

“十二五”国家重点图书·重大出版工程规划
航空航天精品系列图书

固态波陀螺仪 导航系统

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ НА
ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПАХ

В.А.Матвеев Б.С.Лунин М.А.Басараб [俄] 著
马菊红 编译 傅利 审



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

014011580

V241.5
33

“十二五”国家重点图书·重大出版工程规划
航空航天精品系列图书

固态波陀螺仪 导航系统

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ НА
ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПАХ

В.А.Матвеев Б.С.Лунин М.А.Басараб [俄] 著

马菊红 编译 傅利 审



北航

C1698594



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书中研究了固态波陀螺仪作为新一代捷联惯性导航系统敏感部件的主要工作原理。研究了与固态波陀螺仪的模拟、设计及生产工艺相关的问题以及与其参数识别过程、平衡过程以及一次、二次信息处理过程相关的问题。在解决所提出的问题时广泛运用了以 R-函数理论和原子函数理论为基础的数值逼近方法和四元数代数机构。

本书适用于相应专业的科研工作者、研究生及高年级本科生。

图书在版编目(CIP)数据

固态波陀螺仪导航系统/马菊红编译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2013. 7

ISBN 978-7-5603-4038-8

I. ①固… II. ①马… III. ①航空仪表—振动—
陀螺仪—研究 IV. ①V241.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 054990 号

策划编辑 甄森森

责任编辑 范业婷

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂

开 本 880mm×1230mm 1/16 印张 11.75 字数 236 千字

版 次 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4038-8

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 前言

Preface

导航设备的快速发展是技术进步的一个主要方面。这一过程的特点是：一方面，出现了一系列以新原理为基础的导航设备（固态陀螺仪和微机械陀螺仪，卫星导航系统）；另一方面，它们广泛用于现代社会生活的很多领域。如果说 10~15 年前导航设备还只是用于空中导航和航海，那么现在它们应用于工业机器人中，钻井设备的控制头中，汽车的主动悬架中，用来定向的独立坐标测定仪中，虚拟现实头盔中等。结合现代社会的计算机化，导航系统成了信息环境的主要组成部分之一。

高精度武器系统的出现为在军用技术设备中采用导航装置提供了新的机遇。军用飞机、导弹、鱼雷、制导弹头、枪炮稳定器、各种控制器、弹射椅——这还远远没有完全列出导航装置的现代应用。

宇航技术是使用惯性导航系统的特殊领域。与天文学定向方法一样，今天，导航系统几乎运用在所有类型的航天器上。

陀螺仪像以前一样仍然是飞行器和飞船不可分割的部分。尽管卫星导航系统发展迅速，所有飞机和飞船的机载设备中还是有独立的导航系统，这是因为必须保障控制运动的独立系统工作，以及出于安全上的考虑，因为存在无线电阴影区和一些地区，在卫星信号接收器工作时地球的电磁干扰能够引起故障。

今天，在这些陀螺仪运用的传统领域中，对导航系统提出了新的、更严格的要求。

它们在复杂的外部条件中工作，应该可靠性高、工作寿命长、精度高、质量小、外形尺寸小、能量消耗少。这些要求促使人们研制新型的陀螺仪，因为几十年前研制的机械陀螺仪在今天其很多参数都已经不能满足要求。

众所周知，经典陀螺仪的主要缺点是存在旋转（及磨损）部件：电动机、轴承等。由于运用固定在轴承中的物质作为敏感部件，所以经典的转子陀螺仪对机械负荷很敏感。尽管在几十年中转子陀螺仪的性能接连得到改善，但研究者认为对参数的原则性改善与新一代固态陀螺仪有关，这种陀螺仪的旋转转子用静态结构代替：固态波陀螺仪和光学陀螺仪（环型激光陀螺仪和光纤陀螺仪）。所有这些陀螺仪的研制开始于 20 世纪 70 年代初，目前尚处于工业开发的各个阶段。

固态波陀螺仪的作用原理是以旋转的轴对称壳体中激发的弹性驻波的惯性为基础。这一效应是 Г. 布莱恩在 1890 年在振动壳体绕其对称轴旋转时研究它的声振特性时所做出的理论发现，并得到实验的证实。由于哥氏力的作用，驻波对于壳体，以及在惯性空间中都会发生进动。布莱恩在用显微镜观察在旋转平台上薄壁酒杯的振动边缘时通过巧妙的实验证实了自己的计算。他查明，驻波的转数（通过计算显微镜视野中通过的波腹或结点数确定）总是小于酒杯的实际转数，也就是说，驻波的旋转角速度小于载波的旋转角速度。

布莱恩研究了运动的个别情况——振动环的匀速旋转。在 20 世纪 60 年代,П. 林奇(美国)通过实验证实了该效应对以变角速度旋转的环的适用性。后来,茹拉夫廖夫和克里莫夫在理论上证实了布莱恩效应对于任何规律的基座旋转都正确。

在某种意义上固态波陀螺仪可以看作谐振子陀螺仪的进一步发展,它的最早模型是最简单的音叉陀螺仪。

新型陀螺仪独特的工作原理使其具有一系列优点:

- (1)完全没有运动部件,装置的工作寿命长;
- (2)精度高,偶然误差小;
- (3)对周围环境的恶劣条件(温度,振动, γ 射线)稳定性好;
- (4)较小的外形尺寸、质量及消耗功率;
- (5)在短时间切断供电的情况下可以保留惯性信息。

这些优点使固态波陀螺仪成为运用在捷联惯性导航系统中最有前景的一种陀螺仪。

对这种类型装置的技术结构研究及生产运用要求解决一系列新的科学问题。在模拟固态波陀螺仪和设计以固态波陀螺仪为基础的捷联惯性导航系统时所产生问题的多样性要求更广泛地引用现代逼近理论方法、数值分析方法、人工智能方法、数字的信号处理方法。

本专著由 5 章构成。

第 1 章描写了固态波陀螺仪的基本作用原理。根据两种模型(环形模型和半球形模型)进行阐述。尽管环形模型简单,它也能够实现半球谐振子中的很多过程,进行相当完全的定性分析。此外,这种模型具有独立作用,因为目前存在以小型环形谐振子为基础的固态波陀螺仪结构。在这章中还介绍了激振动系统和信息采集系统方面的知识。

第 2 章阐述了非理想谐振子的误差源及对它的数学补偿(平衡)。研究了与固态波陀螺仪驻波控制系统相关的理论问题。

第 3 章阐述了通过现代逼近理论方法及数值分析法(原子逼近及样条逼近的有限元方法, R -函数理论方法)来模拟固态波陀螺仪谐振环形结构和壳体结构的方法。其重点是模拟固态波陀螺仪中对其动力学产生影响的热过程。

第 4 章研究了与固态波陀螺仪的结构及工艺相关的问题。探讨了测量高品质因数谐振子性能指标的方法。着重从非弹性理论观点研究了内摩擦的测量及实验数据插值问题。研究了测量和计算半球谐振子频谱问题,以及测量固有频率分裂的方法。研究了石英玻璃的结构和性质,以及石英玻璃中的内摩擦作用。探讨了损耗与结构温度、杂质、内应力的相互联系,研究了谐振子退火的特点。详细探讨了与玻璃机械加工所形成的损坏层,以及吸附大气水相关的表面非弹性效应。

第 5 章阐述的是在固态波陀螺仪基础上构建捷联惯性导航系统的一些情况。研究了固态波陀螺仪信号处理中的卡尔曼滤波问题,四元数逼近及插值的方法和算法。

本专著含有大量实验材料,还综述了大量文献资料,所以,对模拟和设计固态波陀螺仪以及以固态波为基础的捷联惯性导航系统都很有益。

作 者

2012 年 12 月

◎ 目 录

Contents

第 1 章 固态波陀螺仪作用的理论基础	1
1.1 工作原理	1
1.2 环形谐振子模型	3
1.3 外壳式谐振子模型	12
1.4 激励系统	19
1.5 获取信息系统	27
第 2 章 非理想固态波陀螺仪动力学	31
2.1 非理想固态波陀螺仪的误差源	31
2.2 数学方面的平衡	35
2.3 对驻波的控制	39
第 3 章 固态波陀螺仪中物理过程的数学模拟	51
3.1 弹性环动力学模拟	51
3.2 旋转壳体动力学模拟	62
3.3 固态波陀螺仪中热过程的模拟的特点	68
3.4 具有任意母线壳体的进动参数的计算	74
第 4 章 固态波陀螺仪的结构及工艺	79
4.1 固态波陀螺仪的结构特点	79
4.2 高精度固态波陀螺仪的结构和工艺	80
4.3 带金属谐振子的固态波陀螺仪	111
第 5 章 用固态波陀螺仪设计捷联惯性导航系统的理论基础	116
5.1 捷联惯性导航系统的构建	116
5.2 导航算法	119
5.3 在捷联惯性导航系统中采用四元数代数	124
附录 1 傅科摆的固态波陀螺仪谐振子模拟	146
附录 2 平衡的进化算法	148

附录 3 用原子函数 $up(x)$ 和 $fup_n(x)$ 逼近	156
附录 4 概周期函数	161
附录 5 R 函数的理论基础	163
附录 6 原子函数 $h_a(x)$	172
附录 7 四元数理论的基本概念	174
附录 8 惠特克—奈奎斯特—香农理论及其广义理论	177
名词索引	179
参考文献	181

第1章 固态波陀螺仪作用的理论基础

1.1 工作原理

固态波陀螺仪作用的物理原理是以弹性波的惯性为基础(布莱恩效应)。广泛使用具有半球形敏感元件的固态波陀螺仪,其薄壁谐振子如图 1.1 所示,壳体 1 借助于支架 2 与基座 3 刚性连接。

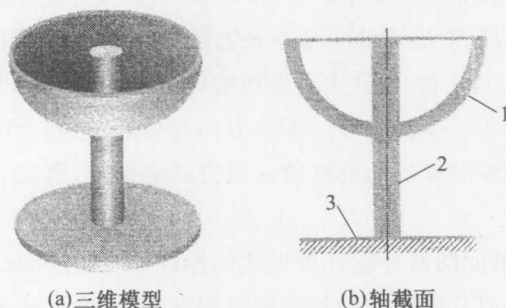


图 1.1 固态波陀螺仪谐振子

1—壳体;2—支架;3—基座

我们从半球形谐振子物体中分出横截面积有限的半径为 R 的环,并认为,该环(环形谐振子)的中心与基座刚性连接,以角速度 Ω 旋转。

假设,在基座旋转情况下,在环形谐振子中激起振型阶次为 k 的弹性驻波。图 1.2(a) 所表示的是 $k=2$ 的驻波形式,其最大值的半径在装置壳体坐标系 XOY 中的位置与 Y 轴成 φ_0 角。若装置壳体开始以角速度 Ω 旋转,那么,波腹的方位角的变化规律为

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \quad (1.1.1)$$

由表达式(1.1.1)可得,驻波在空间的转角小于装置壳体的转角,等于 $\int_0^t \Omega(\tau) d\tau$,并且,在 φ_0 已知的情况下(例如,在 $\varphi_0 = 0$ 的情况下)角 $\varphi(t)$ 是基座转角的量度,即

$$\varphi(t) = -\frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau \quad (1.1.2)$$

在类似条件中,带有垂直转轴的固体会相对于基座无摩擦地转动,角度为

$$\varphi(t) = -\int_0^t \Omega(\tau) d\tau \quad (1.1.3)$$

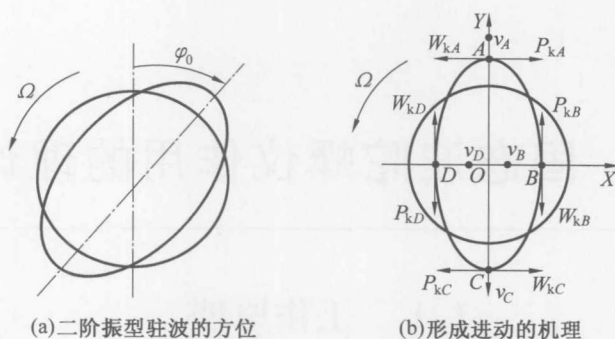


图 1.2 固态波陀螺仪中的布莱恩效应

式(1.1.2)和(1.1.3)的差别只是换算比例系数(进动率)不同(不等于1)。

图 1.2(b)可以详细解释产生进动的机理。驻波的波腹位于点A,B,C,D中。在半球转动时,这些点做复杂运动:速度为 v_A, v_B, v_C, v_D 的相对运动和角速度为 Ω 的牵连运动。在点A,B,C,D中出现的单元的质量的科氏(旋转)加速度分别用 $W_{kA}, W_{kB}, W_{kC}, W_{kD}$ 表示。在点A,C和B,D中所施加的科氏惯性力 $P_{kA}, P_{kB}, P_{kC}, P_{kD}$ 方向相反,并产生力偶。力偶 P_{kA}, P_{kC} 和 P_{kB}, P_{kD} 方向相反,其总和会产生科氏惯性力的合力偶,其模量正比于基座的旋转角速度值。该力偶会引起(驻波)波场相对于谐振子在惯性空间中的进动。

在环形谐振子中可能同时存在几种形式的弹性振动,分别对应于 $k=2,3,4,\dots$,在这种情况下,可以形成几种独立的基座旋转测定方法,换算式为(1.1.2),比例系数(进动率)为

$$K = \frac{2}{k^2 + 1} \quad (1.1.4)$$

二阶($k=2$)振型通常用作工作形式,因为它是半球形谐振子固有弯曲振动的低阶形式(图 1.3(c))。零阶振型($k=0$)相应于拉伸—压缩振动,在研究固态波陀螺仪的动力学时不予考虑,因为谐振子的拉伸变形与弯曲变形相比很小(图 1.3(a))。一阶($k=1$)振型对应于谐振子作为刚体的移动,在对固态波陀螺仪运动方程求解时必须考虑,并考虑谐振子支架的形变(图 1.3(b))。

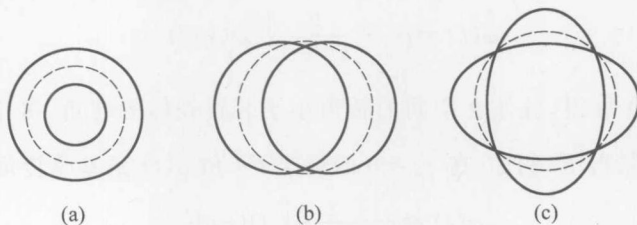


图 1.3 谐振子的低阶固有振型

1.2 环形谐振子模型

1.2.1 环形谐振子的几何结构和动力学

首先我们来看一下对于在任意角度 φ 情况下在小角度 $\Delta\varphi$ 上所形成的环形谐振子单元的主要几何关系。

假设用 aa_1 段表示处于不变形状的谐振子单元(图 1.4)。该段在壳体坐标系 XOY 中的起点和终点坐标值为

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & y &= R \sin \varphi \\ x_1 &= R \cos(\varphi + \Delta\varphi), & y_1 &= R \sin(\varphi + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

小段单元 aa_1 轴线的长度可表示为

$$\Delta s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \quad (1.2.2)$$

将式(1.2.1)代入式(1.2.2),对于小度角 $\Delta\varphi$,近似可得

$$\Delta s \approx R \Delta\varphi \quad (1.2.3)$$

在谐振子有形变的情况下,其 aa_1 单元的位置为 $\overline{aa_1}$ 。并且,线段起点沿轴线的切向和法向具有的正变形位移为 v 和 w ,而线段终点沿轴线的切向和法向具有的正变形位移为 $v + \Delta v$ 和 $w + \Delta w$ 。 $\overline{aa_1}$ 段的起点和终点坐标及长度可表示为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= R \cos \varphi - v \sin \varphi - w \cos \varphi \\ \bar{y} &= R \sin \varphi + v \cos \varphi - w \sin \varphi \\ \bar{x}_1 &= R \cos(\varphi + \Delta\varphi) - (v + \Delta v) \sin(\varphi + \Delta\varphi) - (w + \Delta w) \cos(\varphi + \Delta\varphi) \\ \bar{y}_1 &= R \sin(\varphi + \Delta\varphi) + (v + \Delta v) \cos(\varphi + \Delta\varphi) - (w + \Delta w) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\Delta s = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2} \quad (1.2.5)$$

如果注意到在 $\Delta\varphi \rightarrow 0$ 时, $\Delta v \approx v' \Delta\varphi$, $\Delta w \approx w' \Delta\varphi$, $\cos \Delta\varphi \approx 1$, $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, 那么,由公式(1.2.4)可得

$$\overline{\Delta s} = \Delta\varphi \sqrt{(R + v' - w')^2 + (v + w')^2} \quad (1.2.6)$$

在表达式(1.2.6)及后面各处都用“'”表示对角度 φ 的导数,而坐标 v 和 w 取作环形谐振子的广义坐标。

在后面,我们将以变形时谐振子的中线不可拉伸假设为根据,这相当于满足条件

$$\Delta s = \overline{\Delta s} \quad (1.2.7)$$

或者考虑到式(1.2.3), (1.2.6), 有

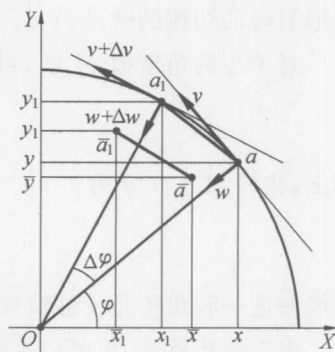


图 1.4 环形谐振子的几何结构



$$(R + v' - w)^2 + (v + w')^2 = R^2 \quad (1.2.8)$$

对不可拉伸条件(1.2.7)线性化,可得

$$v' = w \quad (1.2.9)$$

在谐振子中线圆周平面发生谐振子变形的情况下,在其每一点切线转动的角度为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (1.2.10)$$

式中, ψ_1 为由于切向变形引起的切线的转动,它与截面位移 v 有关;角 ψ_2 为由于径向变形引起的切线的转动,它与小段长度 $R\Delta\varphi$ 两端在径向位移不同有关。

对于小的角度值 ψ_1, ψ_2 , 可得

$$\psi_1 \approx \frac{v}{R}, \quad \psi_2 \approx \frac{1}{R}w'$$

那么,式(1.2.10)变为

$$\psi = \frac{1}{R}(v + w') \quad (1.2.11)$$

切线的这一转角正是使驻波变形时在环的横截面中形成弹性矩的起因。

为进一步研究,重要的是确定以速度 Ω 旋转的环形谐振子的轴向中线上任意点在形变 $\dot{v}, \dot{w}$ 引起相对运动的情况下的主要动力学关系。对于小的 v 和 w 值,计算绝对点在谐振子中线上的切向分量 $v_{\parallel}$ 和径向分量 $v_{\perp}$, 可得

$$\left. \begin{aligned} v_{\parallel} &= \dot{v} + \Omega(R - w) \\ v_{\perp} &= w + \Omega v \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

1.2.2 环形谐振子动力学

为了导出环形谐振子的动力学方程,运用拉格朗日方法。既然谐振子的广义坐标 v 和 w 是两个独立变量 t 和 φ 的函数,那么,首先必须确定拉格朗日方程本身。为此,我们要研究一下环的动能与势能结构,其密度(单位角度值)可表示为

$$T = \frac{1}{2}\rho S(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \frac{1}{2}\rho S[(\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2] \\ \Pi = \frac{EJ}{2}\kappa^2 \quad (1.2.13)$$

式中, ρ 为环形材料的密度; S 为环的横截面积; R 为环的中间中性线的半径; E 为材料的弹性模量; J 为环的横截面相对于中性轴的惯性矩; κ 为环的中性层曲率的变化。

考虑到式(1.2.11),有

$$\kappa = \frac{1}{R}\psi' = \frac{1}{R^2}(v' + w'') \quad (1.2.14)$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2R^4}(v' + w'')^2 \quad (1.2.15)$$

系统的单位拉格朗日算子可表示

$$L = \frac{T - \Pi}{\rho S} = [(\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2 - \kappa^2 (v' + w'')^2] \quad (1.2.16)$$

式中, $\kappa^2 = \frac{EJ}{\rho SR^4}$ 。

由拉格朗日函数和约束方程(1.2.8)可以形成双重积分

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} [L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w'') + \lambda(t, \varphi) f(v', w)] dt d\varphi \quad (1.2.17)$$

式中, $\lambda(t, \varphi)$ 为不确定拉格朗日乘子; $f(v', w) = v' - w = 0$ 为约束方程(环的中线不可拉伸条件)。

根据哈密顿原理, 系统从给定的初始状态 (φ_1, t_1) 到确定的最终状态 (φ_2, t_2) 实际运动时, 积分(1.2.17) 具有最小值。位移 v 和 w 是系统的广义坐标, 因此, 积分(1.2.17) 的最小值对于这些变量的变化相当于

$$\delta I(\delta v, \delta w) = 0$$

式中, δ 为函数增量或变量符号。

将最后的表达式展开, 有

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} & \left[\frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \right. \\ & \left. \lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \delta v' + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} \delta w \right] dt d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

利用分部积分, 并注意到在确定的始点和终点的偏微分等于零来变换方程(1.2.18), 可得

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} & \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} \right] \delta v + \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) \right] \delta w \right\} dt d\varphi = 0 \end{aligned}$$

在 $\delta v, \delta w$ 变换时, 当余因子形式的被积式变为零时满足最后一个条件。结果可以得到弹性环谐振子的拉格朗日方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.19)$$

将拉格朗日函数(1.2.16) 代入方程(1.2.19), 并考虑式(1.2.9), 可得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega \dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \Omega^2 v - \kappa^2 (w''' + v'') + \\ \frac{d}{d\varphi} [\lambda(R + v' - w)] - \lambda(w' + v) &= 0 \\ \ddot{w} + 2\Omega \dot{v} + \dot{\Omega} v + (R - w)\Omega^2 + \kappa^2 (w^{(4)} + v''') + \\ \frac{d}{d\varphi} [\lambda(v + w')] + \lambda(R + v' - w) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.20)$$



式中,“·”表示对时间的导数。

用方程(1.2.20)与约束方程(1.2.9)一起可以完全描述以绝对角速度 Ω 旋转的环形谐振子本身的运动。方程组(1.2.20)是非线性的,但是,环形谐振子运动的基本特征可以相当完全地用其主要的线性部分来描述。为了使方程组(1.2.20)线性化,我们用下面的表达式表示拉格朗日乘子

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$$

这里, λ_0 与变量 v, w 无关,而在 $v, w \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 = \lambda_1(t, \varphi) \rightarrow 0$ 。那么,由方程组(1.2.20)的第二个方程可得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \kappa^2(w'' + v'') + R\lambda_1' + \Omega^2 w'' &= 0 \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v - 2\Omega^2 w + \kappa^2(w^{(4)} + v''') + \lambda_1 R - \Omega^2 w'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.21)$$

第二个方程对 φ 求微分,并从第一个方程中减掉。把这一差值再一次对 φ 求微分,并借助于约束条件(1.2.8)消去 v ,可得

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' + \kappa^2(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'') - \Omega^2(w^{(4)} + 3w'') = 0 \quad (1.2.22)$$

这样,代替方程组(1.2.21)得到了对于变量 w 的齐次微分方程,变量 w 描述的是弹性环在径向的形变。

在分析环形谐振子的运动时,使用无量纲时间 $\tau = kt$ 和基座的无量纲角速度 $\omega = \Omega/k$ 很方便:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'' - \omega^2(w^{(4)} + 3w'') = 0 \quad (1.2.23)$$

这里,时间导数按无量纲时间 τ 计算。

为了得到单值解,必须对方程(1.2.23)补充初始条件和沿圆周角 φ 循环的条件,例如

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi, 0) &= \alpha_0, \quad w(\varphi, 0) = 0 \\ w^{(n)}(0, t) &= w^{(n)}(2\pi, t), \quad n = \overline{0, 5} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.24)$$

由方程(1.2.23)可得,基座的旋转角速度 ω 和角加速度 $\dot{\omega}$ 包含在随时间变化的系数里。因此,基座本身的旋转不会导致形成环形谐振子的弹性振动。但是,在外部激励使谐振子激起弹性波以后,谐振子的动力学则与基座的旋转有关,这种关系在该类型的惯性敏感旋转部件中得到运用。

以后要研究的情况是 $\Omega^2, \omega^2, \dot{\Omega}, \dot{\omega}$ 值很小,并且在方程(1.2.22), (1.2.23)中它们可以忽略不计。

1.2.3 解环形谐振子的运动方程

我们要对方程(1.2.23)求解,得到环形谐振子中驻波的参数。对应的解是所有相互独立的函数,其形式为

$$w(\varphi, \tau) = a(\tau) \cos[2(\varphi - \varphi_0) + \alpha(\tau)] \quad (1.2.25)$$

式中, $a(\tau)$ 为驻波在径向的位移; $\alpha(\tau)$ 为驻波在空间环形展开。

把式(1.2.25)代入式(1.2.23), 可得

$$\begin{aligned} & -[5\ddot{a} + (36 + 4\omega^2 + 8\omega\dot{a} - 5\dot{a}^2)\alpha]\cos\beta + \\ & [(10\dot{a} - 8\omega)\dot{a} + (5\ddot{a} - 4\dot{\omega})a]\sin\beta = 0 \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

其中, $\beta = 2(\varphi - \varphi_0) + \alpha$.

等式(1.2.26)成立的条件是

$$2\dot{a}(5\dot{a} - 4\omega) + a(5\ddot{a} - 4\dot{\omega}) = 0$$

或

$$a(\tau) = \frac{4}{5} \int_0^\tau \omega(s) ds \quad (1.2.27)$$

那么, 解方程

$$5\ddot{a} + \left(36 + \frac{36}{5}\omega^2\right)a = 0 \quad (1.2.28)$$

可以得到振幅 $a(\tau)$ 。我们来研究一下解方程(1.2.28)的个别情况。在基座没有旋转时($\omega = 0$), 可以得到带有常系数的方程

$$5\ddot{a} + 36a = 0 \quad (1.2.29)$$

它的初始条件是

$$a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0$$

解为

$$a(\tau) = a_0 \cos \frac{6}{\sqrt{5}}\tau \quad (1.2.30)$$

驻波振动频率的量纲形式按下式计算

$$v_0 = k\mu_0 = 6\sqrt{\frac{EJ}{5\rho SR^4}}$$

把式(1.2.27), (1.2.30)代入式(1.2.25), 并对于静基座取 $\alpha(\tau) = 0$, 可得

$$w(\varphi, \tau) = a_0 \cos \mu_0 \tau \cos[2(\varphi - \varphi_0)] \quad (1.2.31)$$

式中, $\mu_0 = 6\sqrt{5}$ 为不旋转谐振子弹性固有振动的无量纲频率。

从解式(1.2.31)可见, 驻波波腹的角度位置是

$$\varphi_n = \varphi_0 + (m-1)\pi, \quad m = 1, 2$$

式中, φ_0 为初始角, 它对应于激发初始振动的方向。

在基座以不变的角速度 $\omega = \omega_0 = \text{常数}$ 旋转时, 解式(1.2.23)的形式为

$$w(\varphi, \tau) = a(\tau) \cos\left[2(\varphi - \varphi_0) + \frac{4}{5}\omega_0\tau\right] \quad (1.2.32)$$

式中

$$a(\tau) = a_0 \cos \mu\tau$$

由式(1.2.28)可得



$$\mu = \sqrt{\mu_0^2 + \frac{36}{25}\omega_0^2}$$

解式(1.2.23)可得,基座转速不变,既会改变基座的固有振动频率 μ ,也会改变驻波的空间位置。因此,对驻波谐振频率的测定可以给出有关基座旋转的信息。但是,主要的测定方法应该认为是测定驻波波腹相对于装置壳体的位置。由式

(1.2.32)还可得出,驻波波腹的位置满足: $\cos\left[2(\varphi - \varphi_0) + \frac{4}{5}\omega_0\tau\right] = 1$,即

$$\varphi_n = \varphi_0 + (m-1)\pi - \frac{2}{5}\omega_0\tau, \quad m=1,2 \quad (1.2.33)$$

根据测定装置壳体坐标系中的角度 φ ,可以得到有关基座转速 ω_0 或基座转角 $\alpha_0 = \omega_0\tau$ 的信息。

指出下列事实很有用:对于惯性空间驻波的转动速度为

$$\dot{\varphi}_n(\tau) = \omega_0 - \frac{2}{5}\omega_0 = \frac{3}{5}\omega_0 \quad (1.2.34)$$

由式(1.2.34)可知,谐振子形成的驻波相对惯性空间以 $\frac{3}{5}\omega_0$ (基座转速的3/5)的速度旋转。

在基座以任意角速度旋转时($\omega(\tau) \neq \text{const}$),式(1.2.25)解中的函数 $\alpha(\tau)$ 由式(1.2.27)确定。所以,在这种情况下仍然有可能测定驻波角度位置的转动,即

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + (m-1)\pi - \frac{2}{5}\int_0^\tau \omega(s)ds \quad (1.2.35)$$

在这种情况下函数 $\alpha(\tau)$ 由线性非稳态方程(1.2.23)的解决定,很多个别情况在其他相关文献中得到相当详尽的研究。

用布勃诺夫—加廖尔金法(Метод БУбнова—Галеркина)求解动力学方程。我们来研究求解理想的未拉伸旋转环的自由振动方程的布勃诺夫—加廖尔金法。

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \kappa^2(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'') = 0 \quad (1.2.36)$$

方程(1.2.36)是对于空间变量的6阶方程和对于时间的2阶方程。因此,必须提出6个边界条件和2个初始条件。我们对振动相位不感兴趣,因此,只提出边界条件。很明显,对于环就是6个周期条件(1.2.24)。通常满足这些条件的三角基础函数是

$$\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \dots\} \quad (1.2.37)$$

我们研究二阶振型(主要形式)。在这种情况下系统(1.2.37)中只剩下两个函数: $\cos 2\varphi$ 和 $\sin 2\varphi$ 。那么,初始函数 w 展开成级数的形式为

$$w(\varphi, t) = p(t)\cos 2\varphi + q(t)\sin 2\varphi \quad (1.2.38)$$

式中, $p(t), q(t)$ 是与时间有关的未知系数。

根据布勃诺夫—加廖尔金法,应该使空间基础函数 $\cos 2\varphi$ 和 $\sin 2\varphi$ 的数量积(1.2.38)等于零,即

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} [\ddot{w}'' - \ddot{w} + k^2(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'')] \cos 2\varphi d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} [\ddot{w}'' - \ddot{w} + k^2(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'')] \sin 2\varphi d\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.39)$$

将 w 的表达式(1.2.38)代入式(1.2.39)中,经过不复杂的变换和求积分后可得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p} + \frac{36\kappa^2}{5} p &= 0 \\ \ddot{q} + \frac{36\kappa^2}{5} q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.40)$$

方程组(1.2.40)决定两个谐振子,具有相同的固有频率

$$\omega_0 = 6\kappa/\sqrt{5}$$

近似解的形式为

$$w(\varphi, t) = (A_2 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t) \sin 2\varphi + (C_2 \sin \omega_0 t + D_2 \cos \omega_0 t) \cos 2\varphi \quad (1.2.41)$$

式(1.2.41)具有以下物理意义:环形谐振子的振动可以用圆周角和相位正交的两个驻波的和的形式表示。

类似地,对于三阶振型有

$$\omega_0 = \frac{24}{\sqrt{10}}\kappa$$

$$w(\varphi, t) = (A_3 \sin \omega_0 t + B_3 \cos \omega_0 t) \sin 3\varphi + (C_3 \sin \omega_0 t + D_3 \cos \omega_0 t) \cos 3\varphi$$

一般来说,任何环谐振子的振动都是无数下列固有振动形式的和

$$w(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [p_n(t) \cos n\varphi + q_n(t) \sin n\varphi]$$

用傅里叶法求解动态方程。我们来研究环形谐振子的动态方程

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'') = 0 \quad (1.2.42)$$

初始条件为

$$w(\varphi, 0) = a_0(\varphi), \quad \dot{w}(\varphi, 0) = a_1(\varphi) \quad (1.2.43)$$

由原型 $w = w(\varphi, t)$ 对自变量 φ , 转为傅里叶形式 $W = W(s, t)$

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} w(\varphi, t) e^{-i\varphi s} d\varphi$$

运用傅里叶变换的性质,替代偏导数微分方程(1.2.42),可以得到普通的微分方程

$$\ddot{W} + 4\Omega i \frac{s}{s^2 + 1} \dot{W} + \kappa^2 \frac{(s^2 - 1)^2 s^2}{s + 1} W = 0 \quad (1.2.44)$$

初始条件为

$$W(s, 0) = \hat{a}_0(s), \quad \dot{W}(s, 0) = \hat{a}_1(s) \quad (1.2.45)$$

这里



$$\hat{a}_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} a_j(\varphi) e^{-i\varphi s} d\varphi, \quad j=0,1$$

相应的特征方程为

$$r^2 + 4\Omega i \frac{s}{s^2+1} r + \kappa^2 \frac{(s^2-1)^2 s^2}{s^2+1} = 0$$

判别式为

$$D = \left(4\Omega i \frac{s}{s+1} \right)^2 - 4\kappa^2 \frac{(s^2-1)^2 s^2}{s^2+1} < 0$$

式(1.2.44)解的形式为

$$W(s,t) = \exp[-i\beta(s)t] \left[C_1(s) \exp(it\sqrt{\omega_0^2(s) + \beta^2(s)}) + C_2(s) \exp(-it\sqrt{\omega_0^2(s) + \beta^2(s)}) \right] \quad (1.2.46)$$

式中

$$\beta(s) = \Omega \frac{2s}{s^2+1}; \quad \omega_0(s) = k \frac{(s^2-1)s}{\sqrt{s^2+1}}$$

$C_1(s), C_2(s)$ 为不确定函数。

由于 $\Omega^2 \ll 1$, 可以近似地记为

$$W(s,t) = e^{-i\beta t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}) \quad (1.2.47)$$

不确定函数可以由初始条件(1.2.45) 获得

$$W(s,0) = C_1(s) + C_2(s) = \hat{a}_0(s)$$

$$\dot{W}(s,0) = -i\beta(s)[C_1(s) + C_2(s)] + i\omega_0(s)[C_1(s) - C_2(s)] = \hat{a}_1(s)$$

我们可以得到

$$C_1(s) = \frac{[\omega_0(s) + \beta(s)]\hat{a}_0(s) - i\hat{a}_1(s)}{2\omega_0(s)}$$

$$C_2(s) = \frac{[\omega_0(s) - \beta(s)]\hat{a}_0(s) + i\hat{a}_1(s)}{2\omega_0(s)}$$

原式的傅里叶级数形式为

$$w(\varphi,t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(s,t) e^{i\varphi s} \quad (1.2.48)$$

特别是对于二阶振型($s = \pm 2$), 有

$$w(\varphi,t) = e^{-i\Omega \frac{4}{5}t} e^{2i\varphi} [C_1(2) e^{i\frac{6}{\sqrt{5}}\kappa} + C_2(2) e^{-i\frac{6}{\sqrt{5}}\kappa}] + e^{i\Omega \frac{4}{5}t} e^{-2i\varphi} [C_1(-2) e^{-i\frac{6}{\sqrt{5}}\kappa} + C_2(-2) e^{i\frac{6}{\sqrt{5}}\kappa}]$$

1.2.4 内摩擦及外部载荷对环形谐振子动力学的作用

弹性波使环形谐振子发生形变不可避免地伴有克服内部摩擦的能量损失。内部耗散机理最普遍的模式是杰利维—法依格特模型(Модель Кельвина-Фойгта)。它是胡克定律在非弹性形变情况的概括