 / 臧涛成，马春兰，程新利主编. —苏州：苏州大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-5672-0763-9

Ⅰ.①大… Ⅱ.①臧…②马…③程… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 012576 号

**大学物理学习指导**
臧涛成 马春兰 程新利 **主编**
**责任编辑** 肖 荣

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006)
苏州工业园区美柯乐制版印务有限责任公司印装
(地址：苏州工业园区东兴路 7－1 号 邮编：215021)

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.75 字数 272 千
2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-0763-9 定价：21.00 元

# Preface 前言

大学物理是高等学校非物理类理工科专业的基础课程。本书共十六章，每章分“基本要求”、“内容提要”、“典型例题”、“习题选讲”和“综合练习”五个部分。“基本要求”部分简明扼要地指出了每章应该掌握、理解与了解的内容；“内容提要”部分系统概括和总结了本章的主要内容和知识点；“典型例题”部分则精选了教材以外的具有典型意义的题目讲解；“习题选讲”部分的题目均选自马文蔚、周雨青主编的《物理学教程》第二版的课后习题。“典型例题”和“习题选讲”两部分所选例题力求内容丰富、难度适当并能覆盖主要知识点。

本书具有一定的通用性，可作为理工科院校相关各专业大学物理课程的教学辅导参考书。

本书编写分工如下：第一、二章由孙坚编写，第三、四章由马春兰编写，第五、六章由臧涛成编写，第七、八章由时善进编写，第九、十章由葛丽娟编写，第十一、十二章由王艺编写，第十三、十四章由毛红敏编写，第十五、十六章由程新利编写。全书由臧涛成、马春兰修订并统稿。

本书在编写过程中参考了同类教学辅导书以及其他形式的资料，在此不便一一列举，编者在此表示歉意并衷心感谢。

本书在出版过程中得到了苏州科技学院数理学院和苏州大学出版社的大力支持，在校研究生戴称民、陈高远等对综合练习答案进行了核对，在此一并表示诚挚的感谢。

限于编者水平，书中难免出现错漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2013 年 11 月

# Contents 目录

# 第一章　质点运动学

## 1.1　基本要求

• 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动及变化的物理量的概念.

• 理解运动方程的物理意义;熟练掌握由运动方程求解速度和加速度的方法;基本掌握已知质点运动的加速度和初始条件求速度、运动方程的方法.

• 掌握曲线运动的自然坐标表示法,能计算质点在平面内运动时的速度和加速度,以及质点做圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

• 理解质点的相对运动问题.

## 1.2　内容提要

### 一、参考系、坐标系和质点模型

**1. 参考系**

参考系是为定性描述物体运动而选用的标准物体或物体系.

**2. 坐标系**

坐标系是为定量描述物体的位置与运动情况,在给定的参考系上建立的带有标尺的数学坐标.

坐标系的种类较多,视不同需要而选择.大学物理中常用的坐标系有直角坐标系($x,y,z$)、极坐标系($r,\theta$)等.

**3. 质点**

质点是具有一定质量而大小或形状可以忽略的理想物体.一般有两种简化形式:

(1) 转动物体自身线度与其活动范围相比小得多时,该物体可视为质点.

(2) 做平动的物体可视为质点.

### 二、描述质点运动的物理量

**1. 位矢(位置矢量)$\boldsymbol{r}(t)$**

位矢是描述质点 $t$ 时刻在空间的具体位置的物理量,是指从坐标原点指向空间某点的有向线段.

在直角坐标系中：$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，其大小 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，方向可用该有向线段与直角坐标系三个坐标轴的夹角的余弦值表示，即

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}\\ \cos\beta=\dfrac{y}{r}\\ \cos\gamma=\dfrac{z}{r}\end{cases}$$

**2. 位移 $\Delta\boldsymbol{r}$**

位移是描述质点在 $\Delta t$ 时间内位置变化的物理量，是 $\boldsymbol{r}(t)$ 端点指向 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 端点的有向线段，即 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示 $\Delta t$ 时间内质点位置变化的净效果，与质点的运动轨迹无关，只与始、末点位置有关.

在直角坐标系中，$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\Delta x\,\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$，大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，其中 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

**3. 路程 $\Delta s$**

路程是描述质点在 $\Delta t$ 时间内通过的实际轨迹长度的物理量. $\Delta s$ 是标量，与质点的运动轨迹有关.

$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 指质点在 $\Delta t$ 时间内位移的大小，$|\Delta\boldsymbol{r}|=\overline{AB}$；$\Delta r$ 指质点在 $\Delta t$ 时间内位矢的大小(模)的增量，$\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$；$\Delta s$ 指质点在 $\Delta t$ 时间内的路程，$\Delta s=\overset{\frown}{AB}$. $|\Delta\boldsymbol{r}|$、$\Delta r$ 及 $\Delta s$ 的区别和联系见图 1-1.

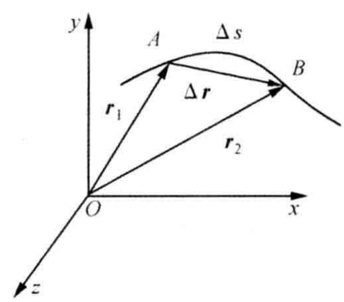


**图 1-1　直角坐标系下，位矢、位移、路程的区别和联系**

通常情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r\neq\Delta s$. 当质点做曲线运动时，若 $\Delta t\to 0$，有 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$.

**4. 速度 $\boldsymbol{v}$**

速度是描述质点运动的快慢和方向的物理量，$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

在直角坐标系中，$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，速度的方向为沿质点所在处曲线的切线方向并且指向质点前进一侧，速度的大小 $v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$，也称为瞬时速率(简称速率)，速率还可以用路程对时间的变化率表示，即 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

$\Delta t$ 时间内的平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}$定义为 $\Delta t$ 时间内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 $\Delta t$ 之比，即$\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

**5. 加速度 $\boldsymbol{a}$**

加速度是描述质点的速度大小、方向变化快慢的物理量，$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$.

在直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，加速度的大小 $a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$. 质点沿曲线运动时，$\boldsymbol{a}$ 的方向指向质点所在处曲线的凹侧.

## 三、运动方程及运动学两类基本问题

### 1. 运动方程和轨迹方程

在一定的坐标系中，质点的位置随时间按一定规律变化，位置用坐标表示为时间的函数，叫做运动方程. 质点运动轨迹的曲线方程称为轨迹方程.

运动方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$.

直角坐标系中的分量式：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$.

由分量式消去 $t$ 得轨迹方程：$f(x,y,z)=0$.

### 2. 运动学的两类基本问题

（1）已知运动方程，求速度和加速度.

将已知函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 $t$ 求导数即可，即

$$\boldsymbol{r}\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

（2）已知速度和加速度，求运动方程.

若已知速度、加速度与 $t$ 的关系，直接进行积分即可，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)\xrightarrow{\text{积分}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int\boldsymbol{a}\mathrm{d}t\xrightarrow{\text{积分}}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

特别地，在一维情况下，若已知加速度与 $x$ 的关系，应先进行如下变换：

$$a(x)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

通过积分 $\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$ 可得到 $v$ 与 $x$ 的关系，即

$$v^2(x)=v_0{}^2+2\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$$

再由 $\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$ 即可求得 $x$ 与 $t$ 的关系.

## 四、圆周运动

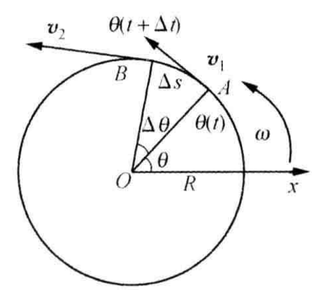

图 1-2　极坐标系下，圆周运动的角量描述

### 1. 圆周运动的角量描述(图 1-2)

（1）角坐标、角位移、角速度、角加速度.

角坐标 $\theta(t)$：描述质点在 $t$ 时刻的角位置.

角位移 $\Delta\theta$：描述质点角坐标的变化，$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$.

角速度 $\omega$：描述质点做圆周运动的快慢和方向，$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

角加速度 $\alpha$：描述质点角速度大小、方向的变化快慢，$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$.

**注意**　质点做圆周运动时，角位移、角速度和角加速度有正负，一般定义逆时针旋转时角位移、角速度为正，顺时针则为负. 角加速度的正负与角速度的变化情况有关：角速度变大时，角加速度的正负与角速度的正负相同；角速度变小时，角加速度的正负与角速度的正负相反.

（2）线量与角量的关系.

角位移与弧长：$\Delta s=R\Delta\theta$.

角速度与线速度的大小：$v=R\omega$.

切向加速度：$a_t=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\alpha$.

法向加速度：$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$.

**2. 两种圆周运动**

(1) 匀速率圆周运动：$\alpha=0$，$\omega$ 是恒量，基本方程为

$$\theta=\theta_0+\omega t$$

(2) 匀变速率圆周运动：$\alpha$ 是恒量，基本方程为

$$\omega=\omega_0+\alpha t,\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2,\ \omega^2-\omega_0{}^2=2\alpha(\theta-\theta_0)$$

## 五、相对运动

如图 1-3 所示，有一静止坐标系 $xOy$ 和运动坐标系 $x'O'y'$. 在 $O'$系相对于 $O$ 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 做平动运动的情况下，同一质点 $P$ 在这两个参考系中的位矢、速度、加速度之间的关系分别为

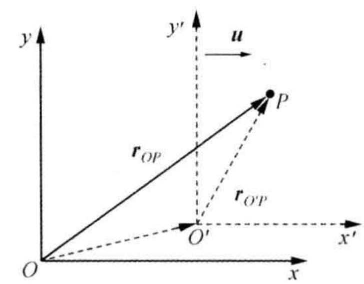


图 1-3　相对运动的图示

$$\boldsymbol{r}_{OP}=\boldsymbol{r}_{O'P}+\boldsymbol{u}\Delta t,\boldsymbol{v}_{OP}=\boldsymbol{v}_{O'P}+\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_{OP}=\boldsymbol{a}_{O'P}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{OP}$、$\boldsymbol{u}_{OP}$、$\boldsymbol{a}_{OP}$ 分别是绝对位矢、绝对速度、绝对加速度. $\boldsymbol{r}_{O'P}$、$\boldsymbol{u}_{O'P}$、$\boldsymbol{a}_{O'P}$ 分别是相对位矢、相对速度、相对加速度，$\boldsymbol{u}$ 是牵连速度.

# 1.3　典型例题

**例 1**　已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(4-3t^2)\boldsymbol{j}$(SI)，求：

(1) 质点的轨迹；

(2) $t=0$ s 及 $t=3$ s 时质点的位置矢量；

(3) $t=0$ s 到 $t=3$ s 时间内质点的位移；

(4) $t=3$ s 内质点的平均速度；

(5) $t=3$ s 末质点的速度及速度大小；

(6) $t=3$ s 末质点的加速度及加速度大小.

**解**　这是一道已知运动方程，求解位矢、位移、速度、加速度的典型题目，属于第一种类型，可根据第一种类型的解题思路依次求解，注意求解过程中矢量的方向如何表示.

(1) 先写出运动方程的分量式：

$$\begin{cases} x=2t \\ y=4-3t^2 \end{cases}$$

消去 $t$ 得轨迹方程：

$$y=4-\frac{3}{4}x^2$$

所以该质点的运动轨迹是抛物线.

(2) 质点的位矢：

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=0\text{ s}}=4\boldsymbol{j}\ \text{m},\boldsymbol{r}\big|_{t=3\text{ s}}=(6\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

(3) 质点的位移：

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\big|_{t=3\ \mathrm{s}}-\boldsymbol{r}\big|_{t=0\ \mathrm{s}}=(6\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}=(6\boldsymbol{i}-27\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

位移的大小：

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\sqrt{6^2+(27)^2}\ \mathrm{m}\approx 27.66\ \mathrm{m}$$

位移的方向：$\theta_0=\arctan\left(-\dfrac{9}{2}\right)=-1.35\ \mathrm{rad}$，在 $x$ 轴正半轴的下方.

(4) 质点在 3 s 内的平均速度：

$$\overline{\boldsymbol{v}}\big|_{\Delta t=3\ \mathrm{s}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}=(2\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

平均速度的大小：

$$|\overline{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{4+81}\ \mathrm{m/s}\approx 9.22\ \mathrm{m/s}$$

(5) 质点在 $t$ 时刻的速度：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=(2\boldsymbol{i}-6t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

质点在 3 s 末的速度：

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=3\ \mathrm{s}}=(2\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

速度的大小：

$$v\big|_{t=3\ \mathrm{s}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\approx 18.11\ \mathrm{m/s}$$

(6) 质点在 $t$ 时刻的加速度：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-6\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

质点在 3 s 末的加速度：

$$\boldsymbol{a}\big|_{t=3\ \mathrm{s}}=-6\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

加速度的大小：$a\big|_{t=3\ \mathrm{s}}=-6\ \mathrm{m/s^2}$，沿 $y$ 轴负向，与时间无关.

**例 2**　某质点的初位矢 $\boldsymbol{r}_0=2\boldsymbol{i}(\mathrm{SI})$，初速度 $\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}(\mathrm{SI})$，加速度 $\boldsymbol{a}=4t\,\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}(\mathrm{SI})$. 求：

(1) 该质点在任意时刻的速度；

(2) 该质点在任意时刻的运动方程.

**解**　这是一道已知加速度表达式，提供初位矢、初速度等初始条件，求解任意时刻的速度、位矢的典型题目，属于第二种类型，可根据第二种类型的解题思路依次求解. 注意求解过程中积分时如何确定积分的上下限.

(1) 给出的加速度是含时间变量的函数，由 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，并结合题设给出的初速度条件可得

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=\int_0^t \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t=\int_0^t(4t\,\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}t=\left(2t^2\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+2t^2\boldsymbol{i}+\frac{t^4}{2}\boldsymbol{j}=\left[2t^2\boldsymbol{i}+\left(2+\frac{t^4}{2}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，注意代入的速度表达式应是上述已求解的任意时刻的速度表达式，并结合题设给出的初速度条件可得

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\int_0^t\left[2t^2\boldsymbol{i}+\left(2+\frac{t^4}{2}\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{d}t=\left[\frac{2t^3}{3}\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\frac{2t^3}{3}\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}=\left[\left(2+\frac{2t^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(2t+\frac{t^5}{10}\right)\boldsymbol{j}\right]\ \mathrm{m}$$

**例 3** 一质点按规律 $s=t^3+2t^2$ (SI)在圆的轨道上运动. 如果当 $t=2$ s 时总加速度大小为 $16\sqrt{2}$ m·s$^{-2}$,求此圆周的半径 $R$.

**解** 题目涉及圆周运动的线量与角量的关系式,圆周运动时的速度、加速度公式,尤其是加速度公式中有关切向加速度、法向加速度和总加速度的大小的求解,解题时需要综合使用这些公式.

由题意可得,$t$ 时刻质点沿圆周运动的运动方程为

$$s=R\theta=t^3+2t^2$$

质点沿圆周运动的速度:

$$v=R\omega=3t^2+4t$$

切向加速度:

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\alpha=6t+4$$

法向加速度:

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\sqrt{a^2-a_{\mathrm{t}}^2}$$

则此圆周的半径:

$$R=\frac{v^2}{\sqrt{a^2-a_{\mathrm{t}}^2}}=\frac{(3\times2^2+4\times2)^2}{\sqrt{(16\sqrt{2})^2-(6\times2+4)^2}}\ \mathrm{m}=25\ \mathrm{m}$$

## 1.4 习题选讲

**1-12** 一质点在 $xOy$ 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2.0t\boldsymbol{i}+(19.0-2.0t^2)\boldsymbol{j}$,式中 $\boldsymbol{r}$ 的单位为 m,$t$ 的单位为 s. 求:

(1) 质点的轨迹方程;

(2) 在 $t_1=1.0$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内质点的平均速度;

(3) $t_1=1.0$ s 时质点的速度及切向加速度和法向加速度;

(4) $t_1=1.0$ s 时质点所在处轨道的曲率半径 $\rho$.

**解** 根据运动方程可直接写出其分量式 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$,从中消去参数 $t$,即得质点的轨迹方程. 平均速度是反映质点在一段时间内位矢的变化率,即 $\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$,它与时间间隔 $\Delta t$ 的大小有关,当 $\Delta t\to0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. 切向加速度和法向加速度是指在自然坐标下加速度的分矢量 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 和 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$,前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率,即 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$;后者只反映质点速度方向的变化,它可由总加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ 得到. 在求得 $t_1$ 时刻质点的速度和法向加速度的大小后,可由公式 $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$ 求 $\rho$.

(1) 由运动方程可得参数方程：

$$x=2.0t, y=19.0-2.0t^2$$

消去 $t$ 得质点的轨迹方程：

$$y=19.0-0.50x^2$$

(2) 在 $t_1=1.0$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内质点的平均速度：

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=(2.0\boldsymbol{i}-6.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=(2.0\boldsymbol{i}-4.0t\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=-4.0\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

则 $t_1=1.0$ s 时的速度：

$$\boldsymbol{v}(t)|_{t=1\,\mathrm{s}}=(2.0\boldsymbol{i}-4.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{t}|_{t=1\,\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2})\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\approx 3.58\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{n}|_{t=1\,\mathrm{s}}=\sqrt{a^2-a_\mathrm{t}{}^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\approx 1.79\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(4) $t_1=1.0$ s 时质点的速度大小为

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}\approx 4.47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

则质点所在处轨迹的曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a_\mathrm{n}}\approx 11.17\ \mathrm{m}$$

**1-13**　质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 $a$ 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，$t$ 的单位为 s. 如果当 $t=3$ s 时，$x=9$ m，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点的运动方程.

**解**　本题属于运动学第二类问题，即已知加速度求速度和运动方程，必须在给定条件下用积分方法解决. 由于质点沿直线运动，所以此时可以去掉矢量号，以正负号来表示质点在某一直线上的运动情况. 由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 和 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 可得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$. 由

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

得

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0 \tag{1}$$

再由

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

得

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0 \tag{2}$$

将 $t=3$ s 时，$x=9$ m，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 代入式(1)、式(2)得 $v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_0=0.75$ m. 于是可得质点的运动方程为

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4-t+0.75$$

**1-18** 一半径为0.50 m的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比. 在$t=2.0$ s时测得轮缘一点的速度值为4.0 m·s$^{-1}$. 求：

(1) 该轮在$t'=0.5$ s的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度；

(2) 该点在2.0 s内所转过的角度.

**解** 首先应该确定角速度满足的函数关系$\omega=kt^2$. 依据角量与线量的关系，由特定时刻的速度值可得相应的角速度，从而求出式中的比例系数$k$. $\omega=\omega(t)$确定后，注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系，由运动学中两类问题求解的方法(微分法和积分法)，即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移.

(1) 因为$v=\omega R$，由题意$\omega\propto t^2$得比例系数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

所以

$$\omega=\omega(t)=2t^2$$

则$t'=0.5$ s时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega=2t'^2=0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4t'=2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

$$a_\mathrm{t}=\alpha R=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

总加速度为

$$\boldsymbol{a}=a_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+a_\mathrm{n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}=\alpha R\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+\omega^2R\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$$

总加速度大小为

$$a=\sqrt{(\alpha R)^2+(\omega^2R)^2}\approx1.01\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 在2.0 s内该点所转过的角度为

$$\theta-\theta_0=\int_0^2\omega\mathrm{d}t=\int_0^2 2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\Big|_0^2\approx5.33\ \mathrm{rad}$$

## 1.5 综合练习

### 一、选择题

1. 一质点在平面上做一般曲线运动，其瞬时速度为$\boldsymbol{v}$，瞬时速率为$v$，某一段时间内的平均速度为$\overline{\boldsymbol{v}}$，平均速率为$\overline{v}$. 它们之间的关系必定有 ( )

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$　　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$

(C) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$　　(D) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$

2. 分别以$\boldsymbol{r}$、$s$、$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$表示质点运动的位矢、路程、速度和加速度，则下列表述正确的是 ( )

(A) $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta r$　(B) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$　(C) $a=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　(D) $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

3. 质点做半径为 $R$ 的变速圆周运动时的加速度大小为($v$ 表示任一时刻质点的速率)　(　　)

(A) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　(B) $\frac{v^2}{R}$　(C) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v^2}{R}$　(D) $\left[\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}$

4. 某质点的运动方程为 $x=3t-5t^3+6$(SI),则该质点做　(　　)

(A) 匀加速直线运动,加速度沿 $x$ 轴正方向

(B) 匀加速直线运动,加速度沿 $x$ 轴负方向

(C) 变加速直线运动,加速度沿 $x$ 轴正方向

(D) 变加速直线运动,加速度沿 $x$ 轴负方向

5. 下列说法正确的是　(　　)

(A) 加速度恒定不变时,物体的运动方向也不变

(B) 平均速率等于平均速度的大小

(C) 不管加速度如何,平均速率表达式总可以写成($v_1$、$v_2$ 分别为初、末速率)$\frac{v_1+v_2}{2}$

(D) 运动物体的速率不变时,速度可以变化

6. 质点在平面内运动时,位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$,若保持 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$,则质点的运动是　(　　)

(A) 匀速直线运动　(B) 变速直线运动　(C) 圆周运动　(D) 匀速曲线运动

7. 在忽略空气阻力和摩擦力的条件下,加速度矢量保持不变的运动是　(　　)

(A) 单摆的运动　(B) 匀速率圆周运动　(C) 抛体运动　(D) 弹簧振子的运动

8. 对于沿曲线运动的物体,下列说法正确的是　(　　)

(A) 切向加速度必不为零

(B) 法向加速度必不为零(拐点处除外)

(C) 由于速度沿切线方向,法向分速度必为零,因此法向加速度必为零

(D) 若物体的加速度 $\boldsymbol{a}$ 为恒矢量,它一定做匀变速率运动

9. 下列说法正确的是　(　　)

(A) 质点做圆周运动时的加速度指向圆心

(B) 匀速圆周运动的加速度为恒量

(C) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动

(D) 只有切向加速度的运动一定是直线运动

10. 质点沿半径为 $R$ 的圆周做匀速率运动,每转一圈需时间 $t$,在 $3t$ 时间间隔中,其平均速度大小与平均速率大小分别为　(　　)

(A) $\frac{2\pi R}{t}$、$\frac{2\pi R}{t}$　(B) 0、$\frac{2\pi R}{t}$　(C) 0、0　(D) $\frac{2\pi R}{t}$、0

## 二、填空题

11. 一个质量为 $m$ 的质点,沿 $x$ 轴做直线运动,受到的作用力为 $\boldsymbol{F}=F_0\cos\omega t\,\boldsymbol{i}$(SI).在 $t=0$ 时刻,质点的位置坐标为 $x_0$,初速度 $\boldsymbol{v}_0=0$,则质点的位置坐标和时间的关系式是 $x=$______.

12. 一质点沿 $x$ 轴运动,其加速度 $a=ct^2$(其中 $c$ 为常量).当 $t=0$ 时,质点位于 $x_0$ 处,且速度为 $v_0$,则在任意时刻 $t$,质点的速度 $v=$________,质点的运动方程 $x=$____________.

13. 一质点从静止出发，沿半径 $R=3.0$ m 的圆做圆周运动，切向加速度的大小始终为 $a_t=3.0\ \mathrm{m/s^2}$，当总加速度与半径成 45°角时，所经过的时间为__________s，在上述时间内质点经过的路程为__________m.

14. 一质点做半径为 $R$ 的圆周运动，其路程 $s$ 随时间 $t$ 变化的规律为 $s=bt+ct^2$，式中 $b$、$c$ 为正的常量. 则在任意时刻 $t$，质点的切向加速度 $a_t=$_______，法向加速度 $a_n=$_______.

15. 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=\left(5+2t-\frac{1}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}+\left(4t+\frac{1}{3}t^3\right)\boldsymbol{j}$(SI). 当 $t=2$ s 时，$\boldsymbol{v}=$__________，$\boldsymbol{a}=$__________.

16. 一质点沿半径为 0.1 m 的圆做圆周运动，其角位移随时间 $t$ 的变化规律是 $\theta=2+4t^2$(SI).

(1) 质点的法向加速度 $a_n=R\omega^2=$__________；

(2) 切向加速度 $a_t=R\alpha=$__________；(其中 $\alpha$ 表示角加速度)

(3) 当切向加速度 $a_t$ 的大小恰为总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小的一半时，$\theta=$__________.

17. 质点 $P$ 在一直线上运动，其坐标 $x$ 与时间 $t$ 有如下关系：

$$x=-A\sin\omega t\ (\mathrm{SI})\qquad (A\ 为常数)$$

(1) 任意时刻 $t$，质点的加速度 $a=$__________；

(2) 质点速度为零的时刻 $t=$__________.

18. 一质点沿 $x$ 轴做直线运动，它的运动方程为 $x=3+5t+6t^2-t^3$(SI)，则

(1) 质点在 $t=0$ 时刻的速度 $v_0=$__________；

(2) 加速度为零时，该质点的速度 $v=$__________.

19. 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=\left(5+2t-\frac{1}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}+\left(4t+\frac{1}{3}t^3\right)\boldsymbol{j}$(SI)，则

(1) 当 $t=2$ s 时，加速度的大小 $a=$__________；

(2) 加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 $x$ 轴正方向间的夹角 $\alpha=$__________.

20. (1) 当 $a_t=0$，$a_n=0$ 时，质点做____________运动；

(2) 当 $a_t=0$，$a_n\neq0$ 时，质点做____________运动；

(3) 当 $a_t\neq0$，$a_n=0$ 时，质点做____________运动；

(4) 当 $a_t\neq0$，$a_n\neq0$ 时，质点做____________运动.

## 三、计算题

21. 物体做斜抛运动，初速度 $v_0=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，与水平方向成 45°角，求：

(1) 物体在最高点处的切向加速度、法向加速度；

(2) 物体在 $t=2$ s 时的切向加速度、法向加速度.

22. 质点沿 $x$ 轴运动，其加速度 $a=2t^2$(SI). 已知 $t=0$ 时，质点位于 $x_0=4$ m 处，其速度 $v_0=3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求其运动方程.

23. 一艘正在沿直线行驶的电船，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，即 $a=-kv^2$，试证明电船在关闭发动机后又行驶 $x$ 距离时的速度为 $v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$，式中 $v_0$ 是关闭发动机后的速度.

24. 质点按照 $s=bt-\frac{1}{2}ct^2$ 的规律沿半径为 $R$ 的圆做圆周运动，其中 $s$ 是质点运动的路程，$b$、$c$ 是常量，并且 $b^2>cR$. 当切向加速度与法向加速度的大小相等时，质点运动了多少