经/典/教/材/配/套/丛/书

配套·高教社·同济大学·《微积分(第三版·上册)》(面向21世纪课程教材)

微积分
同步辅导与习题全解

(高教社·同济大学·第三版·上册)

附赠近三年考研数学试题选解

李红英 ◎ 主编

华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

微积分同步辅导与习题全解

（高教社·同济大学·第三版·上册）

李红英　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导与习题全解(高教社·同济大学·第三版·上册)/李红英主编.
—上海:华东理工大学出版社,2013.10

ISBN 978-7-5628-3646-9

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 223235 号

微积分同步辅导与习题全解(高教社·同济大学·第三版·上册)

主　　编 / 李红英
策划编辑 / 周永斌
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 金慧娟
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　真:(021)64252707
网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 12.25
字　　数 / 350 千字
版　　次 / 2013 年 10 月第 1 版
印　　次 / 2013 年 10 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-3646-9
定　　价 / 29.00 元

联系我们:电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
淘宝官网 http://shop61951206.taobao.com

前　言

微积分是高等院校理工科和经济管理类学科相关专业的一门重要基础课，为了帮助广大在校生和自学者学好这门课程，掌握这个有力的数学工具，我们总结了在教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套同济大学数学系主编的《微积分(第三版・上册)》的同步辅导书.本书对原教材内容进行了归纳总结并逐章编写，对部分知识点作了有益的扩展延伸，对重点难点进行了剖析，对所有的习题进行了详尽的解答.每章包括:教学基本要求、内容要点、主要方法、典型例题分析、习题全解、近三年考研数学试题选解等栏目.

教学基本要求——符合国家教育部制定的《微积分课程教学基本要求》，同时根据教学实践作了个别适当修改.

内容要点——按照既"由浅入深、系统全面、脉络清晰"，又"突出重点、简明扼要、详略得当"的理念，对内容和方法进行归纳总结.

主要方法——总结归纳了针对每章内容的题目的解题方法、步骤及注意点.

典型例题分析——对每章的重点、难点内容进行具体分析，并通过对具有代表性的典型例题的分析、求解，使抽象的知识变得具体.

习题全解——对每章的习题均给出了详细解答，解答过程详细而具体，跳跃度很小，大部分题目在解答之前给出了"解题指导".同时，对部分题目给出了两种或三种不同的解法，从不同的角度对同一个问题进行不同的求解，有利于知识的综合、交叉应用，从而使读者开阔视野，真正地锻炼数学思维，提高对知识掌握的熟练程度.

近三年考研数学试题选解——精选近三年考研数学试题，进行解答与分析，适合学有余力以及准备考研的学生参考.

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，还望各位专家、读者不吝赐教，斧正谬误，以期本书能及时进行修正并不断完善.

目　录

预备知识

一、教学基本要求

1. 理解函数概念，掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数和分段函数的概念，了解反函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 会建立应用问题的函数关系.

二、内容要点

1. 基础知识

(1) 集合

定义 任意指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合(或简称集)，组成这个集合的事物称为该集合的元素.

一个集合，若其元素的个数是有限的，则称为有限集；否则称为无限集.

常用的几个数集如下.

实数集 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合；

自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

整数集 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$；

有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{Z},q\neq0,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互素}\right\}$；

复数集 $\mathbf{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{R},i^2=-1\}$

(2) 邻域

定义 1 实数集$\{x\mid|x-a|<\delta,\delta>0\}$，称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，其中点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径.

定义 2 实数集$\{x\mid0<|x-a|<\delta,\delta>0\}$，称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$或$\hat{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，其中点 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径.

注：

(i) 邻域与去心邻域的区别；

(ii) $(a-\delta,a)$称为点 a 的左 δ 邻域，$(a,a+\delta)$称为点 a 的右 δ 邻域；

(iii) 邻域是开区间.

2. 函数概念

(1) 函数:设数集 $D\subset\mathbf{R}$,两个变量 x 和 y,若对每一个 $x\in D$,按照对应法则 f,有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的函数,记为 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f. $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$称为 f 的值域.

注:函数的两大要素是定义域和对应法则.

(2) 复合函数:设函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$,若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[g(x)]$,$x\in\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$为由 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

注:条件 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$.

(3) 反函数:设函数 $y=f(x)$,$x\in D_f$,$y\in R_f$,若对每一个 $y\in R_f$,有唯一一个 $x\in D_f$ 与之对应且 $f(x)=y$,则在 R_f 上定义了一个函数,称为函数 f 的反函数,记为 f^{-1},即 $x=f^{-1}(y)$,$y\in R_f$.

注:

(i) 反函数 f^{-1}的定义域是 R_f,值域是 D_f;

(ii) 在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图形是同一条曲线;而函数 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称;

(iii) 单调函数 f 必存在反函数,且其反函数具有与 f 相同的单调性;

(iv) 对 $x\in D_f$,有 $x=f^{-1}[f(x)]$.

(4) 初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数称为初等函数.

(5) 分段函数:在定义域的不同部分用不同的表达式表示,这种函数称为分段函数.

注:分段函数中虽然有多个表达式,但表示的是同一个函数.

3. 函数的性质

(1) 有界性:设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若存在 $M>0$,当 $x\in I$ 时,恒有$|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$在 I 上有界,或称 $f(x)$是 I 上的有界函数,其中 M 是 $f(x)$在 I 上的一个界.

注:

(i) 若存在 M_1,对任意的 $x\in I$,有 $f(x)\leqslant M_1$,称 $f(x)$在 I 上有上界;

(ii) 若存在 M_2,对任意的 $x\in I$,有 $f(x)\geqslant M_2$,称 $f(x)$在 I 上有下界;

(iii) 函数 $f(x)$在 I 上有界的充要条件是 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界;

(iv) 若对任意的 $M>0$,总存在 $x_0\in I$,使$|f(x_0)|>M$,称 $f(x)$在 I 上无界.

(2) 单调性:设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,$\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$在 I 上单调增加;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$在 I 上单调减少.

注:

(i) 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数;

(ii) 若 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$,称 $f(x)$为非严格单调增加(减少)函数.

(3) 奇偶性:设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称,若对任一 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为奇函数;若对任一 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数.

注:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4) 周期性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，若存在一个非零常数 T，使得对任一 $x\in D_f$，有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

注：

(i) 周期函数的周期通常指最小正周期；

(ii) 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 nT $(n\in\mathbf{Z})$ 也是 $f(x)$ 的周期.

4. 基本初等函数的图形及主要性质

(1) 幂函数：$y=x^{\mu}(\mu\neq 0)$，见图 0-1.

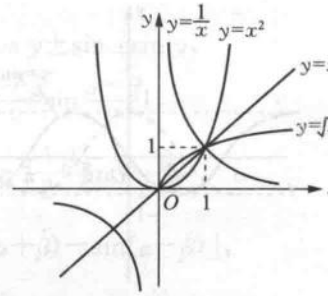

图 0-1

(i) 定义域：随 μ 不同而不同.

(a) 当 μ 为有理数时，记 $\mu=\dfrac{q}{p}$（为既约分数），其中 p 为正整数，q 为整数，则

p 为奇数，$q>0$ 时定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

p 为奇数，$q<0$ 时定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

p 为偶数，$q>0$ 时定义域为 $[0,+\infty)$；

p 为偶数，$q<0$ 时定义域为 $(0,+\infty)$.

(b) 当 μ 为无理数时，定义域为 $(0,+\infty)$.

(ii) 主要性质

(a) 无论 μ 取何值，函数图形都经过点 $(1,1)$.

(b) 若 $\mu>0$，$y=x^{\mu}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加；若 $\mu<0$，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

(c) $x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}\cdot x^{\beta}$，$x^{\alpha-\beta}=\dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$.

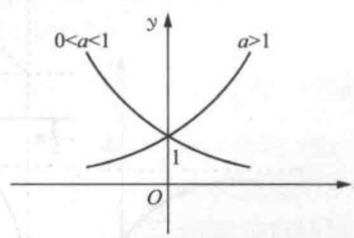

图 0-2

(2) 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq 1)$，见图 0-2.

(i) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

(ii) 主要性质

(a) 无论 a 取何值，函数图形都过点 $(0,1)$.

(b) $y=a^x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称.

(c) 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为严格单调增加函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为严格单调减少函数.

(d) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$ $(b\neq 0)$，$a^{xy}=(a^x)^y$.

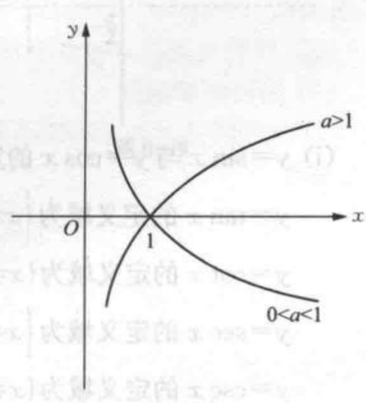

图 0-3

(3) 对数函数：$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$，见图 0-3.

(i) 定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

(ii) 对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.

(iii) 主要性质

(a) 无论 a 取何值，函数图形都过点 $(0,1)$.

(b) $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图形关于 x 轴对称.

(c) 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 为严格单调增加函数；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 为严格单调减少函数.

(d) $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$，$\log_a \frac{y}{x}=\log_a y-\log_a x$，$\log_a x^y=y\log_a x$.

(4) 三角函数

正弦 $y=\sin x$，余弦 $y=\cos x$，正切 $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，余切 $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，

正割 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，余割 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$，其图形分别见图 0－4、图 0－5 及图 0－6.

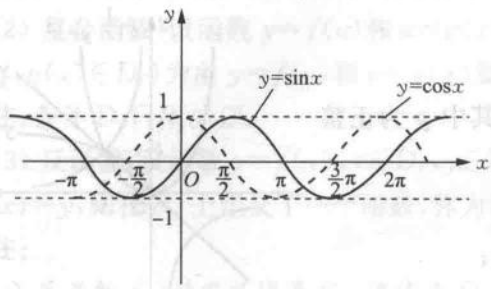

图 0－4

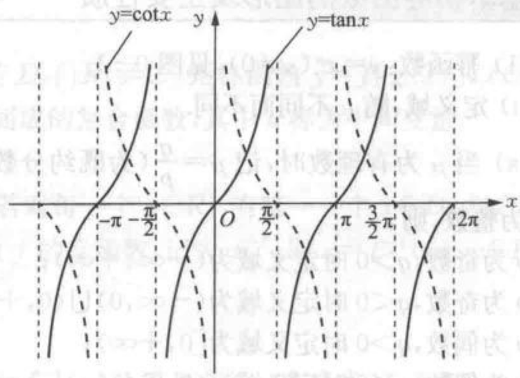

图 0－5

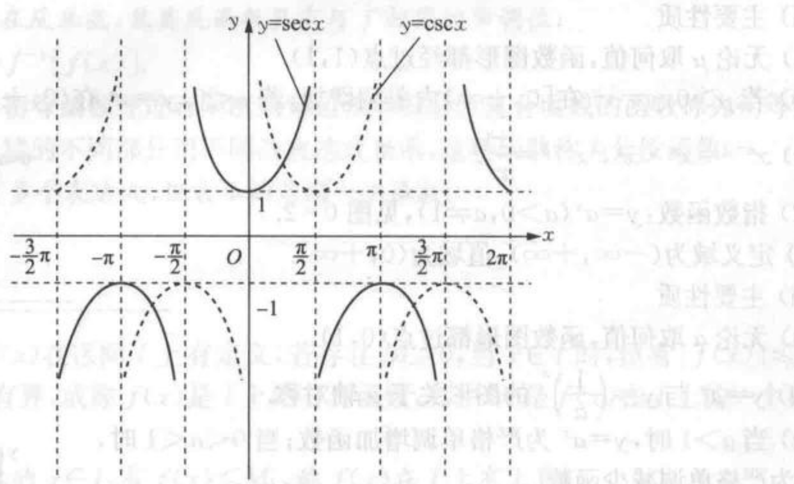

图 0－6

(i) $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$；

$y=\tan x$ 的定义域为$\left\{x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=\cot x$ 的定义域为$\{x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=\sec x$ 的定义域为$\left\{x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；

$y=\csc x$ 的定义域为$\{x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(ii) 主要性质

(a) 正弦函数和余弦函数是有界函数，$|\sin x|\leqslant1$，$|\cos x|\leqslant1$.

(b) $y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\csc x$ 都是奇函数，$y=\cos x$，$y=\sec x$ 都是偶函数.

(c) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 是以 2π 为周期的函数, $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

(d) 三角函数的诱导公式

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$,

$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\quad\cos(\pi-x)=-\cos x$,

$\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\quad\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$,

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\quad\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$,

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$, $\quad\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$,

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\quad\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\quad\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, $\quad\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$,

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$, $\quad\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$,

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x$, $\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

(5) 反三角函数

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$, $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccsc} x$ 分别是相应的三角函数在主值范围内的反函数. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 的图形分别见图 0-7、图 0-8 及图 0-9.

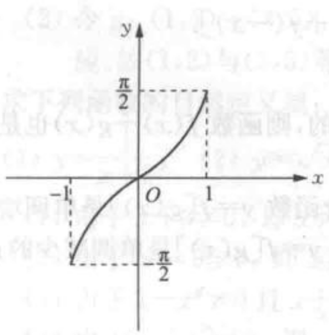

图 0-7

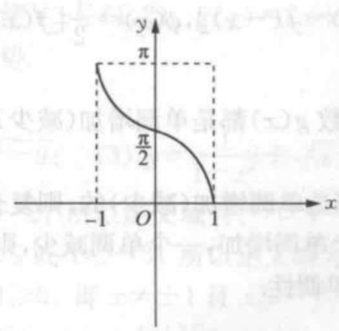

图 0-8

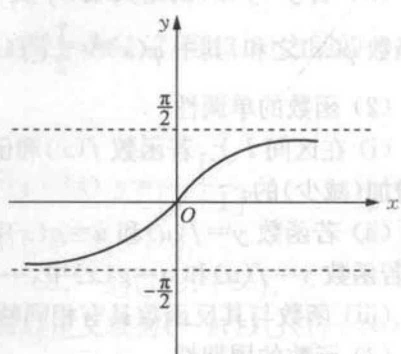

图 0-9

(i) $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

$y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$;

$y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) 主要性质

$y=\arcsin x$ 是奇函数, 单调增加函数;

$y=\arccos x$ 是单调减少函数;

$y=\arctan x$ 是奇函数, 单调增加函数.

三、主要方法

1. 函数的运算及其表达式的计算方法

(1) 利用函数的四则运算、复合运算求函数的表达式；

(2) 利用反函数求函数表达式；

(3) 利用变量代换求函数表达式.

2. 讨论函数的基本性质

(1) 函数的奇偶性

(i) 积的性质：两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数和偶函数的积是奇函数；

(ii) 和的性质：两个奇函数的和是奇函数，两个偶函数的和是偶函数，非零奇函数和非零偶函数的和是非奇非偶函数；

(iii) 复合函数 $F(x)=f(g(x))$ 的奇偶性：

若 $g(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 是偶函数；

若 $g(x)$ 是奇函数，$f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 是偶函数；

若 $g(x)$ 是奇函数，$f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是奇函数.

(iv) 若 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，则 $f(x)$ 能唯一地分解为一个奇函数 $\varphi(x)$ 与一个偶函数 $\psi(x)$ 之和，其中 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$.

(2) 函数的单调性

(i) 在区间 I 上，若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 都是单调增加(减少)的，则函数 $f(x)+g(x)$ 也是单调增加(减少)的；

(ii) 若函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都是单调增加(减少)的，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是单调增加的；若函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 中，一个单调增加，一个单调减少，则 $y=f[g(x)]$ 是单调减少的；

(iii) 函数与其反函数具有相同的单调性.

(3) 函数的周期性

(i) 当函数是由多个周期函数之和构成，且各周期的比值是有理数，则其周期是各个周期的最小公倍数.

(ii) 若 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，则 $f(ax+b)(a>0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

四、典型例题分析

例 1 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

分析 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，解方程可得 $\varphi(x)$.

解 由 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant0$，得 $1-x\geqslant1$，即 $x\leqslant0$.

所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leqslant0$.

例 2 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 偶函数

分析 因 $|x\sin x|$, $e^{\cos x}$ 都是偶函数，故应选(D).

五、习题全解

习　题(见原书 P17)

1. 设 $A=\{x|\sqrt{1-x^2}\leqslant1\}$、$B=\{x|0<x<2\}$是实数域中的两个子集，写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

解 因为 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，所以

$$A\cup B=\{x|-1\leqslant x<2\},\quad A\cap B=\{x|0<x\leqslant1\},$$
$$A\backslash B=\{x|-1\leqslant x\leqslant0\},\quad B\backslash A=\{x|1<x<2\}.$$

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势. 例如，设 A 是正奇数集合，B 是正偶数集合，如果定义从 A 到 B 的映射 T：$T(2n+1)=2n+2$，其中 n 为任一自然数，则 T 是 A 与 B 之间的一一对应，因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的：

(1) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$；(2) 区间(1,2)与区间(3,5).

解 (1) 令 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$，使 $f(2k)=k$，$f(2k+1)=-(k+1)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，则 f 为 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Z}$ 之间的一一对应，故 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{Z}$ 等势.

(2) 令 g：$(1,2)\to(3,5)$，使 $\forall x\in(1,2)$，$g(x)=2x+1$，则 g 为(1,2)与(3,5)之间的一一对应，故(1,2)与(3,5)等势.

3. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　(2) $y=\sqrt{x^2-9}$；(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$；(4) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

解 (1) 由于 $x+2\neq0$，即 $x\neq-2$，所以定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(2) 由于 $x^2-9\geqslant0$，即 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-3$，所以定义域为$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

(3) 由于 $1-x^2\neq0$ 且 $x+1\geqslant0$，即 $x\neq\pm1$ 且 $x\geqslant-1$，所以定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) 由于$[x+1]\neq0$，则 $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

4. 下列函数 f 和 φ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；　(2) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1$，$\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x$；　(4) $f(x)=1$，$\varphi(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解 (1) 由于 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $\varphi(x)$的定义域是实数域 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$与 $\varphi(x)$不是一个函数.

(2) 由于 $f(x)$的值域是 $\mathbf{R}$，而 $\varphi(x)$的值域是$[0,+\infty)$，所以 $f(x)$与 $\varphi(x)$不同.

(3) 由于 $f(x)$与 $\varphi(x)$的定义域和对应法则相同，所以 $f(x)$与 $\varphi(x)$相同.

(4) 由于 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，而 $\varphi(x)$的定义域是$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，所以 $f(x)$与 $\varphi(x)$

不同.

5. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=x+x^2-x^3$； (2) $y=a+b\cos x$；

(3) $y=x+\sin x+\mathrm{e}^x$； (4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (1) 由于 $y(-x)=-x+x^2+x^3\neq y(x)$，$y(-x)\neq -y(x)$，所以 y 非奇非偶.

(2) 由于 $y(-x)=a+b\cos(-x)=a+b\cos x=y(x)$，所以 y 是偶函数.

(3) 由于 $y(-x)=-x-\sin x+\mathrm{e}^{-x}\neq y(x)$，$y(-x)\neq -y(x)$，所以 y 非奇非偶.

(4) 由于 $y(-x)=-x\sin\left(-\dfrac{1}{x}\right)=x\sin\dfrac{1}{x}=y(x)$，所以 y 是偶函数.

6. 证明：两个偶函数之积是偶函数，两个奇函数之积是偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 D 上的偶函数，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是定义在 D 上的奇函数，

则 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$，$G(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$，$H(x)=f(x)\cdot\psi(x)$，$x\in D$.

则 $\forall x\in D$，$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x)$，

$$G(-x)=\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=[-\varphi(x)]\cdot[-\psi(x)]=\varphi(x)\cdot\psi(x)=G(x),$$

$$H(-x)=f(-x)\cdot\psi(-x)=f(x)\cdot[-\psi(x)]=-f(x)\cdot\psi(x)=-H(x).$$

故 $F(x)$、$G(x)$ 为定义在 D 上的偶函数，$H(x)$ 是定义在 D 上的奇函数，结论成立.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函数，证明：

(1) $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数；

(2) 定义在区间 $(-l,l)$ 内的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证 (1) 由于 $\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 是偶函数；

由于 $\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-\psi(x)$，所以 $\psi(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$，由(1)知 $\varphi(x)$ 是偶函数，则 $\dfrac{1}{2}\varphi(x)$ 也是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数，$\dfrac{1}{2}\psi(x)$ 也是奇函数，故结论成立.

8. 证明：(1) 两个单调增加(单调减少)的函数之和是单调增加(单调减少)的；

(2) 两个单调增加(单调减少)的正值函数之积是单调增加(单调减少)的；

(3) 两个单调增加的函数的复合函数是单调增加的，又问两个单调减少的函数的复合函数情况如何？

证 (1) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 D 上的单调增加的函数，令 $F(x)=f(x)+g(x)$，$x\in D$.

$\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$，从而

$$F(x_1)=f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)=F(x_2),$$

故 $F(x)$ 是 D 上的单调增加的函数，即两个单调增加的函数之和是单调增加的. 类似可证单调减少的情况.

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 D 上的单调增加的正值函数，令 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$.

$\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$，从而

$$G(x_1)=f(x_1)\cdot g(x_1)<f(x_2)\cdot g(x_2)=G(x_2),$$

故 $G(x)$ 是 D 上的单调增加的函数. 类似可证单调减少的情况.

(3) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个单调增加的函数，令 $H(x)=f(g(x))$，$x\in D$.

任取 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，则 $g(x_1)<g(x_2)$，从而 $f(g(x_1))<f(g(x_2))$，

即 $H(x_1)<H(x_2)$，故 $H(x)$是单调增加的函数，结论成立.

设 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$是两个单调减少的函数，令 $\Phi(x)=\varphi(\psi(x))$，$x\in D$.

任取 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，则 $\psi(x_1)>\psi(x_2)$，从而 $\varphi(\psi(x_1))<\varphi(\psi(x_2))$，

即 $\Phi(x_1)<\Phi(x_2)$，故 $\Phi(x)$是单调增加的函数，即两个单调减少的函数的复合函数是单调增加的.

9. 求下列函数的反函数及反函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$；　　(2) $y=\begin{cases}x^3, & 当-\infty<x<1,\\ 2^{x-1}, & 当 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

解 (1) 由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 解得 $x=-\sqrt{1-y^2}$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$，所以反函数为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0,1].$$

(2) 当$-\infty<x<1$时，$-\infty<y<1$,且 $x=\sqrt[3]{y}$；当 $1\leqslant x<+\infty$时，$1\leqslant y<+\infty$，且 $x=\log_2 y+1$，所以反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & -\infty<x<1,\\ \log_2 x+1, & 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

10. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$；　　(2) $y=x-[x]$.

解 (1) 设 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，

$$f(-x)=\operatorname{sgn}(\cos(-x))=\operatorname{sgn}(\cos x),$$
$$f(x+2\pi)=\operatorname{sgn}(\cos(x+2\pi))=\operatorname{sgn}(\cos x),$$

所以 $f(x)$既是偶函数，又是以 2π 为周期的周期函数.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$y=f(x)=1$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$时，$y=f(x)=-1$；

当 $x\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right]$时，$y=f(x)=1$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$，

于是可得函数的图形(图 0－10).

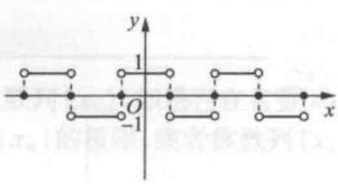

图 0－10

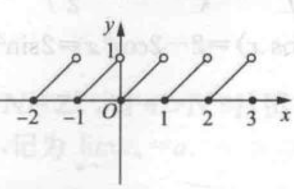

图 0－11

(2) 设 $g(x)=x-[x]$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $g(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=g(x)$，

所以 $g(x)$是以 1 为周期的函数. 当 $x\in[0,1)$时，$y=g(x)=x$；且 $g(1)=0$，

于是可得函数图形(图 0－11).

11. 给定函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，令

$$f_1(x)=-f(x);\quad f_2(x)=f(-x);\quad f_3(x)=-f(-x).$$

说明函数 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$y=f_3(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形的位置关系.

解 $y=f_1(x)$与 $y=f(x)$关于 x 轴对称；$y=f_2(x)$与 $y=f(x)$关于 y 轴对称；
$y=f_3(x)$与 $y=f(x)$关于坐标原点中心对称.

12. 证明：(1) $\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\cdot\cosh\frac{x-y}{2}$；

(2) $\cosh x-\cosh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cdot\sinh\dfrac{x-y}{2}$.

证 (1) $2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cdot\cosh\dfrac{x-y}{2}=2\cdot\dfrac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\dfrac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$

$=\dfrac{e^x+e^y-e^{-y}-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=\sinh x+\sinh y$，证毕.

(2) $2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cdot\sinh\dfrac{x-y}{2}=2\cdot\dfrac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\dfrac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$

$=\dfrac{e^x-e^y-e^{-y}+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}=\cosh x-\cosh y$，证毕.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当|x|<1,\\ 0, & 当|x|=1,\\ -1, & 当|x|>1.\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 当|g(x)|=e^x<1,即\ x<0,\\ 0, & 当|g(x)|=e^x=1,即\ x=0,\\ -1, & 当|g(x)|=e^x>1,即\ x>0.\end{cases}$

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & 当|x|<1,\\ 1, & 当|x|=1,\\ e^{-1}, & 当|x|>1.\end{cases}$

图形略.

14. (1) 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$；

(2) 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

解 (1) $f(x-2)=(x-2)^2+2(x-2)+3$，从而有 $f(x)=x^2+2x+3$，

所以 $f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$.

(2) $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$，从而有 $f(x)=2-2x^2$，

所以 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x$.

第一章　极限与连续

一、教学基本要求

1. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

2. 理解函数极限与左、右极限之间的关系.

3. 了解极限的性质与极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界准则),掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

4. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

5. 掌握利用等价无穷小求极限,利用无穷小的性质求极限.

6. 理解函数连续性的概念(含左连续和右连续),会判别函数间断点的类型.

7. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,会利用函数的连续性求极限.

8. 理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理、零点定理),并会应用这些性质.

二、内容要点

1. 数列极限

(1) **定义**　设数列$\{x_n\}$,如果存在常数a,$\forall \varepsilon>0$,$\exists N\in \mathbf{Z}^+$,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$成立,则称$a$是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于$a$,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 性质

(i) 唯一性:收敛数列的极限必唯一.

(ii) 有界性:若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界.

(iii) 保号性:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),则$\exists N\in \mathbf{Z}^+$,当$n>N$时,恒有$x_n>0$(或$x_n<0$).

(iv) 收敛数列与其子数列的关系:

(a) 数列$\{x_n\}$收敛于$a\Leftrightarrow$它的任一子数列也收敛,且极限都为a.

(b) 数列$\{x_n\}$收敛于$a\Leftrightarrow$子数列$\{x_{2n}\}$,$\{x_{2n-1}\}$均收敛于a.

(3) 数列极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=AB$;

当$y_n\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$且$B\neq 0$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

(4) 数列极限存在准则

(i) 夹逼准则：如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足条件：$\exists N\in \mathbf{Z}^+$，当 $n>N$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$($a$ 为有限值或为∞).

(ii) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

(iii) 重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

2. 函数极限

(1) **定义 1** 设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

定义 2 设函数 $f(x)$在(x_0,x_0+h)(或(x_0-h,x_0)) $(h>0)$内有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $(\delta<h)$. 当 $x_0<x<x_0+\delta$ (或 $x_0-\delta<x<x_0$)时有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限(或左极限)，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\quad(\text{或}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A)$$

或

$$f(x_0+0)=A\quad(\text{或}\ f(x_0-0)=A).$$

定义 3 设函数 $f(x)$在$|x|\geqslant a$ 时有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

定义 4 设函数 $f(x)$在 $x\geqslant a$ (或 $x\leqslant a$)时有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ (或 $x<-X$)时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$ (或 $x\to-\infty$)时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

(2) 极限存在的充要条件

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\iff\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\iff\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 函数极限性质

(i) 唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值唯一.

(ii) 局部有界性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有界.

(iii) 局部保号性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$且$A>0$ (或$A<0$)，则存在 x_0 的某一去心邻域，使 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

(iv) 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant0$ (或 $f(x)\leqslant0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$ (或$A\leqslant0$).

(4) 函数极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=AB$； $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=CA$； $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n$；

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.