褚万霞 吴静杰 齐琼◎主 编 张广计 郭智莲◎副主编

经济数学

——微积分

（下册）

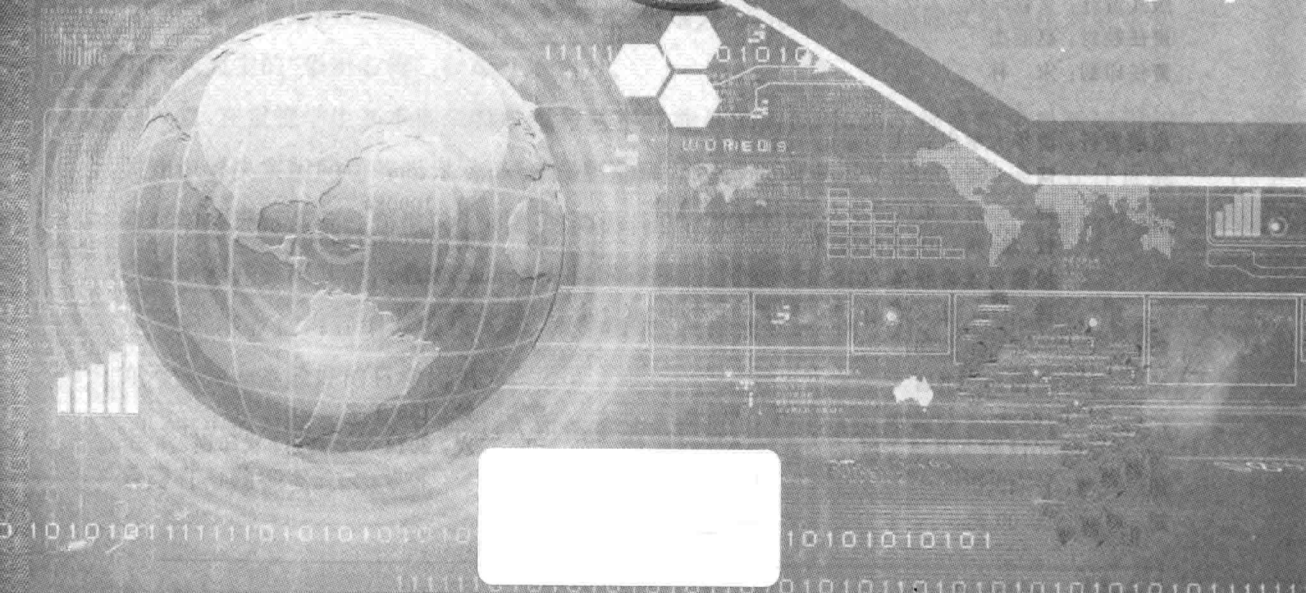
清华大学出版社

褚万霞　吴静杰　齐琼◎主　编　　张广计　郭智莲◎副主编

经济数学

——微积分

（下册）



清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书由从事经济、管理类专业数学教学工作的教师，根据自己多年的教学实践以及文科学生的思维特点编写而成。在继承众多优秀教材的基础上，又有新探索。

全套书分为上册和下册。本书为下册，内容包括无穷级数、多元函数微分、二重积分及微分方程与差分方程。书后附有习题答案和书中数学家简介。

在不失数学的严密性和系统性的前提下，本书尽可能采用通俗易懂的语言和形象直观的思维方式进行编写。全书思路清晰，例题丰富，说理透彻，由浅入深，使学生易学易懂。为了扩大适用面，在保证教学基本要求的前提下，编者充分考虑了不同使用者对内容难易程度的不同要求，例题和习题的选编既有充分的基础性训练，又有难度相当于考研数学的综合能力提高训练。另外，书中带有“*”号的内容依教学实际可作为选学内容。

本书主要作为高等院校经济学、管理学等文科类专业教学用书，同时，也可作为自学考试和考研参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学．微积分．下册/褚万霞，吴静杰，齐琼主编．—北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-35222-8

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①褚…　②吴…　③齐…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材　②微积分－高等学校－教材　Ⅳ．①F224.0　②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 014311 号

责任编辑：汪　莉
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：赵丽杰
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：9　　**字　　数**：155 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 2 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：22.00 元

产品编号：055466-01

前　言

本书根据教育部颁布的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲以及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有关微积分部分的规定编写而成，适合作为高等院校经济、管理等文科类本科及专科专业的《微积分》教材，也可作为相关专业硕士研究生入学考试的复习参考用书。

目前，编写一本较高质量的、适应文科类教学需要的微积分教材，是国内众多从事文科专业数学教学工作者的共同愿望。本书的几位编者，在长期从事经济、管理等文科类专业数学教学的过程中，试用过多种教材，发现各有所长和不足，于是便有了编写一本更适合专业特点、更符合文科学生思维特点的教材的想法。这本呈现于读者面前的教材，正是这一想法的结晶。本教材有以下几个特点：

一、结合教学实际和文科学生的思维特点，在不失数学系统性和科学性的前提下，尽可能以通俗易懂的语言和形象直观的方式，化难为易，化繁为简，消除文科学生对数学知识先入为主的“恐惧心理”，轻松开始学习。

二、在重视学生基本概念的掌握和基本技能训练的同时，为了提高学生灵活运用相关知识解决实际问题的能力，编写者在例题和习题的选编上下了较大的功夫。在保证能够对学生进行基础性知识巩固训练的同时，更加注重对学生思维的启迪和视野的开拓，以期培养并提高其运用数学知识解决实际问题的能力。

三、本教材内容编写由浅入深，循序渐进，叙述细腻，举例丰富，力求说理清晰易懂，亦不失为一本较好的自学用书。

书中的习题分为 A、B 两组，A 组偏重基础训练，B 组为单项选择或拓展思维训练，书后附有习题答案。

本套书分为上册和下册。下册的第七章由张广计、郭智莲编写,第八章由吴静杰、齐琼编写,第九章由齐琼编写,第十章由褚万霞编写。褚万霞、吴静杰、齐琼担任主编,张广计、郭智莲担任副主编。

本书的编写得到学院领导的大力支持,也融入了李进武、徐靓、王海燕、司小霞等老师的辛勤汗水和殷切期望,在此表示衷心感谢!

本书虽经细琢,但难免有疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

2013年10月于西北政法大学

目　　录

第七章　无穷级数 …… 1
第一节　无穷级数的概念 …… 1
第二节　无穷级数的基本性质 …… 3
第三节　正项级数 …… 5
第四节　任意项级数与绝对收敛 …… 9
第五节　幂级数 …… 13
第六节　函数的幂级数展开式 …… 19
*第七节　幂级数的应用举例 …… 25
习题七 …… 27
第八章　多元函数微分 …… 31
第一节　空间解析几何简介 …… 31
第二节　多元函数的概念 …… 37
第三节　二元函数的极限与连续性 …… 39
第四节　偏导数与全微分 …… 41
第五节　复合函数与隐函数的微分法 …… 50
第六节　多元函数的极值及其求法 …… 57
习题八 …… 63
第九章　二重积分 …… 69
第一节　二重积分的概念与性质 …… 69
第二节　二重积分的计算 …… 72
习题九 …… 85

第十章　微分方程与差分方程 ………………………………………… 88
第一节　微分方程的基本概念 ………………………………………… 88
第二节　一阶微分方程 ………………………………………………… 90
第三节　可降阶的高阶微分方程 ……………………………………… 95
第四节　二阶常系数线性微分方程 …………………………………… 100
第五节　差分方程的基本概念 ………………………………………… 107
第六节　一阶和二阶常系数线性差分方程 …………………………… 109
习题十 ………………………………………………………………… 115
习题参考答案 ……………………………………………………… 120
书中数学家简介 …………………………………………………… 131
参考文献 …………………………………………………………… 136

第七章　无穷级数

第一节　无穷级数的概念

先看一个实际问题:把 $\triangle ABC$ 的三边中点连接起来得到 $\triangle A_1B_1C_1$,再把 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边中点连接起来得到 $\triangle A_2B_2C_2$,依次无限做下去,求 $\triangle ABC$,$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$,$\cdots$ 面积的总和,即计算

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2a+\left(\frac{1}{4}\right)^3a+\cdots(a\text{ 为 }\triangle ABC\text{ 的面积}) \tag{7.1}$$

这是一个无限项相加的问题,利用极限的方法可解决. 像式(7.1) 这样的无限个项相加的表达式称为无穷级数. 一般地,把给定数列 $\{u_n\}$ 所有项相加得到的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{7.2}$$

称为无穷级数(简称级数). 其中第 n 项 u_n 称为级数的通项,式(7.2) 也可简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

把级数前 n 项的和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数的(第 n 次) 部分和. 部分和

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$$

构成一个数列.

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$($S$ 为常数),则称级数(7.2) 收敛,其和为 S(或收敛于 S),可记为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

如果数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在,则称级数(7.2) 发散,发散级数没有和.

当级数收敛时,其和与部分和的差

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的余项.

用 S_n 作为 S 的近似值所产生的误差即为 $|R_n|$.

例 7-1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{7.3}$$

称为几何级数(或等比级数). 其中 $a \neq 0$, q 称为级数的公比.

现在讨论几何级数(7.3)的敛散性(收敛或发散).

(1) 当 $|q| \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

如果 $|q| < 1$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

如果 $|q| > 1$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

(2) 当 $q = 1$ 时,由于 $S_n = na$,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

(3) 当 $q = -1$ 时,则级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + a - a + \cdots$$

当 n 为偶数时,$S_n = 0$;当 n 为奇数时,$S_n = a$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

综上可得,几何级数(7.3)当 $|q| < 1$ 时收敛,其和 $S = \dfrac{a}{1-q}$;当 $|q| \geqslant 1$ 时发散. 即得结论几何级数收敛的充要条件是其公比 q 满足 $|q| < 1$. 由这一结论可得级数(7.1)是收敛的,其和为 $\dfrac{4}{3}a$(平方单位).

例 7-2 把循环小数 $0.\dot{9}\dot{8}$ 化成分数的形式.

解 $0.\dot{9}\dot{8} = \dfrac{98}{100} + \dfrac{98}{100^2} + \dfrac{98}{100^3} + \cdots$(几何级数)

$$= \frac{\frac{98}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \text{(几何级数求和公式)}$$

$$= \frac{98}{99}$$

例 7-3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 由于 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

因此 $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

从而
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

所以级数收敛，其和为 1.

例 7-4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解 由于 $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

因此 $S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1)$$

从而 $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = +\infty$

所以级数发散.

第二节 无穷级数的基本性质

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S、W，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且和为 $S \pm W$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n、W_n，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和 $T_n = S_n \pm W_n$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm W_n) = S \pm W$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

定理 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，和为 S，则它的每一项都乘以一个不为零的常数 k 后，所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且和为 kS.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和 $W_n = kS_n$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} kS_n = kS$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

由定理 2 可得结论：级数的每一项同乘以非零常数后，其敛散性不变.

例 7-5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} + \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$，

所以该级数为收敛的几何级数.

又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}$，

由例 7-4 及定理 2 可推得该级数发散.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} + \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$ 发散(想一想，为什么?).

定理 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

证明略.

定理 4 如果一个级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数也收敛，且其和不变；反之，如果加括号后所成的级数发散，则原级数也必发散.

证明略.

发散级数加括号后有可能收敛,即加括号后级数收敛,原级数未必收敛.

例如,发散级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

加括号后所成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0(\text{收敛})$$

反之,收敛级数去括号后未必收敛.

对于正项级数(各项 $u_n\geqslant 0$,见第三节),加括号或去括号都不影响它的敛散性.

定理 5 (收敛的必要条件) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 设级数的部分和为 S_n,和为 S,则 $u_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}\\&=S-S\\&=0.\end{aligned}$$

由此可知,如果级数的通项不是无穷小量($n\to\infty$ 时),则级数发散.例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$ 是发散的,因为其通项的极限为1(并非无穷小量).但需注意,通项趋于零的级数不一定收敛(见例7-4).

第三节 正项级数

一、正项级数判敛基本定理

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称其为正项级数.

正项级数有一个特点是,其部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调不减的,即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_{n-1}\leqslant S_n\leqslant\cdots$$

由数列极限的存在准则(单调有界数列必收敛)可知,如果数列 $\{S_n\}$ 有上界,则它收敛;否则发散.因此可得定理6.

定理 6 正项级数收敛的充要条件是:它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

二、比较判别法

定理 7 如果两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的通项满足$u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$,则

(1) 当后者收敛时,前者也收敛;

(2) 当前者发散时,后者也发散.

证 (2) 是(1) 的逆否命题,所以只需证(1) 即可.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为S_n、W_n,由$u_n \leqslant v_n$可推得$S_n \leqslant W_n$.

由定理 6 可知,如果后者收敛,则数列$\{W_n\}$有上界,因此数列$\{S_n\}$也有上界,所以前者也收敛.

该命题也可简称为:“大”收则“小”收;“小”发则“大”发.

例 7-6 判定调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$(自然数倒数的和)的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots$(按一定的规则加括号),其各项均大于级数

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

的对应项,而后者是发散的.由比较判敛法可知,调和级数发散.

例 7-7 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$的敛散性(该级数称为$p$—级数).

解 当$p \leqslant 1$时,$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$.由例 7-6 知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散.

当$p>1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p})+(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p})+(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p})+\cdots,$$

其各项均不大于级数$1+(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p})+(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p})+(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p})+\cdots$的对应项,而后者是几何级数,公比$q=\frac{1}{2^{p-1}}<1$,所以收敛.因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛.

综上可知，p — 级数收敛的充要条件是 $p>1$.

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{t}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^{-\frac{1}{t}}$ 收敛的充要条件是 $-1<t<0$.

在应用比较判别法时，经常把几何级数、调和级数或 p — 级数作为比较对象(参照级数).

例 7-8 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 的敛散性.

解 因 $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 也收敛.

在应用比较判别法时，建立不等式、寻求比较对象往往比较困难，而下面极限形式的比较法更为方便.

定理 8 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，两个级数敛散性相同；

(2) 当 $l=0$ 时，若后者收敛，则前者也收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，若后者发散，则前者也发散.

例 7-9 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$.

解 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，由定理 8 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 也发散.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛，由定理 8 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ 也收敛.

三、比值判别法

定理 9 (达朗贝尔(D'Alembert) 判别法) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n>0, n=1,2,\cdots)$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则

(1) 当 $l<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(这意味着此法失效,需用别的方法进行判定).

例 7-10 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{n}}{2^n}$ 的敛散性.

解 由 $\sin\dfrac{\pi}{n}\leqslant 1$ 可推得 $\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{2}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的通项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$,

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\dfrac{\pi}{n}}{2^n}$ 收敛.

例 7-11 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10}=+\infty$.

所以级数发散.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$,而前者收敛,后者发散.可见当 $l=1$ 时不能用达朗贝尔判别法进行判定.

四、根值判别法

定理 10 (柯西判别法)如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则

(1) 当 $l<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;

(3) 当 $l=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散(定理失效情形).

例 7-12 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{an}{n+b}\right)^n(a>0,b>0)$ 的敛散性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an}{n+b}=a$,

所以当 $0 < a < 1$ 时，级数收敛；当 $a > 1$ 时，级数发散；当 $a = 1$ 时，根值判别法失效，但此时有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+b}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^b} \neq 0$$

所以 $a = 1$ 时，级数发散.

若把根值判别法应用于 p－级数，则有

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p \to 1 (n \to \infty)$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}$（洛必达法则）$= 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$，这说明 $l = 1$ 时级数可能收敛，也可能发散.

比值与根值判别法也称为自身判别法，这与比较判别法有所不同.

第四节　任意项级数与绝对收敛

一、交错级数

各项为任意实数的级数称为任意项级数或一般项级数. 在任意项级数中有一种特殊情形，即正负项交替出现，这种级数称为交错级数，其形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + \cdots \tag{7.4}$$

其中 $u_n > 0 (n = 1,2,\cdots)$.

关于交错级数有下面的定理.

定理 11 （莱布尼茨定理）如果交错级数(7.4)满足条件

(1) $u_n \geqslant u_{n+1} (n = 1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数收敛，和 $S \leqslant u_1$，余项的绝对值 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

例如，交错级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

满足条件

(1) $u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} (n = 1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

所以收敛,且其和 $S < 1$. 如果取前 n 项的和 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 作为 S 的近似值,所产生的误差 $|R_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

例 7-13 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x \geqslant 3$ 时,$f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 在区间$[3, +\infty)$上单调减少. 又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$,由定理 11 可知,从第 3 项开始的级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 是收敛的,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 也收敛(见定理 3).

二、绝对收敛与条件收敛

关于任意项级数有下面的定理.

定理 12 如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项绝对值组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛. 设

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)(n = 1,2,\cdots)$$

显然 $v_n \geqslant 0$ 且 $v_n \leqslant |u_n| (n = 1,2,\cdots)$. 由比较判别法可知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛. 而 $u_n = 2v_n - |u_n|$,由级数的基本性质可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.