经典教材辅导用书

·经典教材辅导用书·

微积分同步辅导与考研指南

人大版《微积分》(第三版)(赵树嫄)

俞诗秋　欧阳露莎　主编

- 知识概要　归纳章节知识要点方法
- 考点综述　提炼考试重点常见考点
- 经典例题　诠释历年考研经典试题
- 习题解析　详细分析解答全部习题

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

微积分同步辅导与考研指南

人大版《微积分》(第三版)(赵树媛主编)

主　编　俞诗秋　欧阳露莎
编　者　俞诗秋　欧阳露莎　郭丽莎
周　静　汪政红
李雪峰　安　智

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与考研指南/俞诗秋　欧阳露莎 主编.—武汉：华中科技大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-5609-9230-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.①俞…　②欧阳…　Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159315 号

微积分同步辅导与考研指南　　俞诗秋　欧阳露莎　主编

策划编辑：王汉江　周芬娜
责任编辑：王汉江(QQ:14458270)
封面设计：刘　卉
责任校对：李　琴
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：湖北新华印务有限公司
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：13.625
字　　数：473 千字
版　　次：2013 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

華中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

前言

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的一门科学,它在科学发展和现代生活生产中有着非常广泛的应用,也是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具.数学不仅为科学研究提供了简约的符号表达、科学计算,也为人的逻辑思维能力的培养和发展创造了环境和手段,正因为如此,数学才有“科学的语言”“思维的体操”“强者的翅膀”之美誉.随着经济学深入研究和应用的需要,数学已成为经济学的主人,“数学化”成了经济学发展的主流.

在21世纪的今天,经济的腾飞需要社会的建设者更好地掌握数学、更好地应用数学,使其知识更好地服务于经济学的研究、经济决策、行业的现代化管理,这一切都对经管类大学生的数学学习提出了更高的要求.微积分作为经管类大学生的基础必修课和硕士研究生入学的必考科目,对该课程知识掌握的程度关系到学生今后的专业学习和专业发展.众所周知,数学的学科特点决定了数学知识的掌握和灵活应用不仅需要接受优质的课堂教学,还需要课外的拓展学习.好的教辅资料有助于大学生对所学知识的巩固和检测,有助于提升大学生运用数学知识的综合能力.本书就是为了使读者能够对微积分知识有一个系统的认识,对微积分经典题型有一个综合了解、同时为最大限度地提高大学生数学应用能力和数学应试能力而编写的.

该书汇集了许多经典例题和《全国硕士研究生入学统一考试数学三试题》(微积分部分)全部的试题分析与解答,以及中国人民大学著名教授赵树嫄主编的经典教材《经济应用数学基础(一)——微积分》的习题全解.

该书的习题解答按照赵树嫄教授主编、由中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础(一)——微积分》(第三版)的章节顺序编写,并给出了全部习题的详细解答.为了使读者全面掌握微积分这门课程,本书每一章均按照【知识概要】、【考点综述】、【经典例题】、【习题解析】几个部分编写.

【知识概要】 重点介绍了本章的知识点,包括基本定理、基本公式和一些基本的计算方法、典型结论和基本技巧,以及应注意的问题.

【考点综述】 重点介绍了本章的考试内容、考试重点、常见考点和历年全国硕士研究生入学统一考试数学三的试题知识点分布的情况,并兼顾了各

大学微积分课程考试的常见考点.

【经典例题】 按照章节从前至后的顺序进行综合，主要收集了前面章节与本章知识综合的 1987 年到 2013 年《全国硕士研究生入学统一考试数学三试题》(微积分部分) 全部的试题及一些典型的例题，并给出了详细的解答. 这些例题对读者开拓视野、提高解题能力都有较大的帮助.

说明：例 13(2013.4)表示例 13 选自 2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题，本题 4 分；而例 10(2012.4)表示例 10 选自 2012 年的数学三试题，本题 4 分.

【习题解析】 给出了人大版、赵树嫄编写的《经济应用数学基础(一)——微积分》(第三版)的全部习题及详细解答.

基于为广大读者的微积分学习提供参考和帮助的初衷，我们编写了该辅导书，由于编者水平有限和编写时间仓促，书中难免存在错误，恳请读者不吝赐教指正.

在此衷心感谢读者的关心与支持！

编　者

2013 年 9 月

致 读 者

尊敬的读者，您好！

华中科技大学出版社一直致力于以“**系统·专业·经典·实用**”的教辅类图书服务于我国高等教育领域，已有百万学子从中受益。因此，希望您能对本书多提宝贵意见和建议并反馈给我们，我们将及时反馈给作者，以进一步完善本书，为广大高校师生提供更加完美的产品和服务。您的任何意见和建议都将是我们不断进步的动力。（QQ 考研交流群：275350834）

毛纲源系列书推荐

一、毛纲源考研数学辅导系列

1. 考研数学(一)历年真题分题型精解
2. 考研数学(二)历年真题分题型精解
3. 考研数学(三)历年真题分题型精解
4. 考研数学一常考题型解题方法技巧归纳(第二版)
5. 考研数学二常考题型解题方法技巧归纳(第二版)
6. 考研数学三常考题型解题方法技巧归纳(第二版)
7. 考研数学一全真模拟试题及解析
8. 考研数学二全真模拟试题及解析
9. 考研数学三全真模拟试题及解析

二、毛纲源理工类数学辅导系列

1. 高等数学解题方法技巧归纳(上册·第 2 版)
   (与同济大学数学系编·六版配套)
2. 高等数学解题方法技巧归纳(下册·第 2 版)
   (与同济大学数学系编·六版配套)
3. 线性代数解题方法技巧归纳(第 3 版)
   (与同济大学数学系编·五版配套)
4. 概率论与数理统计解题方法技巧归纳(第 2 版)
   (与浙江大学盛骤等编·四版配套)

三、毛纲源经济类数学辅导系列

1. 经济数学(微积分)解题方法技巧归纳(第 3 版)
   (与人大版赵树嫄主编·三版配套)
2. 经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳(第 3 版)
   (与人大版赵树嫄主编·四版配套)
3. 经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳(第 3 版)
   (与人大版袁荫棠编·修订本配套)

目　录

第一章 函 数

【知识概要】

一、集合

1. 集合：具有某种属性的事物的全体，或是一些确切对象的汇总.

2. 元素：构成集合的事物或对象.

3. 集合与元素的关系.

(1) a 属于 A 或 a 在 A 中，记作 $a\in A$；

(2) a 不属于 A 或 a 不在 A 中，记作 $a\notin A$.

4. 空集：不包含有任何元素的集合，记作 $\varnothing$.

5. 全集：所研究的所有事物组成的集合，记作 U.

6. 集合的关系与运算.

(1) A 是 B 的子集：若 $a\in A$，则 $a\in B$，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

规定：空集为任意集合的子集.

(2) A 与 B 相等：当两集合满足 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(3) 交集：由集合 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$.

(4) 并集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$.

(5) 差集：设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$.

(6) 补集：全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$.

7. 集合运算律.

(1) 交换律：① $A\cup B=B\cup A$；② $A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：① $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

② $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：① $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

② $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德·摩根律：① $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$；② $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

8. 笛卡尔乘积：设有集合 A 和 B，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$.

二、实数集

1. 数轴：具有原点、正方向和单位长度的直线.

2. 绝对值：一个实数的绝对值 x，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

3. 有限区间：设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1) 开区间——$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

(2) 闭区间——$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开区间——$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

在有限区间中，$b-a$ 称为区间的长度.

4. 无限区间：

(1) $(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$；　　(2) $[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$；

(3) $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；　　(4) $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

5. 点 x_0 的邻域(称 $\delta>0$ 为邻域的半径).

(1) 点 x_0 的 δ 邻域：实数集合 $\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，称为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

(2) 点 x_0 的 δ 空心邻域：实数集合 $\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，称为以点 x_0 为中心、半径为 δ 的空心邻域.

三、函数

1. 函数：设 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x),x\in D$.

其中：(1) x 称为自变量，y 称为因变量；

(2) 集合 D 称为映射 f 的定义域，也记作 $D(f)$；

(3) 全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 $Z(f)$；

(4) 对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值.

2. 函数的图形：平面点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x), x\in D(f)\}$ 即为定义在 $D(f)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图形.

四、函数的几种简单性质

1. 奇偶性：给定函数 $y=f(x)$，$D=D(f)$ 关于原点对称，有下述结论.

(1) 如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

2. 周期性：对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 a，使得 $f(x+a)=f(x)$ 恒成立，则称 a 为此函数的周期，称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数. 若存在最小正常数 a 满足这个等式，则这个最小正数 a，称为函数的最小正周期.

3. 单调性：如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的（或称单调递增）；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的（或称单调递减）.

4. 有界性：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

五、反函数与复合函数

1. 反函数：设 $y=f(x)$ 定义在 $D(f)$ 上的一个函数，值域为 $Z(f)$. 如果对每一个 $y\in Z(f)$，有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则记作 f^{-1}，这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

2. 复合函数：设有函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数，其中，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

六、基本初等函数

1. 常量：$y=c$.

2. 幂函数：$y=f(x)=x^a$（a 是常数）.

3. 指数函数：$y=f(x)=a^x$（a 是常数，且 $a>0, a\neq 1$）.

4. 对数函数：$y=f(x)=\log_a x$（a 是常数，且 $a>0,a\neq1$）.

5. 三角函数

(1) 正弦函数：$y=\sin x$.

(2) 余弦函数：$y=\cos x$.

(3) 正切函数：$y=\tan x$.

(4) 余切函数：$y=\cot x$.

(5) 正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

(6) 余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数：$y=\arcsin x$.

(2) 反余弦函数：$y=\arccos x$.

(3) 反正切函数：$y=\arctan x$.

(4) 反余切函数：$y=\mathrm{arccot}\, x$.

七、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成，并可用一个式子表示的函数.

【考点综述】

一、考试内容

集合的概念及其表示；函数的概念及表示法；函数关系的建立；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数；基本初等函数的性质及其图形.

二、考试重点

1. 集合的表示.

2. 函数的概念.

3. 建立简单的函数关系.

4. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

5. 复合函数及反函数.

6. 初等函数及其图形.

三、常见考点

1. 函数的定义域.

2. 讨论函数的有界性、单调性和奇偶性.

3. 研究函数的周期.

4. 讨论复合函数.

5. 求函数的反函数.

6. 初等函数.

四、历年试题分数统计

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
分数				3										
年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	
分数														

【经典例题】

例 1 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(3) $y=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　　(4) $y=\frac{\arccos\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

解 (1) $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$

$$\Rightarrow D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(2) $\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\Rightarrow|x-1|\leqslant 2\Rightarrow D(f)=[-1,3]$.

(3) $\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ |x|>1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(4) $\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x-1|\leqslant 7\\ (x-3)(x+2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2\text{ 或 }x>3\end{cases}$

$$\Rightarrow D(f)=[-3,-2)\cup(3,4].$$

例 2　函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且 $f(0)=f(1)$，若对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，证明 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}$.

证　任取 $x_1,x_2\in[0,1]$，不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$.

若 $x_2-x_1<\frac{1}{2}$，则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|<\frac{1}{2}$；

若 $x_2-x_1\geqslant\frac{1}{2}$，由于 $f(0)=f(1)$，有

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|f(x_1)-f(0)-[f(x_2)-f(1)]|\\&\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(x_2)-f(1)|\\&\leqslant|x_1-0|+|x_2-1|\\&=x_1+1-x_2=1-(x_2-x_1)\leqslant\frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以
$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

例 3　设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$，若 $x_1<x_2$，有 $-x_2<-x_1\in(0,l)$，因 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_2)<f(-x_1)$. 又 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 内的奇函数，则

$$f(x_1)=-f(-x_1)<-f(-x_2)=f(x_2),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

例 4　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$a>0,b>0$，若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明：对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

证　任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，则

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\geqslant\frac{f(x_2)}{x_2},\quad 即\quad x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1).\qquad ①$$

而 $x_2\leqslant x_1+x_2$，同理，可得

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\geqslant\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\quad 即\quad x_2f(x_1+x_2)\leqslant(x_1+x_2)f(x_2).\qquad ②$$

由式①、式②得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2(f(x_1)+f(x_2)),$$

又 $x_2\in(0,+\infty)$,故

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

例 5 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1) ① 设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间$(-l,l)$上的偶函数,即 $f_1(-x)=f_1(x)$,$f_2(-x)=f_2(x)$,则

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$为区间$(-l,l)$上的偶函数,即两个偶函数的和是偶函数.

② 设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间$(-l,l)$上的奇函数,即 $f_1(-x)=-f_1(x)$,$f_2(-x)=-f_2(x)$,则

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)-f_2(x)=-f(x),$$

故 $f(x)$为区间$(-l,l)$上的奇函数,即两个奇函数的和是奇函数.

(2) ① 设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间$(-l,l)$上的偶函数,即 $f_1(-x)=f_1(x)$,$f_2(-x)=f_2(x)$,则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$为区间$(-l,l)$上的偶函数,即两个偶函数的乘积是偶函数.

② 设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为定义在区间$(-l,l)$上的奇函数,即 $f_1(-x)=-f_1(x)$,$f_2(-x)=-f_2(x)$,则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=f(x),$$

故 $f(x)$为区间$(-l,l)$上的偶函数,即两个奇函数的乘积为偶函数.

③ 设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别为定义在区间$(-l,l)$上的偶函数与奇函数,即 $f_1(-x)=f_1(x)$,$f_2(-x)=-f_2(x)$,则

$$f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=-f_1(x)f_2(x)=-f(x),$$

故 $f(x)$为区间$(-l,l)$上的奇函数,即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

例 6 设函数 $f(x)$为定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的任何不恒等于零的函数,则( )必是偶函数.

(A) $F(x)=f(x)-f(-x)$ (B) $F(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $F(x)=f(-x)-f(x)$ (D) $F(x)=f(-x)+f(-x)$

答 (B).因(B)中 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$.

例 7 设 $f(x)$,$\varphi(x)$都是偶函数,且它们的定义域、值域均为

$(-\infty,+\infty)$，则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$与$f[\varphi(x)]$都是偶函数

(B) $\varphi[f(x)]$与$f[\varphi(x)]$都是奇函数

(C) $\varphi[f(x)]$与$f[\varphi(x)]$都是非奇非偶函数

(D) $\varphi[f(x)]$是偶函数，$f[\varphi(x)]$是非奇非偶函数

答　(A). 因$\varphi[f(-x)]=\varphi[f(x)]$，$f[\varphi(-x)]=f[\varphi(x)]$.

例 8(1990. 3)　设$f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则$f(x)$是(　　).

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

答　(B). 显然$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{2}$附近无界，应选(B).

例 9　设$f(\sin x)=\cos 2x+1$，求$f(\cos x)$.

解 1　用拼凑法求解.

由于$f(\sin x)=-2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}+2=-2\sin^2 x+2$，可见$f(t)=-2t^2+2$，所以

$$f(\cos x)=-2\cos^2 x+2=2\sin^2 x.$$

解 2　用变量代换求解.

令$t=\sin x$，则$f(t)=\cos 2x+1=(1-2\sin^2 x)+1=-2t^2+2$，所以

$$f(\cos x)=-2\cos^2 x+2=2\sin^2 x.$$

例 10　设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x)$.

解 1　由于$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，可见$f(t)=t^2-2$，所以$f(x)=x^2-2$.

解 2　令$t=x+\dfrac{1}{x}$，则$f(t)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$，所以$f(x)=x^2-2$.

例 11　若$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$等于(　　).

(A) $\dfrac{x^n}{(1+x^2)^{n/2}}$　(B) $\dfrac{x^n}{(n+x^2)^{n/2}}$　(C) $\dfrac{x^n}{(1+nx^2)^{n/2}}$　(D) $\dfrac{x}{(1+nx^2)^{1/2}}$

答　(D). 因为$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，假设$f_{n-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，则

$$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))=\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}{}^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}}{\sqrt{1+\left[\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}\right]^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 12 设 $3f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$,求 $f(x)$.

解 由已知条件知 $\begin{cases}3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x,\\ f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x},\end{cases}$ 则 $f(x)=\frac{1}{8}\left(3x-\frac{1}{x}\right)$.

例 13 已知 $f(x)$为二次函数,且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$,求$f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-4x,$$

即 $$2ax^2+2bx+2(a+c)=2x^2-4x,$$

比较等式两端,得 $$2a=2,\quad 2b=-4,\quad 2(a+c)=0,$$

于是 $$a=1,\quad b=-2,\quad c=-a=-1.$$

故 $$f(x)=x^2-2x-1.$$

例 14 设 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0)$,求其反函数.

解 $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow(cx+d)y=ax+b\Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,将 x 与 y 互换,得 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$,即为所求.

例 15 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

解 当$-\infty<x<1$ 时,$y=x\Rightarrow x=y$,反函数就是其本身.

$$Z(f)=(-\infty,1)\Rightarrow D(f^{-1})=Z(f)=(-\infty,1),$$

于是 $$y=f^{-1}(x)=x\quad(-\infty<x<1).$$

当$1\leqslant x\leqslant4$ 时, $y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$, $1\leqslant x\leqslant4\Rightarrow x=\sqrt{y}$,

$$Z(f)=[1,16]\Rightarrow D(f^{-1})=Z(f)=[1,16],$$