工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

高等数学（下册）

保定学院 数学与计算机

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育
立项项目

高等数学

（下册）

保定学院 数学与计算机系 编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册 / 保定学院数学与计算机系编．--
北京 ：人民邮电出版社，2014.2
ISBN 978-7-115-34110-5

Ⅰ．①高… Ⅱ．①保… Ⅲ．①高等数学－高等职业教
育－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第313504号

内 容 提 要

本书系统介绍了高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，分为上、下两册．上册含函数、极限和连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用．下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程等内容．每章均配有习题，书末附有习题参考答案，便于教与学．

本书还引入数学工具软件 Matlab，配合书中内容，介绍了用 Matlab 解数学问题的基本方法．

本书可用作高等理工科院校、综合性大学及高等师范院校（非数学专业）少学时的高等数学课程教材．

◆ 编　　保定学院 数学与计算机系
责任编辑　李海涛
责任印制　彭志环　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：15.5　2014 年 2 月第 1 版
字数：290 千字　2014 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

Preface

近年来，随着我国经济建设与科学技术的飞速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，已经突破了以前的精英教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造性和再创造的基础教育. 高等学校教育理念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断扩大. 数学课程的教育意义已经不再满足于为其他学科提供基础知识的工具性属性，而定位于思维方法的养成训练教育.严谨的数学思维方法将惠及几乎所有的学科领域，高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义.

本教材是依据“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”而编写的，教材的内容主要包括函数的极限理论、连续函数及其性质、导数微分及其应用、多元函数微分学、多元函数积分学、向量代数与空间解析几何、无穷级数及常微分方程等.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的. 教材中概念、定理及理论叙述准确，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题讲解突出解题过程的规范性，突出解题思路形成过程，突出解题思维的可视化.

本书《高等数学（下册）》编写分工为：第 6 章由王新哲、王鑫编写；第 7 章由程宇编写；第 8 章由李华君、崔嵬编写；第 9 章由王淑燕编写；第 10 章由白红信编写；书中数学史话部分由庞晓丽编写，MATLAB 由周和月、纪跃编写. 本书由周和月统稿.

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳切希望广大读者批评指正.

编 者

2013 年 12 月

目录

Contents

第 6 章　向量代数与空间解析几何

向量是研究空间解析几何的工具，空间解析几何是学习高等数学的基础. 解析几何是用代数的方法研究几何问题的一门学科. 本章简要介绍向量的基本概念、运算以及空间解析几何的基础知识。

重点难点提示

知　识　点	重　　点	难　　点	要　　求
向量的概念及其线性运算	●		理解
向量的坐标	●		掌握
向量的数量积和向量积	●	●	掌握
曲面方程及其常用曲面	●	●	掌握
空间曲线及其方程			了解
平面方程	●		掌握
直线方程	●		掌握
用 Matlab 绘制空间几何图形			掌握

6.1　二、三阶行列式简介

6.1.1　二阶行列式

二阶行列式起源于用消元法解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{............(1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{............(2)} \end{cases}$.

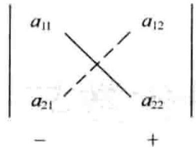
把 $(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$ 得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2$，

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，则 $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

同理，$x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

为了便于记忆，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称它为**二阶行列式**，其中 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 表示第 i 行第 j 列的元素.

二阶行列式的计算规则：



令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

当 $D \neq 0$ 时，二元线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

6.1.2　三阶行列式

同样，三阶行列式起源于用消元法解三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$.

经计算消去 x_2, x_3，得

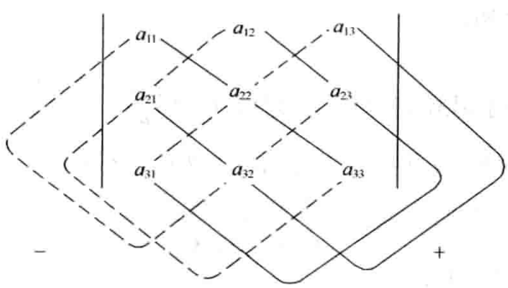
$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

为了便于记忆，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称它为**三阶行列式**，其中 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 表示第 i 行第 j 列的元素.

三阶行列式计算规则：



三阶行列式可以用二阶行列式表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

【例 6.1】 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix}$ 的值.

解 方法一：$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

$=2\times0\times8+5\times(-5)\times(-3)+6\times1\times(-4)-(-3)\times0\times6-(-4)\times5\times8-2\times(-5)\times1$

$=221.$

方法二：$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}=221.$

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

当 $D\neq0$ 时，三元线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

习题 6-1

1．计算下列二、三阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$，　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2．求线性方程组 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ 的解.

6.2 向量及其线性运算

6.2.1 向量的概念

在科学技术和日常生活中，我们除用到数量（只有大小的量）外，还要用到一种量，它不仅有大小而且有方向，如：力、位移、速度、加速度等，称这种量为**向量（矢量）**.

我们用有向线段 ↗ 表示向量，其中有向线段的长度表示向量的大小，有向线

段的方向表示向量的方向．有向线段的起点和终点分别称为**向量的起点和终点**，以点 A 为起点、点 B 为终点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$.

向量也用黑体字母或在字母上加箭头表示，例如，$\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{r}$ 、$\boldsymbol{v}$ 、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$ 、$\vec{r}$ 、$\vec{v}$ 、$\vec{F}$ ·

向量的大小称为**向量的模（长度）**，记作 $|\boldsymbol{a}|$ ．模等于 1 的向量称为**单位向量**，记作 $\boldsymbol{e}$ ；与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记作 $\boldsymbol{e}_a$ ；模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$。**规定**：零向量的方向是任意的．

由于数学上关注的是向量的大小和方向，不考虑它的起点的位置，称这种向量为**自由向量**，简称**向量**，今后我们讨论自由向量．

定义 6.1　如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，称**向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

显然，经过平行移动后完全重合的向量相等.

定义 6.2　如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，但方向相反，称**向量 $\boldsymbol{b}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量**，记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{BA}$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量.

定义 6.3　如果把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点，它们的终点和公共起点在同一条直线上，称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线**，记作 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.

显然，零向量与任何一个向量都平行.

定义 6.4　如果把向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k$ $(k\geqslant 3)$ 的起点放在同一点，它们的终点和公共起点在同一个平面上，称**向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k$ 共面**.

定义 6.5　将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点，它们所在的射线之间的夹角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

规定：零向量与任何一个向量的夹角为 0 到 π 之间的任意值.

定义 6.6　如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$，称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

显然，如果 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 或 π ，则 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.

6.2.2　向量的线性运算

1．向量的加法

定义 6.7　设 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 为两个向量，平移向量 $\boldsymbol{b}$，让 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点作向量 $\boldsymbol{c}$ ，称向量 $\boldsymbol{c}$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ，如图 6-1 所示.

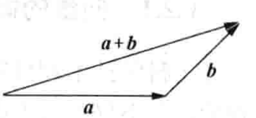


图 6-1

称此运算法则为**加法的三角形法则**.

定义 6.8 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个不平行的向量，让 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的起点重合在点 A 处，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，从公共起点 A 到对角顶点 C 作向量 $\vec{AC}$，称向量 $\vec{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图 6-2 所示.

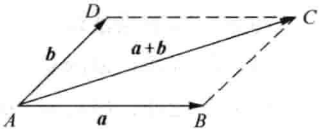


图 6-2

称此运算法则为**加法的平行四边形法**.

向量的加法满足如下运算规律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

（3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

（4）$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法满足交换律和结合律，n **个向量** $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ **的和**记作 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n$.

让第一个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点与第二个向量 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点重合，让第二个向量 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点与第三个向量 $\boldsymbol{a}_3$ 的起点重合，依次类推，从第一个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点向最后一个向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点作向量 $\boldsymbol{c}$，称向量 $\boldsymbol{c}$ 为**向量** $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ **的和**，记作 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n$，如图 6-3 所示.

称此运算法则为**加法的多边形法则**.

2. 向量的减法

定义 6.9 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个向量，称向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

让向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的起点重合，从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作向量 $\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图 6-4 所示.

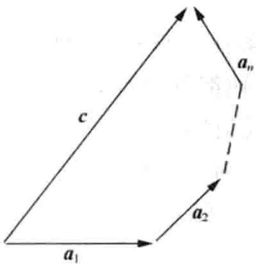


图 6-3

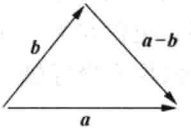


图 6-4

称此运算法则为**减法的三角形法则**.

向量的加、减法满足三角不等式：$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

3. 向量与数的乘法

定义 6.10 设 $\boldsymbol{a}$ 为向量，λ 为实数，记 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一个向量，其中 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为**向**

量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法满足如下运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法和数与数量的乘法称为**向量的线性运算**.

【例 6.2】 如图 6-5 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MD}$.

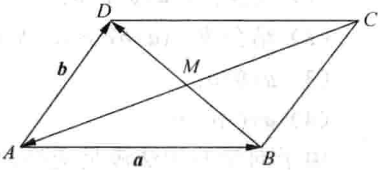


图 6-5

解 由平行四边形的对角线互相平分知：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，

故 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，故 $\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

利用数与向量的乘法可把向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为：$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

如果向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$. 称此过程为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化**.

定理 6.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行 ⇔ 存在唯一一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

定理 6.2 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面 ⇔ 存在唯一一对实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

6.2.3 向量的坐标

1．空间直角坐标系

在空间中选定一点 O，过点 O 作三条互相垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，这三条数轴都以点 O 为原点、有相同的单位长度，且它们的正向符合右手法则，称此几何图形为**空间直角坐标系**，记作 $Oxyz$，其中点 O 称为坐标系的**原点**，三条数轴称为**坐标轴**，分别称为 ox 轴，oy 轴，oz 轴.

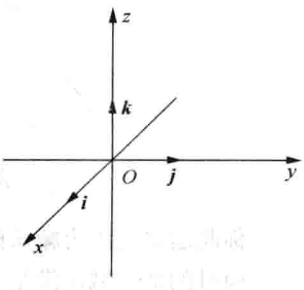


图 6-6

设与三条坐标轴方向相同的三个单位向量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，空间直角坐标系也可记为 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，称三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为**坐标向量**.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，由两个坐标轴所确定的平面称为**坐标面**，分别称为 xOy **面**，yOz **面**，zOx **面**. 如图 6-6 所示.

2．向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，对于任一向量 $\boldsymbol{r}$ 都有空间中的一点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 易见，向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M 是一一对应的.

定义 6.11 设点 M 的坐标为 (x,y,z)，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，称坐标 (x,y,z) 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

在空间直角坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 下，如果 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 称此式为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量**.

定理 6.3 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 两个端点的坐标为 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

定理 6.4 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\lambda$ 为一实数，则

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$；

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$；

（3）$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

定理 6.5 设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

（1）$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

（2）当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{e}_r=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

定理 6.6 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

（1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$；

（2）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

【例 6.3】 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在线段 AB 上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

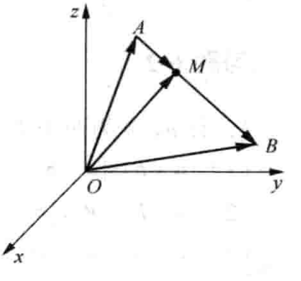


图 6-7

解 如图 6-7 所示。

方法一：因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，并且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$.因为 $\lambda\neq-1$，所以 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$.

由点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 知，$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

因此，$M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

方法二：设点 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$.

因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，且 $\lambda\neq-1$，所以 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

因此，$M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

称点 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点.

当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，故 $M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

3．向量的方向角

定义 6.12 非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角；向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦**.

定理 6.7 设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

显然，$\boldsymbol{e}_r=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，并且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

【例 6.4】 已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$)和 $B(1, 2, 0)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦和方向角.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(-1, 1, -\sqrt{2})$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因此，$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$，$\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$.

习题 6-2

1．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，给出下列等式成立的充要条件.

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

2．已知平面四边形 $ABCD$，点 K，L，M，N 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点，证明：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$.

3．设向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，计算 $2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

4．已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、单位向量、方向余弦.