



千古之謎

幾何、天文與物理兩千年

Physics

他們解開了
人類千年來的謎團！

項武義
張海潮 著
姚 玗

萬物之理，皆在引力

臺灣商務印書館

千古之謎

幾何、天文與物理兩千年

項武義
張海潮 著
姚 玠

臺灣商務印書館

千古之謎 幾何、天文與物理兩千年

作者◆項武義、張海潮、姚珩

發行人◆王學哲

總編輯◆方鵬程

主編◆李俊男

責任編輯◆賴秉薇

美術設計◆吳郁婷

校對◆林淡宜

出版發行：臺灣商務印書館股份有限公司

台北市重慶南路一段三十七號

電話：(02)2371-3712

讀者服務專線：0800056196

郵撥：0000165-1

網路書店：www.cptw.com.tw

E-mail：ecptw@cptw.com.tw

網址：www.cptw.com.tw

局版北市業字第 993 號

初版一刷：2010 年 4 月

初版二刷：2010 年 6 月

定價：新台幣 220 元



ISBN 978-957-05-2461-1

版權所有 翻印必究

前言

縱觀理性文明從西元前五世紀到十七世紀兩千多年的發展史，其中幾何學、天文學和物理學三者緊密相連，而且扮演著其主角與主軸。在諸多古文明中，如中國、埃及、巴比倫、希臘、瑪雅等等，天文、星象一直是令人神往、發人深思考者；而且也都注意到天際有五顆與眾不同、奇特獨行的行星，即金、木、水、火、土五大行星。它們漫遊於黃道十二宮，其行蹤獨特，令人難解其怪。因此也就自然而然地成為古天文學之中心課題，而且也是眾說紛紜，百思不得其解的「千古之謎」。此事一直到整整四百年前之1609年克卜勒行星運行定律之發現才得以真相大白。可以說，上述千古之謎乃是貫串幾何學、天文學與物理學這兩千年研究的核心議題。

自古以來，量天、理解天象一直是研究幾何學的主要原動力和嚮往的崇高目標。古希臘幾何學家們，體認到量天在精準上的極高要求，因而促使他們在定量幾何基礎論上力求嚴格、明確；首先他們在長度的度量上提出「可公度性」，但是在其初論中「誤判」可公度性是普遍成立者，並以此為其頭號公設。此事一直到希伯薩斯發現不可公度性之存在才迷途知返；其後希臘幾何學界經歷了大半世紀的危機、挑戰與「煉獄」，才由歐多克斯創逼近論而得以重建其幾何基礎論，乃是理性文明史上第一個偉大的基石與里程碑。如今回顧反思，我們可以認識到幾何學是由於天文學的需求而立論嚴謹，雖經挫折，但終能浴火重建，脫胎換骨，為理性文明奠定了極為基本、重要之幾何與分析基礎論。

古希臘的幾何學大師，如歐多克斯、阿波羅尼斯，也都以「量天」為其志趣；而其天文學大師如阿利斯塔克、希帕克斯和托勒密，也都精通幾何學（其實，他們可以說都是兩棲、雙修的幾何、天文學大師）。古希臘文明在天文學上，世代相承的成果在托勒密的《至大論》中集其大成。大體上乃是一種純幾何的試圖對於行星、太陽、月亮的「視運動」作一系統描述；而當年所採用者乃是「地心」體系而不是「日

心」體系。今日反思，此事實乃誤入歧途。試問當年為什麼會誤入歧途呢？而且還會在這件事上有長達千年的迷途不知返呢？此事著實令人費解！其實，遠在西元前三世紀，阿利斯塔克即已提出「日心」之主張，但是因為「日心」說和當代的「物理觀」全然相悖而被棄置，一直冷凍到十六世紀才由哥白尼給以「文藝復興」。大致上，上述迷途千年難返的原因大概可以歸結到下述兩點：其一是長期以來奉為經典的亞里斯多德物理論述，其實它乃是一種形而上的似是而非之論。其二是托勒密體系對於行星的「視運動」基本上具有相當不錯的可預測性（一般約在 10 分，亦即 $1/6$ 度左右）。這種將錯就錯，還能把相當複雜的週期平面運動用均輪、本輪、小本輪（亦即多個等速圓周運動之妥加組合）描述得差不多，相當程度地反映著希臘幾何天文學家世代相承地鑽研行星視運動上，用力之深和高度的幾何技巧。

但是這種本質上和事實極為不符的「地心」體系，業已到了愈來愈繁複，左支右絀，難以為繼的情況。使得有識之天文學家們覺得有改弦更張之必要。及至文藝復興後期，幸有哥白尼、第谷和克卜勒三位天文學大師，各盡其畢生之力完成了天文學巨棒的「三接力」。迷途知返，千古之謎得以真相大白；幾何學量天之夢想終於在克卜勒的超人奮鬥下得以圓滿達成。四百年前是整個理性文明史上無比輝煌的時刻，克卜勒行星運行三定律是理性文明中第二個光芒萬丈的里程碑，它不但全面革新了天文學，也使得物理學迷途知返，全面更新。由克卜勒定律，伽利略的重力實驗，笛卡兒的解析幾何與慣性定律，一直到牛頓的萬有引力定律的發現，可以說是水到渠成，順理成章。由克卜勒的新天文學到牛頓的新物理學，起承轉合進展之神速，比之於兩千年的進化歷程，可以說簡直是一氣呵成！牛頓的巨著《自然哲學的數學原理》則是理性文明中第三個偉大的里程碑。

千古之謎在幾何、天文、物理長達兩千年的發展史中，貫串全局。其間引人入勝、發人深思，富有啟發的思想、方法和重大突破比

比皆是。我們試寫這本小冊子，概述其要並且試著讓讀者能身歷其境，重訪某些重大突破的精要所在。師法先賢，高山仰止、心嚮往之。希望此書能有助於有智、有志之青年能夠踏著巨人的腳印，邁步奮進，投身於理性文明之世代相承，承先啟後，繼往開來之長河。

目錄

前言	1
第一章 古希臘幾何基礎論之 浴火重生與連續世界的認知	1
1. 中西定量平面幾何之比較分析與希臘幾何基礎初論	3
2. 希伯薩斯的偉大發現 ——不可公度比的存在	8
3. 歐多克斯之逼近論 ——幾何基礎論之震後重建	9
4. 連續性與連續世界的認知	13
第二章 天文學的發生與內容	21
1. 天文崇拜及神祕性	23
2. 第一個天體模型 ——歐多克斯的同心球	27
3. 阿利斯塔克對地心說之質疑	31
4. 阿波羅尼斯的本輪 ——均輪、偏心圓與橢圓	37
5. 古典天文學的奠基者 ——希帕克斯	44
6. 集古天文學大成的行星理論 ——托勒密系統	48

第三章 科學革命的序曲	51
1. 目的論之宇宙觀和文藝復興	53
2. 新柏拉圖主義	
——數學與實體	57
3. 哥白尼日心說之特質	
——簡單性	58
4. 行星逆行與日心系統之和諧性	66
5. 精緻與完善的天文觀測者	
——第谷	74
6. 對圓的迷思與太陽角色的不定性	78
 第四章 克卜勒三定律之探索與發現	 81
1. 啟蒙與時代背景	83
2. 概述行星運行三定律的探索歷程	89
3. 地球繞日運行的面積律：	
邁向新天文學的基礎性重大突破	93
4. 千古之謎，真相大白	
——又見橢圓	97
 第五章 重訪行星三定律的探索歷程——	 103
師法其意、改弦更張、身歷其境	
1. 重訪之一：發現地球面積律的簡潔途徑	106
2. 重訪之二：發現地球橢圓律的簡潔途徑	109
3. 重訪之三：水到渠成，順理成章	
——行星運行三定律	113
4. 回顧、演練與展望	125

第六章 天地一體的萬有引力定律	135
1. 劃時代《原理》一書之定義、定律與核心內涵	137
2. 月亮、蘋果及拋體運動	141
3. 微積分、幾何和運動學的三連星	149
4. 伽利略、笛卡兒與克卜勒	152
5. 面積律等同向心力 ——《原理》的首要命題	162
6. 《原理》中的直接問題與逆問題	166
第七章 《原理》重要命題的闡述與特質	171
1. 圓周運動的速度向量和面積律的數理分析	173
2. 從面積律和橢圓律到平方反比力律 ——直接問題	177
3. 平方反比力至橢圓律或圓錐曲線軌道 ——逆問題	180
4. 球體的吸引力與積分之藝術	182
結語	189
參考資料	196
致謝	200

第一章

古希臘幾何基礎論之 浴火重生與連續世界的認知

為何要浪費文字？幾何學在創世之前便已存在，它與神的心靈同為永恆，它就是神本身。幾何學將創世的模型提供給神，並讓它可在人世間實行，它與神自身相似，它不僅是透過人的雙眼來傳達祂的心靈。

——克卜勒《世界的和諧》

1. 中西定量平面幾何之 比較分析與希臘幾何基礎初論

幾何學(Geometry)乃是理性文明對於大自然所在的空間(space)的認識論。宇宙中的所有事物、現象皆存在於其中，發生於其內，當然也永遠受著空間本質的蘊育與制約。幾何學的課題也就是去研討、理解空間的本質，是理性文明(civilization of rational mind)的基礎所在，也是先行者。可以說是理所當然的第一科學。概括地說，空間的重要本質可以總結為下述三點，即

對稱性：空間對於任何給定平面之反射對稱性。

平直性：三角形之內角和恆為一平角（等價於平行性）

連續性：直線是連續不斷的，但是一剪就斷（亦即略去其中一點。則直線分隔成不連的兩段）。

（1）中國古算中的測量術：

幾何學研究的自然進程是先研究平面幾何，然後再進而研究立體幾何；而平面幾何之研討則是先由定性層面起始，再推進到定量層面。本節將先簡述中國古算中的定量平幾之精要，和古希臘的定量平幾基礎初論，並作簡短之比較分析。

大體上來說，中國古算中善用面積公式，乃是以長方形面積等於長 $\times$ 寬，直角三角形面積等於 $1/2$ 底 $\times$ 高為基點，簡潔地推導當年測量術之兩個基本公式，即：勾股弦公式和出入相補公式，其證法如下：

（i）勾股弦公式：勾方+股方=弦方（圖 1-1）

如圖 1-2 所示一個長、寬皆為 $a + b$ 的正方形，可以用兩種分割，即得

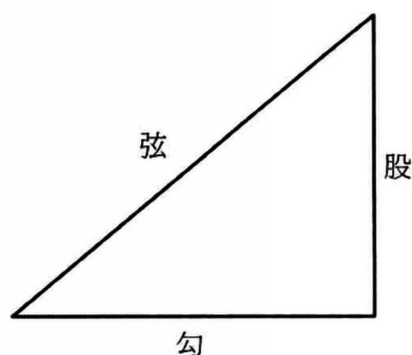


圖 1-1 直角三角形的三邊

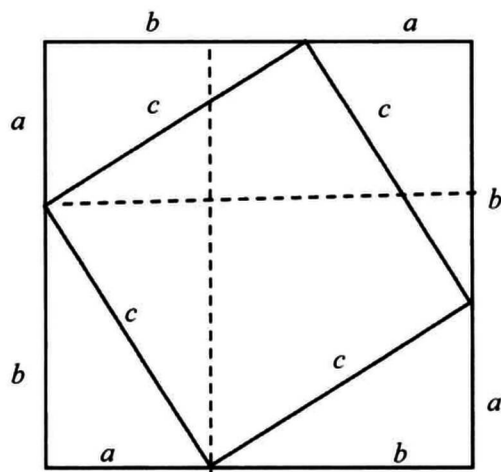


圖 1-2 正方形的分割方法

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

- (ii) 出入相補：如圖 1-3 所示，出入相補原理很可能是下述實例想到者：其中 $(h+h')$ 是欲測的樹高， $(b+b')$ 和 h' 是可測之影長和標杆高。為了便於善用面積公式，配以其虛線部份。如此易見

$$\begin{aligned}
 b \cdot h' &= \square B'BGC' = \triangle ABC - \triangle AB'C' - \triangle C'GC \\
 &= \triangle ADC - \triangle AFC' - \triangle C'EC = \square FC'ED = b' \cdot h \\
 \Rightarrow \frac{b}{b'} &= \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'} \quad (\text{亦即 } \frac{b}{b'} + 1 = \frac{h}{h'} + 1)
 \end{aligned}$$

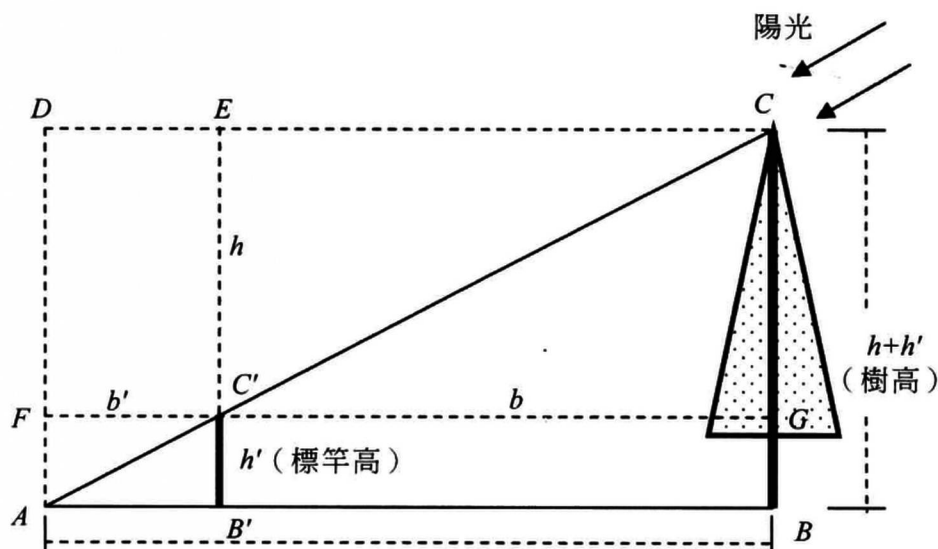


圖 1-3 影長和標竿高關係

即得相似直角三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 的對應直角邊之邊長比例式。由它再加上勾股弦公式就可以推導 $\overline{AC} : \overline{A'C'}$ 也等於上述比值。再者，兩個一般的相似三角形，總是可以利用其垂線分割成兩對相似直角三角形之組合。由此可見上述兩者和面積公式業已構成一組完備的平面測量之基礎。接著讓我們再來介紹古希臘的定量平幾基礎初論。

(2) 定量平幾基礎初論 (紀前五、六世紀)：

話說當年，量天和理解天象，一直是古希臘幾何學家們的原動力和嚮往的目的。他們有鑒於量天上對於精準之極高要求，在研究定量平幾之基礎理論時，於長度的度量這個基本概念的定義上，力求嚴格，一絲不苟。提出了可公度性 (commensurability) 這個純理論的概念；亦即兩個線段 a 、 b 都是另一長度 c 的正整數倍，即有 $a = m \cdot c$ ， $b = n \cdot c$ ，則定義其比值 $a : b = m / n$ 。但是當年「誤認」可公度性是普遍成立者 (universality of commensurability)，而且以此「誤判」為其定

量幾何基礎論 (foundation of quantitative geometry) 之「頭號公理」(first axiom)，進而對於定量幾何的基本公式如矩形、三角形面積公式，畢氏定理 (亦即勾股弦公式) 和相似三角形的邊長比例式等等逐一加以嚴格論證。主要是用平行分割，例如圖 1-4 所示之矩形面積公式之證明：

設矩形的長和寬分別是 ℓ 和 w ，而 u 則是取定的單位長。由可公度普遍成立 (universality of commensurability) 的「公設」即分別有 $\{\ell, u\}$ 和 $\{w, u\}$ 之公尺度 c 和 c' ，使得

$$\ell = m \cdot c, u = n \cdot c; w = p \cdot c', u = q \cdot c'$$

如圖 1-4 所示， $\square(\ell, w)$ 和 $\square(u, u)$ 分別可以平行分割為 $m \cdot p$ 和 $n \cdot q$ 個 $\square(c, c')$ 。由此可見

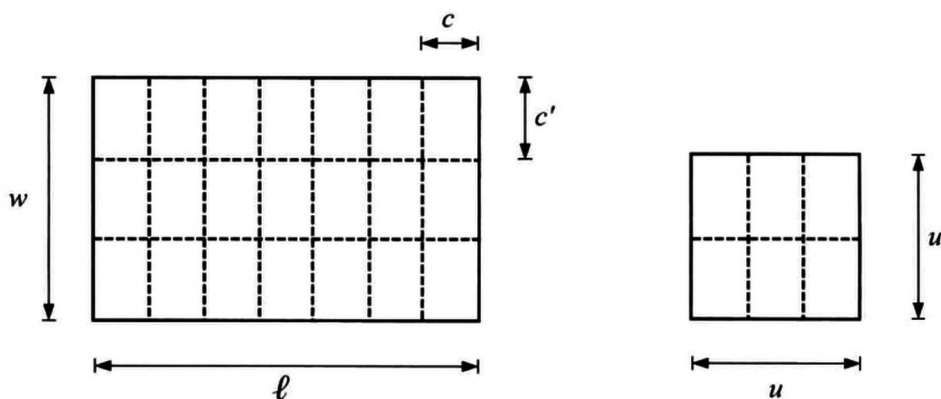


圖 1-4 矩形面積公式

$$\square(\ell, w) = m \cdot p \square(c, c'), \quad \square(u, u) = n \cdot q \square(c, c')$$

所以有下述矩形面積公式

$$\square(\ell, w) : \square(u, u) = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (\ell : u) \cdot (w : u)$$

若將上述兩者作一比較分析，易見兩者都發現了基本上相同的基本公式，即矩形、三角形的面積公式，直角三角形的畢氏定理（亦即勾股弦公式）和相似三角形的邊長比例式，大同小異。但是處理方式和論證上則各有長短。

在中國古算中以矩形面積公式為其起點而不加論述，然後善用它去簡潔地推導其他公式；而且在長度的度量這個基本概念上也不加深究，可以說是一種工程師致用為尚的認知方式。但是在古希臘的初論中，雖然在可不可公度上犯了嚴重之誤判，但是在可公度的「公設」之下，則立論嚴謹，對於矩形面積公式等等逐加論證，可以說是一種純理論的嚴格要求，但是並未完全達成。此事一直到希伯薩斯（Hippasus，西元前五世紀）的石破天驚之發現和歐都克斯（Eudoxus, 390-337 BC）創逼近論（theory of approximation）才真正完成定量幾何基礎論。此事不但使得希臘幾何學脫胎換骨，大幅超越中國定量幾何，也為理性文明奠定堅實的基礎，實乃理性文明第一個偉大的里程碑。