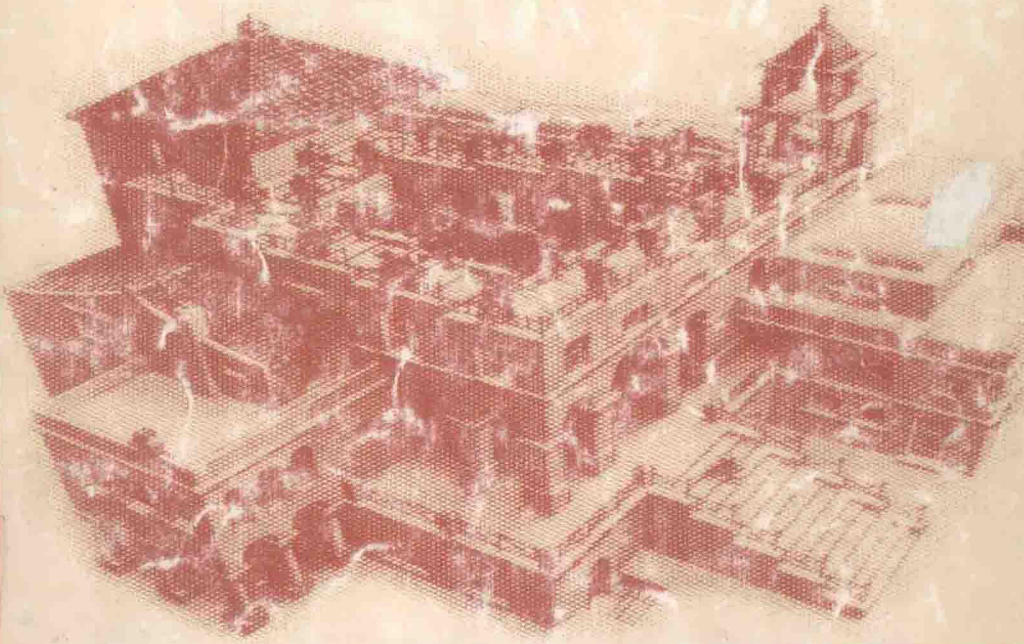
全日制高级中学课本（必修）

数学 第一册

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著

教学参考书

JIAOXUECANKAOSHU



北京 [illegible] 出版社

全日制高级中学课本（必修）

数　学　第一册

教学参考书

教育部《中学数学实验教材》研究组　编著

北京师范大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

全日制高级中学课本·数学（第1册）教学参考书/教育部《中学数学研究组》编著. —北京：北京师范大学出版社，2003.6

ISBN 7-303-05828-1

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 原…　Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 041159 号

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：185 mm×260 mm　印张：10.75　字数：240 千字
2003 年 7 月第 2 版　2006 年 8 月第 5 次印刷
印数：7 001～9 000 册　定价：12.00 元

第一章　集合与逻辑初步

Ⅰ. 教学要求

1. 使学生理解集合的概念，并能正确地运用两种表示方法；理解元素对集合的属于关系；熟悉常用数集的符号 **N**, **Z**, **Q**, **R**.

2. 使学生了解全集、空集和补集的意义及符号与表示法.

3. 使学生了解属于、包含、相等关系以及子集的意义，并会运用有关符号正确地表示这些关系.

4. 使学生理解交集、并集的概念，并能正确运用有关符号表示出一些集合的交与并.

Card(A∪B) = CardA + CardB − Card(A∩B)

5. 使学生了解两个有限集合交、并集元素的个数计算公式，并能初步应用.

6. 使学生了解命题、量词（∀，∃）的意义，能正确运用符号表述全称命题与存在性命题；理解逻辑联词"或"、"且"、"非"的含义、符号和真值表，了解逻辑联词"如果""那么"的含义、符号和真值表；理解命题 $p \to q$ 的四种形式及其等效关系；掌握充分必要条件的意义.

7. 使学生了解集合与命题之间的对应关系，了解集合关系与逻辑用语之间的密切联系，从而能更好地自觉运用.

Ⅱ. 教材内容编排、重点与难点及课时分配

1. 本章教材是作为高中数学的基础、工具、语言而设置的，不是讲"集合论"、"数理逻辑学"，而是集合基本知识初步和逻辑基础入门. 目的是在高中数学的教与学中，通过这些初步知识，对数学的基本概念、基础知识能理解得更深刻，表达得更明确，对数学中的计算、推理能更理解，思维更符合逻辑规律. 同时，也为学生参阅一般科技读物和以后学习现代数学、进行数学交流打下一定的基础.

2. 围绕集合、逻辑的初步基础，本章教材安排了两个单元的基本内容：

第一单元是集合及其运算，主要包括集合及其表示法，全集、空集和补集，属于、包含关系，子集、交集、并集等概念，同时还介绍了两个有限集合的交、并的元素个数计算公式. 在这个单元的最后，将交、并视为集合之运算，介绍了德摩根律，将其作为选学内容，供教学中参考. De Morgan法则 $(\cup A)^c = \cap A^c$ $(\cap A)^c = \cup A^c$

第二个单元是逻辑初步，主要包括命题与量词（∀，∃），逻辑联词——且、或、非以及它们的真值表，命题 $p \to q$ 的四种形式及其等效关系、充要条件等. 而且还特别对集合与逻辑的用语介绍了它们之间的对应关联，以便使本章内容更融洽、更有用、更有效.

3. 本章内容的重点有两个：集合的有关概念（集合、全集、交集、并集、补集）及其表示法；命题、量词、逻辑联词的概念和符号表述.

本章内容的教学难点有四个：①有关集合的各个基本概念的涵义及相互之间的区别和联系；②量词的涵义、陈述与表达；③逻辑联词的意义、符号、真值表的理解；④充要条件

的意义、表述和应用.

教学中要突出重点，分散难点.欲取得较好的效果，关键要注意从实例出发，让学生领略概念的形成背景，由感性认识提高到理性认识；要注意运用对比方法，反复比较类似或有从属关系的概念的异同；要注意结合图示、符号、维恩图进行直观说明.

4. 本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下：

§1　集合及其运算	
1.1　集合及其表示法	约 1 课时
1.2　全集、空集和补集	约 1 课时
1.3　集合之间的关系及运算	约 2 课时
1.4　两个有限集合交、并集元素的个数	约 1 课时
*1.5　德摩根律	
§2　逻辑初步	
2.1　命题与逻辑联结词	约 4 课时
2.2　命题的四种形式	约 2 课时
*2.3　集合与逻辑用语	约 1 课时
全章复习与小结	约 2 课时

Ⅲ. 教材分析与教学建议

§1　集合及其运算

1.1　集合及其表示法

1. 集合是数学中最原始的概念之一，无法用其他更基本的概念为它下定义，因而称其为原始概念或不定义概念.教材中只给集合作出描述性的说明：从学生熟悉的已有的知识出发，用分别由几何图形、自然数、方程的根、圆周上的点以及具体的物体等组成的整体为实例引入集合的概念，并通过实例特别强调了集合中元素的确定性与互异性.这样既突出了这一概念的要点，又便于学生接受，更说明了这一概念同样是由客观现实世界中得来的.

描述性定义.

2. 集合这一概念的惟一要素是元素.教材中把集合描述为“有确定对象的集体”，并指出“它含有的各个对象，称为该集合的元素”；下文中还进一步指出“集合中的元素必须是完全确定的，还必须是互异的”.这样的描述，实质上是基本接近于集合论的创始人德国数学家康托尔(Georg Cantor，1845—1918 年)的提法，他称集合是一些确定的、不同的东西的总体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定东西是否属于这个总体.

3. 集合中的元素具备两个特征，教学中可以这样解释：

(1)确定性特征.设集合 A 给定，今有一具体对象 x，则 x 是 A 的元素，或者 x 不是 A 的元素，这二者必居且只居其一.

(2)互异性特征.设集合 A 给定，A 的元素是指含于其中的互不相同的元素；同一集合中，同一元素不得重复出现.

根据上述两个特征，就可以为正确表述集合打下基础.

4. 依据集合中含有元素的个数，可将集合分类为无限集与有限集. 同时，教材中提出了用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素. 为了明确二者之间的关系，则引入了符号“$\in$”，正确地表示 $a\in A$，读作元素 a 属于集合 A；相应地符号“$\notin$”表示不属于. 对任一元素 x 与集合 A，关系 $x\in A$ 与 $x\notin A$ 必有且只有其一成立. 在这一教学内容中就势引进了常用的数集符号 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{N}_{+},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 等. 教学中要明确意义，熟悉符号，着眼于实际应用.

5. 集合的表示法，教材中介绍了两种： 图示法

(1)列举法. 将集合含有的元素逐个列举出来，置于大括号之内，如 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$M=\{2,4,6,8\}$. 教材中虽然指出“列举集合元素的顺序无关紧要”，如集合 M 还可以写成 $M=\{2,8,4,6\}$，但也应明确地指出，习惯上表示数集时，仍是按其大小次序排列为好，这样对一些元素排列有规律的数集，甚至是无限集也易于列举法表示. 如：集合 $\{51,52,53,\cdots,100\}$ 可表示从 51 到 100 的自然数集合；集合 $\{1,3,5,7,9,\cdots\}$ 可表示正的奇数集(无限集).

(2)描述法. 概括地说，描述法表示集合 F 的子集 A，就是以下形式：

$$A=\{x\in F\mid p(x)\},$$ 界定性和特性

或 $A=\{x\in F:p(x)\}$，或 $A=\{x\in F;p(x)\}$. 其中 F 是 x 的取值范围(全集)，$p(x)$ 是集合 A 中 x 具有的特征性质，即 $x\in A\Leftrightarrow p(x)$.

应该指出：①有些集合的元素可能不用单个字母 x 表示，例如，由曲线 $y=x^2$ 上所有的点组成的集合，可记作 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$，其中的代表元为 (x,y)，一般不需注明 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$，也不至于引起误会；有时集合的代表元 x 亦可省略不写，直接写出元素之名称，然后用大括弧括起来表示这类元素之全体，比如：{奇数}，就表示所有奇数组成的集合，因而不应写成{全体奇数}.

②列举法、特征性质描述法表示集合各有优、劣，应用时要具体问题具体分析，按实际问题而定. 有些集合可以随便选用一种表示法，有些集合却只能选用其中某一种方法，如集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 1\}$ 就无法用列举法表示，集合 $\{-7,0,3\}$ 就不宜用特征性质描述法表示.

③ 表示集合时，要注意防止和纠正以下错误：将集合 $\{(1,2)\}$ 错误地写成 $\{1,2\}$ 或 $\{x=1,y=2\}$；将集合 $\mathbf{R}$，误写成 $\{\mathbf{R}\}$、{实数集}等.

1.2 全集、空集和补集

1. 全集的概念是自然引入的. 人们在日常生活、工作和学习中都会体会到：研究任何问题、讨论任何对象都不会是泛泛地，而是有范围的，而且同一个问题在不同的范围内，常会有不同的结果. 教材中以学生已有的方程的解集为例加以说明，进而提出“研究某类问题时，所涉及的一切对象组成的集合，叫全集”. 这就是说，全集是个相对于所研究的问题的概念，它含有与所研究的问题有关的各集合的全部元素. 因此，全集因所研究的问题而异. 中学数学中研究函数、解不等式都将实数集作为全集.

2. 作为特殊规定：不含任何元素的集合，称为空集，记作 $\varnothing$. 在教学中结合不等式组无解的问题讲解空集，学生是容易理解的. 但要提醒学生注意：空集 $\varnothing$ 与数 0 或单元素集合 $\{0\}$ 不能混为一谈，也不要错误地将空集表示成{空集}或 $\{\varnothing\}$.

3. 补集在教材中也给出描述性定义：若从全集中取出集合 A 的所有元素，由剩下的元素所组成的集，就叫集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$. 严格地讲，补集可以用数学表达式定义为

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

由此，还使我们联想到"差"的概念，事实上，这里定义的补集 $\complement_U A$，就是全集 U 与集合 A 的差集，即 $\complement_U A=U\setminus A$（相当于 $U-A$）.

在不少文献上常将两个集合 A,B 的差集定义如下：

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

有时称其为相对补集或余集，而把教材中定义的全集与集合 A 的差集，称为绝对补集或余集.

4. 由补集定义，可推出它的简单性质：

$$① \complement_U(\complement_U A)=A;\quad ② \complement_U U=\varnothing;\quad ③ \complement_U\varnothing=U.$$

它们的证明都是显然的，教学中可以用维恩图直观给予说明，也可以根据定义给予简单证明，以加深理解. 现给出证明如下，供教师参考：

证明 ① 由补集的定义可知，

$$\begin{aligned}\complement_U(\complement_U A)&=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin \complement_U A\}\\&=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\in A\}=A;\end{aligned}$$

② $\complement_U U=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin U\}=\varnothing$;

③ $\complement_U\varnothing=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin \varnothing\}=U$.

5. 充分利用例 6 及练习，使学生会根据定义及题设去求出一些简单集合的补集，并领略全集的意义.

1.3 集合之间的关系及运算

1. 本单元教材的中心内容是讨论集合之间的关系：包含关系、真包含关系以及相等关系. 其中包含关系是重点. 还讨论集合之间的两种运算（交、并），虽然教材中并没有直接讲到这是集合的运算，仅是作为交集、并集给出定义，但教学中也可以适当提出"运算"观点，这样可使学生对交、并集的理解加深，同时也便于由 A,B 求出 $A\cap B$ 及 $A\cup B$.

2. 通过实例要注意区别"包含"、"包含于"、"真包含"、"真包含于"、"不包含"等不同涵义与不同表示方法的概念. 在教学中应以 $A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 这对互逆的关系为主去展开，亦可适当提出 $A\subseteq B$ 与 $A\nsubseteq B$ 这对互否的关系说明；同时指出 $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是同义的关系，指出 $A\subseteq B$ 意味着 $A=B$ 与 $A\subsetneqq B$ 两种情况中必有且只有一种成立，$A\subsetneqq B$ 是显然的.

3. 要由实例引进子集的概念，正确阐述子集概念的涵义，防止理解偏差.

由教材中的定义 2，子集的涵义是：A 的任何一个元素都属于集合 B，即若 $a\in A$ 则 $a\in B$. 教学中要注意正确把握这一内涵，不宜随意将子集说成是"集合中的部分元素组成的集合". 因为这样的说法不严格，排除了"空集是任何集合的子集"，也排除了"A 是 A 的子集".

正确理解子集的意义，就可以顺理成章地推出：

①$A\subseteq A$；②$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$（包含的传递性）；③$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Rightarrow A=B$；④含

有 n 个元素的集合 A，共有子集 2^n 个；真子集 2^n-1 个.

同时，由教材定义 3 知：若 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，并引出真包含关系 $A\subsetneqq B$. 由此，在教学中要注意对空集的特殊处理，不能说“空集是任何集合的真子集”，只能说“空集是任何非空集合的真子集”. 这是因为，空集不是空集的真子集，即 $\varnothing\subseteq A$；$\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$.

4. 关于“两集合相等”的概念，教材中虽然没有太多展开，仅仅由 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 而导出 $A=B$. 教学中可以略加说明如下：

因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素也都是 A 的元素. 这就是说，集合 A,B 的元素完全相同，因此，我们称集合 A 与 B 是相等的.

经过这样的说明，一方面有助于学生理解两集合相等的合理性，另一方面还由此得到一种启示：若要证明 $A=B$，只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立即可. 利用集合相等的概念，对中学数学中的一些原理、概念可以叙述得更简明、更深刻. 例如：同解方程、同解不等式可以定义为“两个解集相等的方程(或不等式)”；要证明几个方程(或不等式)同解，实质上就是要证明这几个方程(或不等式)的解集相等.

5. 教学中还要注意通过练习、习题的训练，区别符号 $\in$ 与 $\subseteq$(或 $\subsetneqq$)的不同涵义，强调“$\in$”用在元素与集合之间，表示从属关系；$\subseteq$(或 $\subsetneqq$)用在集合与集合之间，表示包含(真包含)关系. 为此可以设计类似下列两个例题，让学生识别：

1° 设 $A=\{0,1\}$ 且 $B=\{x\mid x\in A\}$，问 A,B 是何关系？

2° 设 $A=\{0,1\}$ 且 $D=\{x\mid x\subseteq A\}$，问 A,D 是何关系？

例 1°中，$B\subseteq A$ 是显然的，因为 B 的元素 $x\in A$，因此集合 B 可以是：$\{0\}$；$\{1\}$；$\{0,1\}$.

例 2°中，A 是 D 的元素，因为 $x\subseteq A$，说明 D 集的元素 x 是集合 A 的子集，因而，集合 D 是一个以集合为元素的集合，它的元素是 A 的子集(包含 A 本身). 因此，集合 D 可以是：$\{\varnothing\}$；$\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$；$\{\{0\}\}$；$\{\{0,1\}\}$；$\{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ 等等.

6. 关于交集的概念，教学中应注意以下几点：

(1)教材中的定义 4 以文字语言的形式给出了交集的定义，同时还写出了这一定义的数学表达式：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{并且 }x\in B\}.$$

通过实例，学生是不难理解和掌握的，但在教学中要重点强调“并且”二字，它表明 $A\cap B$ 的任一元素 x 都是集合 A 与 B 的公共元素. 因此还可以知道：$A\cap B$ 必是 A 与 B 的公共子集，即

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B.$$

(2)例 10 至例 12 是学生熟知的数学知识，利用这些要让学生深刻领会交集的意义，并掌握应用集合的语言、形式去处理. 其中，例 10 重温了初中解一元一次不等式组的问题；例 11 总结了平面上两条直线的位置关系；例 12 则叙述了二元一次方程组的求解过程与结果.

(3)在理解交集的涵义及简单应用的基础上，可以直接推出它的一些简单明确的性质：

$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap\complement_U A=\varnothing,\quad A\cap U=A,$$

以及 $$A\cap B=B\cap A,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C.$$

这些性质在教学中不是重点，一般可以由维恩图直观说明，使学生有所了解，加深对交集(或交运算)的认识即可. 以下简单证明仅供教师参考，教学中一般不引进.

(i) $A\cap A=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in A\}=\{x\mid x\in A\}=A$.

(ii) 由于 $A\cap B\subseteq B$，所以 $A\cap\varnothing\subseteq\varnothing$；又由于 $\varnothing$ 是任何集合的子集，所以 $\varnothing\subseteq A\cap\varnothing$. 故 $A\cap\varnothing=\varnothing$.（集合相等定义）

其实，这个性质用反证法证明也很妙：假若 $A\cap\varnothing\neq\varnothing$，则它至少含有一个元素 x，由交集定义知，$x\in\varnothing$. 这与 $\varnothing$ 定义是矛盾的，所以 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(iii) $A\cap\complement_U A=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in\complement_U A\}=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in U \text{ 且 } x\notin A\}=\varnothing$.

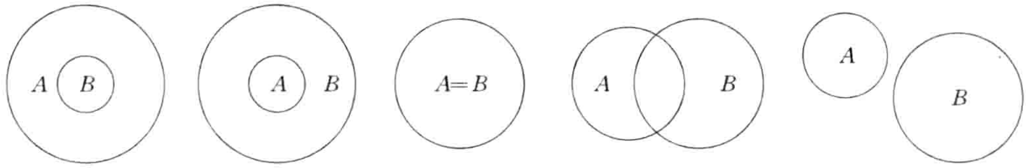
事实上，对于同一个元素 x，不可能使 $x\in A$ 与 $x\notin A$ 同时成立，所以 $A\cap\complement_U A=\varnothing$.

(iv) $A\cap U=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in U\}=\{x\mid x\in A\}=A$.

(v) $A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}=\{x\mid x\in B,\text{且 } x\in A\}=B\cap A$.

(vi) 同理可证：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$.

(4) 作为交集概念的应用，不妨在小结时启发学生讨论下列图中每一组集合 A,B 的交集：



(i) 若 $A\supset B$，则 $A\cap B=B$.

(ii) 若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$.

(iii) 若 $A=B$，则 $A\cap B=A=B$.

(iv) 若 A,B 交叉，则 $A\cap B\neq\varnothing$.

(v) 若 A,B 分离，则 $A\cap B=\varnothing$.

从而，让学生确信：无论集合 A,B 是何种关系，$A\cap B$ 总是有意义的.

7. 关于并集概念，教学中应注意以下几点：

(1) 教材中给出了并集的定义，同时也给出了这一定义的数学表达：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或者 } x\in B\}.$$

注意强调其中的“或者”的意义：它和日常生活中的“或者”(不可兼)是有别的，这里的“或者”是可兼的. 也就是说，用“或者”连接的并列成分之间不一定是互相排斥的. “$x\in A$，或者 $x\in B$”意味着三种情况：$x\in A$ 但 $x\notin B$；$x\in B$ 但 $x\notin A$；$x\in A$ 且 $x\in B$(这正是构成 $A\cap B$ 的元素). 还要注意，在 $A\cup B$ 中，A 与 B 的公共元素只能出现一次，因此，$A\cup B$ 是由所有至少属于 A,B 两集合之一的元素组成的. 由此也不难知道：A 与 B 都是 $A\cup B$ 的子集. 又已知 $A\cap B$ 是 A 同时又是 B 的子集，因此可得出：$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

(2) 对并集的意义有了一定的认识后，例 13、例 14 又以学生熟知的数学知识，进一步运用并集的概念加以处理，使学生对并集有深一步的理解.

(3) 通过并集的定义，结合维恩图的表示，可以直接推导出它的一些简单性质：

$$A\cup A=A;\quad A\cup\varnothing=A;\quad A\cup\complement_U A=U;\quad A\cup U=U.$$

以及

$$A\cup B=B\cup A;\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C.$$

对学有余力的学生，亦可引导他们仿照交集的相应性质加以证明.

(4)研究题是已知并集 $A\cup B$，逆求 A,B. 通过这一研究，可以进一步理解并集的意义，也是培养学生创造性地积极思维的好时机，教学中不妨开放式地让学生去讨论.

1.4　两个有限集合交、并集的元素个数

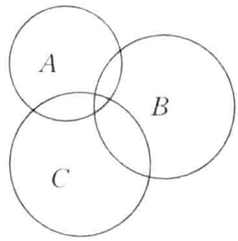
1. 有限集合所含元素个数的计数问题应用广泛，也是中学生可以接受的原理. 教材结合实际问题，以集合、交集、并集等概念为依据，借助维恩图的直观给出了一个计数公式：

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

教学中一般只要求理解公式，会初步应用即可，不必做过多的练习；但对学有余力的同学，可以思考将公式推广到三个有限集合 A,B,C 的情况，类似地得出.

2. 设有限集 A,B,C，则有

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$$
$$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$



可以由维恩图加以说明.

这样，复习题一 B 组第 3 题便迎刃而解了.

***1.5　德摩根律**

属于选学内容，只要求了解交、并、补集的相结合满足该定律，

$$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B,$$
$$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B.$$

总之，这一节内容的重点是集合、子集、交集、并集以及全集、补集、空集的概念和表示方法及符号，例题、练习、习题乃至复习题都是为此重点服务的. 由定义推导出来的简单性质，也是为了更好地理解基本概念，熟悉符号与表示法，以便丰富学生的数学语言，提高表达能力. 教材中没有提及“集合的运算”，也没有提及运算律，目的是让学生能集中学好重点，明确概念，理解涵义，弄清区别与联系，以避免混乱. 其实，只要学好了这些基本内容，在应用中会逐步体会，到“集合”这一数学对象是可以进行“交、并、补(差)”运算的，而且也满足一些运算律的.

§2　逻辑初步

2.1　命题与逻辑联结词

1. 关于命题，教材上给出了定义 1：用语言、符号或式子表达的，而且能判断真假的语句叫做命题. 其中的要点是“语句”，“能判断真假的语句”. 至于表达形式可以是语言文字，亦可以是符号、数学式子等. 这里通过实例让学生有所领悟就可以了，不必去深究. 但是，应提醒学生注意：不是任何语句都可以称为命题的，特别是疑问句、祈使句和感叹句一般都不直接表达命题，只有陈述句才直接表达一个命题. 教学中不妨举例说明：

例　$\sqrt{2}$ 是一个无理数.　　　　　(陈述句)

　　$\sqrt{2}$ 是无理数吗？　　　　　(疑问句)

我们要认真研究$\sqrt{2}$.　　　　（祈使句）

$\sqrt{2}$是个多么难以理解的数呀！（感叹句）

2. 教材的重点是研究数学命题，而数学中常有一些含有变数x的语句，如：一元一次方程$x+2=0$. 由命题的定义知，这不是命题（不少文献中称之为"开句"，逻辑书中称之为变项）. 然而，当赋予变量某个值或一定条件时，它们就可以转化为能判断真假的语句即命题. 可见，开句转化为命题的条件是：赋予变量x以值或条件. 教材中以$x+2=0$为例，提出赋予x两种不同条件的两种转化模式，从而引出了两个重要的量词，组成两类重要的数学命题：

当$x=-2$时，$x+2=0$；（真）　　　　$\exists\ x=-2$，使$x+2=0$.

x为任何实数时，$x+2=0$；（假）　　　　$\forall\ x\in\mathbf{R}$，有$x+2=0$.

在理解的基础上，将存在性命题、全称命题的一般形式概括出来，展示给全体学生：

$$\exists\ x\in M，使\ p(x)成立，$$

$$\forall\ x\in M，有\ p(x)成立.$$

这里应注意训练学生识别量词符号，明确意义，熟悉语言叙述.

3. 教材中例1给出了存在性命题、全称命题各两个，让学生判断真假. 在分析中特别提出了两条判断命题真、假的通则：判断存在性命题真，只要找到变量的一个值，能使命题成立即可；判断全称命题假，只要找出变量的一个值，能使命题不成立即可（一个反例即可推翻证题）. 例1中的(1)，(3)就是如此.

当然，判断存在性命题假，或全称命题真，就要在限定的集合中，逐个元素验证才行，这样的验证就是数学中的证明，例1中的(2)，(4)就是如此.

让学生体验对命题真假的判断过程，就是提出反例或进行逻辑论证的过程，从而培养和提高学生的思维能力.

4. 存在性命题、全称命题在数学中很广泛，要注意使学生掌握这两类命题的意义、符号和表述方法. 教材中列出了它们在不同场合下的各5种表述方法，注意让学生熟悉，通过练习务求把握，以备日后学习使用. 至于同时含有两个量词的命题，教材中一律没有涉及.

5. 关于命题的逻辑联结，教材中重点要介绍用逻辑联词"且"、"或"、"非"组成的复合命题的意义、符号及真值表，目的是使学生了解和理解数学推理的逻辑基础，为今后学习数学打好基础，做好准备. 教学中一定要注意：理解意义、熟悉符号、了解真值表，对分析数学命题，进行逻辑推理有指导作用是教学的主要目标；对逻辑联词的认识只要求"组成新命题"，不提"命题演算"，因而也不提"运算律".

(1)"且". 作为逻辑联词，"且"就是日常生活语言中的和、与. 因此，组成命题$p\wedge q$的意义是容易理解的，它的真值表亦不难理解和掌握. 教学中只要多举一些学生熟悉的例子，训练学生的表述能力和对符号的使用即可.

(2)"或". 作为逻辑联词，"或"与日常生活语言中的或者是有一点差别的. 生活语言中，许多场合用"或者"是指从联结的几部分中选一，如：我去打篮球或者跑步或者游泳. 而逻辑联词的"或"，却是指联结几部分中至少选一（可兼的）. 明确这一点以后，由"或"联结形成的命题$p\vee q$的意义及真值表就不难理解和掌握了. 教学中要注意应用典型例子，重

点说明“或”的意义，例如，$2\geqslant 2$，$-5\leqslant -5$.

(3)非．逻辑联词“非”的意义就是日常生活语言中的“否定”，就是“全盘否定”．一个命题否定后得到命题$\neg p$，其意义及真值表是合乎情理的，也是容易理解的，教学中不会有什么困难.

但是，已知一个命题，要正确写出它的否定却是有困难的．不过教给学生一个明确的准则是必要而且应该掌握的：否定命题与原命题总是一真一假的，绝对不会同真同假．有了这一准则，就可判定一个命题的否定命题是否写得正确.

例如，存在性命题q：有些三角形是直角三角形(教材P26)．有人可能认为它的否定是：“有些三角形不是直角三角形”，这显然是不正确的，因为它和原来的命题全是真命题，不合逻辑．正确的应写成：“所有三角形都不是直角三角形.”

又如，全称命题p：所有质数都是奇数(教材P26)．它的否定有人认为是：“所有质数都是偶数(或都不是奇数).”这显然也不正确，因为它和原来命题都是假的，不合逻辑．正确的应是：“有一些质数不是奇数(或是偶数).”具体例子分析后，概括出含有量词的两类命题的否定为：

存在性命题“$\exists\ x\in M$，使$p(x)$成立”，其否定为“$\forall\ x\in M$，有$p(x)$不成立”；

全称命题“$\forall\ x\in M$，有$p(x)$成立”，其否定为“$\exists\ x\in M$，使$p(x)$不成立”.

其中，$p(x)$不成立，就是$\neg p(x)$．通过教材中的例5及练习可以使学生基本理解和掌握.

关于命题$p\wedge q$，命题$p\vee q$的否定，教材中通过例6的问题分析，得出一般结论(德摩根律)：

$$\neg(p\wedge q)=\neg p\vee(\neg q);$$
$$\neg(p\vee q)=\neg p\wedge(\neg q).$$

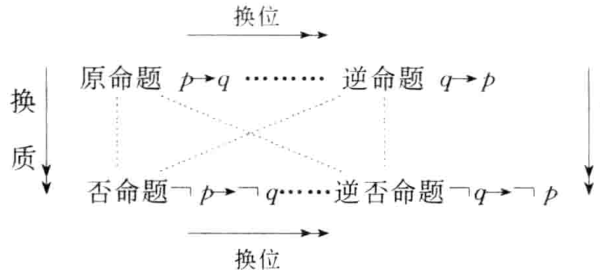
教学中只要求理解，特别是要配合练习第4题填写的真值表，让学生从中看到这两个逻辑等值式是成立的，并会初步应用就可以了.

2.2 命题的四种形式

1．命题的四种形式，主要是指命题$p\rightarrow q$(或可以写成这种命题形式的命题)的前件、后件以及它们各自的“否定”之间的不同形式组合而成的命题．研究这些不同形式命题的组成及它们之间的逻辑联系，对于学习数学命题(性质、关系)、数学证明，训练数学思维，提高数学能力都有一定的作用．教学中必须使学生理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义.

2．就命题$p\rightarrow q$而言，p叫条件(前件)，q叫结论(后件)，它们所在的位置简称为“前、后不同位”；p与$\neg p$，q与$\neg q$各称为不同“质”.

这样，换“位”，换“质”，“换位又换质”就可以得到它的四种形式：



教学中要求正确写出命题的四种形式，并通过例 7、例 8 的实际训练，观察、发现四种命题形式的等效规律（等效，就是同真或同假）．最后推广到一般，概括出教材 P31 中的两条结论：

①互为逆否的命题是等效的；②互逆或互否的命题是不等效的．其中，结论①是重要的，这实际上是今后论证的一种思路．

教材 P31 例 8 中的命题"$\forall\ n\in\mathbf{N}$，若 n 是完全平方数，则 $\sqrt{n}\in\mathbf{N}$"中含有量词的部分"$\forall\ n\in\mathbf{N}$"，可以视为这一命题的"前提"，在换位、换质中保持不动即可．

在教学中注意，还要特别强调否命题 $\neg p\to\neg q$ 与命题的否定 $\neg(p\to q)$ 的不同：形式上前者是前、后件分别否定（换质），而后者是命题的整体否定；逻辑上前者与原命题不等效（不一定同真、假），而后者必与原命题真、假相反（一定不同真、假）；内容上可举例说明二者根本不同，如：

$p\to q$：对顶角相等（若 α 与 β 是对顶角，则 $\alpha=\beta$）；

$\neg p\to\neg q$：不是对顶角不相等（若 α 与 β 不是对顶角，则 $\alpha\neq\beta$）；

$\neg(p\to q)$：不是对顶角相等（α 与 β 是对顶角，且 $\alpha\neq\beta$）．

关于命题 $p\to q$ 的否定命题，前面已经提过：

$$\neg(p\to q)=p\wedge(\neg q).$$

教学中不要求，这里只供教师参考．

3. 关于充分、必要条件，教材从命题 $p\to q$ 的真假，需要证明谈起，首先提出要明确区分符号$\to$与$\Rightarrow$：

$p\to q$ 表示命题，有真、假之分；

$p\Rightarrow q$ 表示 $p\to q$ 真的前提下，称为 p 推出 q.

这里注意：在有的数学教材中，命题 $p\to q$ 若是有意义的真命题，则干脆记为 $p\Rightarrow q$，常常将符号$\to$略而不提．

其次，教材中通过一组例题的分析，紧扣"同一逻辑关系的不同表达形式"这一主题，让学生理解：$p\to q$ 真；$p\Rightarrow q$；p 是 q 的充分条件；q 是 p 的必要条件．这四种形式表达了同一个逻辑关系．

再次，由定义 6、定义 7 给出了充分条件、必要条件、充要条件的准确概念，同时也就指出了判定充分、必要条件的方法途径．

在教学中，可以在理解意义、明确判定方法的基础上，将充分必要条件的各种情况给予详细分析和训练，务必使学生对此牢固掌握．建议可以分为以下几种情形加以训练：

当 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$ 时，p 是 q 的充分不必要条件；

当 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$ 时，p 是 q 的必要不充分条件；

当 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ 时，p 是 q 的充要条件；

当 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$ 时，p 是 q 的既不充分又不必要的条件.

在训练中，还要注意语言的分析和使用需规范、灵活；例题、练习的配备要多样化. 通过教材中P33的例8，要使学生体会推出关系$\Rightarrow$的传递性，但目的还在于理解充分、必要条件，教学中不要求做过多的此类练习.

*** 2.3　集合与逻辑用语**

这一单元内容是本教材的特色之一，将本章前两大单元的集合与逻辑用语加以沟通，融为一体，这样能更深刻地领会有关概念，便于讨论逻辑关系，更牢固地把握集合与逻辑的语言，提高进一步应用的效力.

1. 首先将集合与命题加以沟通，建立联系：

集合 $A=\{x \mid p(x)\}$，其中 $p(x)$ 是描述元素 x 的性质（命题）.

2. 复习、回顾所学集合与逻辑中有关命题的相关内容，从而得出以下各对应关系：

设 $A=\{x \mid p(x)\}=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q(x)\}=\{x \mid q\}$，则

$$A \subseteq B \leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \quad \longleftrightarrow \quad p \Rightarrow q,$$

$$A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \longleftrightarrow p \wedge q,$$

$$A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \longleftrightarrow p \vee q,$$

$$\complement_U A \leftrightarrow (x \in U) \wedge (x \notin A) \quad \longleftrightarrow \quad \neg p (\text{即 } U \wedge \neg p),$$

$$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B \quad \longleftrightarrow \quad \neg(p \wedge q) = \neg p \vee (\neg q),$$

$$\complement_U (A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B \quad \longleftrightarrow \quad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge (\neg q).$$

3. 以上这些关联，不必要求死记硬背，要尽力使学生有所理解，有所领会，在今后学习中不断应用.

Ⅳ. 本章练习、习题、复习题参考答案或提示

P8　1.1　练习

1. (1) {北京，上海，天津，重庆}；

   (2) $\{53, 59, 61, 67, 71, 73, 79\}$；

   (3) $\{\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$；

   (4) {金星，木星，水星，火星，土星，地球，天王星，海王星，冥王星}；

   (5) {鼠，牛，虎，兔，龙，蛇，马，羊，猴，鸡，狗，猪}.

2. (1) $A=$ {长江，黄河，珠江，海河，黑龙江}；

   (2) $B=\{x \mid x^2-10x+25>0\}=\{x \mid x \neq 5\}=(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$；

   (3) $C=\{x \in \mathbf{N} \mid x \leqslant 16\}$；

   (4) $D=\{x \mid x=2m, m \in \mathbf{N}\}$；

   (5) $E=\{x \mid x=10^n, n \in \mathbf{Z}_+\}$.

3. (1) $\{x \mid x$ 是小于 20 的质数$\}$；

   (2) $\{x \mid x$ 是绝对值小于 20 的 6 的倍数$\}$；

   (3) $\{x \mid x$ 是有一个直角的三角形$\}$；

(4){点 $P\,|\,OP=5$}.

P10　1.2　练习

$U=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$;

$A=\{2\}$;$B=\{2,10\}$;$C=\{2,4,8\}$;$D=\varnothing$;

$\complement_U A=\{4,6,8,10,12,14,16,18\}$;$\complement_U B=\{4,6,8,12,14,16,18\}$;

$\complement_U C=\{6,10,12,14,16,18\}$;$\complement_U D=U$.

P12　1.3　练习 1

1. (1)$\in$;(2)$\in$;(3)$\subsetneqq$;(4)$=$;(5)$\notin$;(6)$\subsetneqq$.
2. $\varnothing$;$\{0\}$;$\{1\}$;$\{2\}$;$\{3\}$;$\{0,1\}$;$\{0,2\}$;$\{0,3\}$;$\{1,2\}$;$\{1,3\}$;$\{2,3\}$;$\{0,1,2\}$;$\{0,1,3\}$;$\{0,2,3\}$;$\{1,2,3\}$;$\{0,1,2,3\}$. 共 16 个.
3. $\varnothing$;$\{1\}$;$\{2\}$;$\{4\}$;$\{8\}$;$\{1,2\}$;$\{1,4\}$;$\{1,8\}$;$\{2,4\}$;$\{2,8\}$;$\{4,8\}$;$\{1,2,4\}$;$\{1,2,8\}$;$\{2,4,8\}$;$\{1,4,8\}$. 共 15 个.

P14　1.3　练习 2

1. $A\cap B$;
2. $A\cap B=\varnothing$;$A\cap C=C=$\{等边三角形\};$B\cap C=\varnothing$;
3. $A\cap B=\{(1,1)\}$;$B\cap C=\{(1,1)\}$;$C\cap D=\varnothing$;$A\cap D=\varnothing$;

　　$B\cap D=\{(2,-4)\}$;$A\cap C=A=C=\{(x,y)\,|\,x=t,y=2t-1,t\in\mathbf{R}\}$.
4. $A\cap B=\{x\,|\,x$ 是 12 的正倍数$\}$.

P 16　1.3　练习 3

1. $A\cap B=\{1,3,5\}$;

　$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,9,11\}$;

　$A\cup B\supsetneqq A$;$A\cup B\supsetneqq B$;$A\supsetneqq(A\cap B)$;$B\supsetneqq(A\cap B)$.
2. $A\cap B=\{x\,|\,x>2\}=A$;

　$A\cup B=\{x\,|\,x>-4\}=B$.
3. (1),(2)结论都成立. 上题就是例子.

P16　研究题

已知 $A\cup B=\{1,2\}$,则满足这一条件的集合 A,B 共有 9 对:

	①～④	⑤,⑥	⑦,⑧	⑨
A	$\{1,2\},\varnothing,\{1\},\{2\}$	$\{1,2\},\{1\}$	$\{1,2\},\{2\}$	$\{1,2\}$
B	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$

P17　1.4　练习

解:设$A=$\{能进行英语会话的职员\},

　　$B=$\{能进行俄语会话的职员\}.

则由题意知，$n(A)=100$，$n(B)=80$，$n(A\cup B)=150$.

又 $\because$ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，所以

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=100+80-150=30. \end{aligned}$$

因此，在该公司职员中，既能进行英语会话，又能进行俄语会话的有 30 人.

P18　习题 1－1

1. (1)$\{-11,11\}$；(2)$\{30,36,60,63\}$；

   (3)$\{(x,y)\mid x>0,y<0\}$；

   (4){江苏，江西，黑龙江，浙江，河南，河北，湖南，湖北，上海，青海，海南}.

2. (1)$\{-5,-1,1,3\}$；　(2)$\{(1,2,3)\}$；

   (3)$\{-1,0,1\}$；　(4)$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

3. (1)$\{x\mid x$ 是小于 12 的非负偶数$\}$；　(2)$\{x\mid x=3^n,n\in\mathbf{N}_+\}$；

   (3)$\{x\mid x=\dfrac{2n-1}{2n},n\in\mathbf{N}_+\}$；　(4)$\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{N}\}$.

4. $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant 1\}$；$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -1\}$；$\complement_U C=\{x\mid x\geqslant 3\}$.

5. $A\subsetneqq E$；$B=D$；$B\supsetneqq C$；$D\supsetneqq C$.

6. (1)√；　(2)×；　(3)√；　(4)×；　(5)√；　(6)×；　(7)√；　(8)×.

7. (1)$A\cap B=\{x\mid x>1\}$；$A\cap C=\{x\mid 1<x<3\}$；$B\cap C=\{x\mid -1<x<3\}$；

   $A\cap B\cap C=\{x\mid 1<x<3\}$.

   (2)$A\cup B=\{x\mid x>-1\}$；$A\cup C=\mathbf{R}$；$B\cup C=\mathbf{R}$；$A\cup B\cup C=\mathbf{R}$.

   (3)$\complement_U A\cap\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -1\}$；$\complement_U A\cap\complement_U C=\varnothing$；

   $\complement_U B\cap\complement_U C=\varnothing$；$\complement_U A\cap\complement_U B\cap\complement_U C=\varnothing$.

   (4)$\complement_U A\cup\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 1\}$；$\complement_U A\cup\complement_U C=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$.

   $\complement_U B\cup\complement_U C=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$；$\complement_U A\cup\complement_U B\cup\complement_U C=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$.

8. (1)$A\cup(D\cap E)$；(2)$(B\cap C)\cup F$.

9. (1)

$\cap$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$	B	$\complement_U B$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	$A\cap B$	
$\complement_U A$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\complement_U A$		$\complement_U(A\cup B)$
B	$\varnothing$	$A\cap B$		B	$\varnothing$
$\complement_U B$	$\varnothing$		$\complement_U(A\cup B)$	$\varnothing$	$\complement_U B$

(2)

$\cup$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$	B	$\complement_U B$
$\varnothing$	$\varnothing$	A	$\complement_U A$	B	$\complement_U B$
A	A	A	U	$A\cup B$	
$\complement_U A$	$\complement_U A$	U	$\complement_U A$		$\complement_U(A\cap B)$
B	B	$A\cup B$		B	U
$\complement_U B$	$\complement_U B$		$\complement_U(A\cap B)$	U	$\complement_U B$

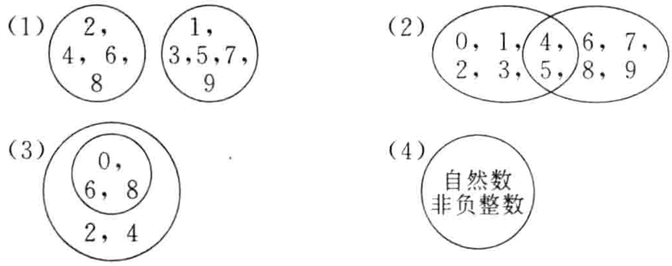
10. (1)$A_1=$\{你所在班级的学生\},$A_2=$\{你所在学校的男学生\};

(2)$B_1=\{4,5,6,7\}$,$B_2=\{5,7,9,10\}$;

(3)$C_1=$\{平行四边形\},$C_1=$\{梯形\};

(4)$D_1=$\{东风牌汽车\},$D_2=$\{解放牌汽车\}.

11.



12. (1)$A\cap B=\{○,☆,△\}=B$,$A\cup B=A=\{○,☆,□,△\}$;

(2)$A\cap B=\{3,5,7\}$,　$A\cup B=\{1,2,3,5,7,9\}$;

(3)$C\cap D=\{x\in \mathbf{Q}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$,$C\cup D=\mathbf{Q}$;

(4)$M\cap N=\{(0,0)\}$,$M\cup N=\{(x,y)\mid x=y,x=-y\}$.

13. 设全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

则有 $A\cap B=\{3,5\}$;$A\cup B=\{1,2,3,5,6,7,9,10\}$;

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

$\complement_U A\cap \complement_U B=\{0,4,8\}$;$\complement_U A\cup \complement_U B\cup C=\{0,1,2,4,6,7,8,9,10\}$.

14. $M\cap N=\{P\mid PA=PB=PC\}=$\{$\triangle ABC$ 的外心 G 点\}.

15. 设 $A=$\{游泳者\}、$B=$\{跳水者\},则 $n(A)=12$,$n(B)=15$,$n[\neg(A\cup B)]=26$

$\Rightarrow n(A\cup B)=47-26=21$.

$\Rightarrow n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=12+15-21=6$.

答:两项训练都参加的有 6 人.

*16. 设 $x_1=a^2+b^2$,$x_2=c^2+d^2$,其中 $x_1,x_2\in M$,$a,b,c,d\in \mathbf{Z}$.

则有
$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &=(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)\\ &=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+2abcd-2abcd\\ &=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \end{aligned}$$

因为 $ac+bd$,$ad+bc\in \mathbf{Z}$,所以 $x_1x_2\in M$.

P23　2.1　练习 1

1. (1)√;(2)√;(3)√;(4)×;(5)√;(6)√.

2. (1)$\forall$ (江、河)$\in$中国,都流入太平洋;

(2)$\exists$ 0,0 不能作除数;

(3)$\forall\ x\in \mathbf{R}$,都有 $x\cdot 1=x$.

3. (1)假,如 $x=2$ 时,$2^{10}\neq 2$;

(2)真,因为$\exists$ $1\in \mathbf{R}$,使 $1^{10}=1$ 成立.

4. (1)一切正方形都是矩形;所有的正方形都是矩形;任一个正方形都是矩形;$\forall\ x\in$\{正方形\},x 是矩形;

(2)有一个偶数是质数;存在一个偶数是质数;至少有一个偶数是质数;$\exists\ x\in$\{偶数\},x 是质数.