



“十二五”普通高等教育车辆工程专业规划教材

# 汽车振动与噪声控制

QICHE ZHENDONG YU ZAOSHENG KONGZHI

(第二版)

陈南 主编

张建润 孙蓓蓓 李普 副主编



人民交通出版社  
China Communications Press



“十二五”普通高等教育车辆工程专业规划教材

# 汽车振动与噪声控制

QICHE ZHENDONG YU ZAOSHENG KONGZHI

(第二版)

陈南 主编

张建润 孙蓓蓓 李普 副主编



人民交通出版社  
China Communications Press

## 内 容 提 要

本书首先介绍线性振动理论和声学基础理论。

在介绍基础理论之后,书中对汽车的几大基本总成:发动机动力传动总成,转向及底盘悬架总成,车身系统和制动时的振动、噪声及整车平顺性问题进行了系统的建模和分析,介绍了一些常用和新的控制方法。

本书可以作为高等理工科院校车辆工程类或制造类专业本科生及研究生的振动和噪声控制课程的教材,也可供从事相关领域研究的工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

汽车振动与噪声控制/陈南主编.—2版.—北京:  
人民交通出版社,2014.2

ISBN 978-7-114-11157-0

I. ①汽… II. ①陈… III. ①汽车—振动控制②汽车  
噪声—噪声控制 IV. ①U467.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第018023号

“十二五”普通高等教育车辆工程专业规划教材

书 名:汽车振动与噪声控制(第二版)

著 者:陈 南

责任编辑:夏 韡

出版发行:人民交通出版社

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址:<http://www.ccpublish.com.cn>

销售电话:(010)59757973

总 经 销:人民交通出版社发行部

经 销:各地新华书店

印 刷:北京市密东印刷有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:11.75

字 数:300千

版 次:2005年8月 第1版

2014年2月 第2版

印 次:2014年2月 第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-11157-0

定 价:28.00元

(有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

# “十二五”普通高等教育车辆工程专业规划教材

## 编委会名单

### 编委会主任

龚金科(湖南大学)

### 编委会副主任(按姓名拼音顺序)

陈南(东南大学) 方锡邦(合肥工业大学) 过学迅(武汉理工大学)

刘晶郁(长安大学) 吴光强(同济大学) 于多年(吉林大学)

### 编委会委员(按姓名拼音顺序)

蔡红民(长安大学) 陈全世(清华大学) 陈鑫(吉林大学)  
杜爱民(同济大学) 冯崇毅(东南大学) 冯晋祥(山东交通学院)  
郭应时(长安大学) 韩英淳(吉林大学) 何耀华(武汉理工大学)  
胡骅(武汉理工大学) 胡兴军(吉林大学) 黄韶炯(中国农业大学)  
兰巍(吉林大学) 宋慧(武汉科技大学) 谭继锦(合肥工业大学)  
王增才(山东大学) 阎岩(青岛理工大学) 张德鹏(长安大学)  
张志沛(长沙理工大学) 钟诗清(武汉理工大学) 周淑渊(泛亚汽车技术中心)

# 前 言

汽车性能的一个重要方面是振动和噪声水平。消费者挑选汽车时,往往首先感受的是驾驶或乘坐汽车时的振动和噪声状态,或者讲是在有意无意地比较其振动和噪声控制水平。因此,汽车振动和噪声控制作为汽车设计、制造方面的一个重要课题,受到广泛重视。

本教材统一而精炼地介绍了线性振动和声学基础理论作为基础篇。就其深度来讲,振动部分涵盖了线性振动理论的基本内容,包括对分析汽车振动问题非常必要的随机振动基础;声学基础部分,教材强调理解物理现象,并以此为基础来介绍分析方法和控制措施。

本教材另一重点是动力学建模。这是希望学生理解,线性振动和声学理论本身已发展的比较成熟而成为一套“规范”,其实践应用的重点往往是针对不同问题的动力学建模。基础篇外的各章,就是针对汽车几大基本总成的主要振动和噪声问题的建模分析,包括:发动机动力传动总成、转向底盘总成、车身振动和噪声及整车平顺性。当然,深入介绍上述任何一个问题,或都需要数本专著来论述。本教材试图做到的仅是,就振动和噪声问题,抓住重点,理清思路,并介绍一些新技术概念以开拓学生视野。

通过第一版出版以来的应用实践,我们对本书的应用对象和目标读者有了更明确的了解。随着汽车技术的发展,对本书涉及的一些知识内容,也有了更深刻的认识。特别考虑到一些有关汽车振动与噪声控制方面新技术的发展应用,我们感到有必要补充。在这样的背景下,承蒙人民交通出版社青睐,本书推出了第二版。

在第二版中,我们仍力图保持原来特色,即希望在相对紧凑的篇幅内,自成体系地介绍有关汽车振动与噪声控制技术方面的基础知识和关键问题处理思路,也补充介绍了近期已发展应用的一些新技术。因此,本书第二版在整体架构和主要内容方面,相对第一版没有太大的变化,主要对撰写语言表达有所润色,改正了某些印刷错误。另外,对一些新技术的应用发展,如车内噪声的有源控制技术的商品化应用,以实例形式给予了介绍。也对实践应用上很重要的建模抽象方面,以例题形式有所补充。

本教材适用于40学时左右的课堂教学。基础部分内容自成体系,可相对独立地讲授。教材第二章和第六章由张建润撰写,第三章和第五章由孙蓓蓓撰写,第七章和第八章由李普撰写,陈南撰写第一章和第四章并统编全书。东南大学孙庆鸿教授审阅全书。作为教材,本书引用了一些前辈和同仁的教学科研成果,已在参考文献中一一列出;在此一并表示衷心感谢。

鉴于我们的学识水平,书中一定存在疏漏和不妥之处,衷心希望本书的读者,提出宝贵的批评建议。

编 者

2013年11月

# 目 录

第一章 振动理论基础	1
第一节 介绍	1
第二节 单自由度系统	2
第三节 多自由度系统	14
第四节 连续系统振动	25
第五节 随机振动分析基础	41
练习题	50
第二章 声学理论基础	55
第一节 波动方程与声的基本性质	55
第二节 声传播及结构声辐射	63
第三节 声阻抗、声强及声功率	68
第四节 噪声及其控制技术	73
练习题	80
第三章 汽车发动机的振动分析与控制	82
第一节 发动机的振动激励源分析	82
第二节 发动机隔振技术	86
第三节 发动机气门振动	94
练习题	97
第四章 汽车动力传动及转向系统振动	99
第一节 振动分析的传递矩阵法	99
第二节 汽车动力传动系统振动	103
第三节 汽车转向系统振动	111
第四节 汽车制动时的振动	116
练习题	120
第五章 汽车平顺性	121
第一节 平顺性定义	121
第二节 人体反应与平顺性评价	122
第三节 道路路面不平度的统计描述	125
第四节 平顺性分析	129
第五节 影响汽车平顺性的结构因素	138
练习题	140

<b>第六章 发动机及动力总成噪声</b> .....	141
第一节 发动机及动力总成噪声分析与控制.....	141
第二节 传动系噪声.....	143
第三节 发动机的空气动力噪声.....	145
练习题.....	146
<b>第七章 底盘系统噪声</b> .....	147
第一节 轮胎噪声.....	147
第二节 制动噪声.....	152
练习题.....	155
<b>第八章 车身及整车噪声</b> .....	156
第一节 车身结构噪声及其控制.....	156
第二节 车内噪声.....	157
第三节 汽车整车噪声及其控制.....	170
第四节 汽车噪声有源控制.....	173
练习题.....	179
<b>参考文献</b> .....	180



# 第一章 振动理论基础

**【主要内容】** 本章包括线性振动理论的基本内容。从不同着眼点对振动系统简单分类；从单自由度振动系统出发，定义振动问题和振动系统的基本概念；分析自由振动与强迫振动，瞬态振动与稳态振动的解表达形式及其物理意义；从线性单自由度振动系统对任意激励的响应表达，通过模态分析，获得对多自由度系统问题的一般解表达形式，并进一步分析指出，该形式对于连续振动系统响应表达仍然有效；针对汽车振动问题分析的特定要求，介绍了线性随机振动响应分析的基本内容。

## 第一节 介绍

振动理论是分析任何机器和结构的动态特性(又称为动力学特性)的理论基础之一。

汽车是一种复杂的机器,虽然它在结构形式、工作状态方面有其特殊性,但在做动态力学性能分析时,仍将其看成一个振动系统。所谓振动系统,是对一般机器或结构系统的一类抽象数学模型,当研究的目的是关于这个系统的振动性能时,所抽象的系统模型,就称为振动系统。

同一切动力学系统一样,振动系统也有复杂和简单之分。而被抽象出的振动系统复杂与否主要取决于研究问题的目的。一个构成相对复杂的机器系统,比如汽车,如果研究的目的只要求考虑其质心垂直方向的运动,则可将该汽车简化成相对简单的振动系统,如将整车质量假想集中于质心上而将其简化为单自由度系统;而一个看似简单的汽车上某梁状或板状零件,根据研究的目的要求,则将其抽象为相对更加复杂的多自由度系统甚至连续系统。

振动系统可以按自由度来分为离散系统和连续系统,这是为数学处理的方便和自然而使用的振动问题分类描述的方法之一。

离散系统又称为集中参数系统,它的特点是描述运动状态的方程为多元常微分方程组。其自变量元的物理意义往往是系统中某质量点的空间运动坐标或空间运动增量坐标,而自变量元的个数就称为振动系统的自由度维数;既然定义出适当个数的自变量元是利用运动方程完全地描述出系统的空间几何位置所要求的,振动系统的自由度数就定义为在运动全过程中能完全确定系统的空间几何位置所需的独立坐标元的数目。有限个自变量元的系统通常称为多自由度振动系统,如描述问题只要求有一个自变量元。就称为单自由度系统。

所谓连续系统是指描述其运动状态的参数,如质量、刚度和阻尼都是连续定义的,对应的运动方程是多元偏微分方程组。既然自变量元代表质量点的运动坐标或运动增量坐标,当考虑的点无限密布于考虑的结构区域时,系统运动微分方程由常微分方程组转化为偏微分方程组,自由度数由有限变为无限多个,系统模型也就由集中参数的离散系统转化为分布连续参数系统,连续振动系统由此而得名。

在进行振动系统分析时,对所考虑的系统区分它是线性系统还是非线性系统,基本确定了分析可用的方法。从物理意义上讲,大多数实际系统都是非线性的;但为了使分析能够基于成熟的数学工具方便地进行,并且在能够断定所得结论在给定工况下能够基本真实地反映出实



际系统的主要特性的情况下,常常采用线性化近似作为振动系统建模的第一步。线性化的方法一般有三类:一是将实际物理系统的各种非线性因素近似线性化,从而得出线性动力学方程;二是精确利用非线性关系获得非线性动力学方程,再将方程中的非线性小项忽略;最后一种是将系统非线性动力学方程在系统的平衡工作点附近展开,在该平衡工作点附近用近似线性(包括几何运动和物理性态)增量关系代替原非线性关系。

当实际动力学系统涉及某些随机变量或随机过程时,对应的系统动态特性分析要运用随机振动理论。在工程中,最常见的情况是机械或结构本身构成是确定性的,而它们所工作的环境是随机性的,即对确定性构成的物理系统的激励是随机性的。按自然发展因果关系论,系统的响应自然也应是随机性的。汽车是这样一个随机振动系统的典型,因为汽车行驶工况的主要激励是它正在行驶路面的不平度,路面不平度本身是随机性的。因此,作为设计者最为关心的汽车响应输出,也是由随机路面不平度和汽车本身构成所决定的随机过程。这里的系统是随机振动系统分析的内容,它包括系统输入(激励)、系统本身和系统输出(响应)三部分之间的关系。

本章主要论述线性振动理论,它是振动理论中最成熟、最规范的部分,也是具有最广泛工程实际应用的部分。其成熟和规范体现在:无论怎样的实际工程结构,当确定是需要解决线性振动理论范围内的动力学问题时,其着手处或出发点,甚至分析问题的主要工作是考虑如何将该实际结构或机器抽象或归类为线性振动理论所设计的理论模型;当得到了这样的理论模型后,其分析方法和可能得到的结论完全就归结为“线性振动理论”这一类逻辑的“模板”了。

由此可见,解决工程实际振动问题,其核心在“建模”上。因而,对于汽车振动问题的分析,其相当大的部分也就是针对汽车各大总成具体不同的结构,研究如何合理地抽象为所需的振动力学模型。

虽然这里强调实践应用时对问题建模的重要性,但线性振动理论本身主要致力于建立理论和分析方法的基础。它的主要内容包括:在振动理论基本定义的基础上建好模型以后,用来处理这些模型的数学方法和分析逻辑,并给出一个相当完美的结果表达形式和分析方法流程。我们要强调的是,线性振动理论的数学方法和分析逻辑,包括基本概念定义和相互间关系,就是从复杂实际系统中建立起合理模型所必须正确理解和适当使用的基础。

## 第二节 单自由度系统

### 一、自由振动

自由振动是指振动系统受到初始外界激励后,在所定义的时间零点开始后不再受外界激励情况下,系统表现的运动。既然系统此时已经不再受外界的影响,它的振动所表现出来的性质,就仅仅是系统本身的构造分布所确定的。正因为如此,系统自由振动所表现的运动学规律,对于我们理解系统构成与振动运动特征之间的关系,进而定义一些描述振动特征的量,就具有重要的意义。考虑如图 1-1a)所示的单自由度系统。

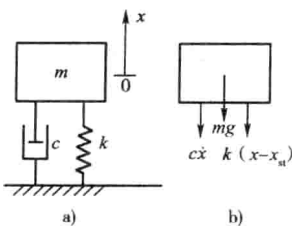


图 1-1 单自由度自由振动系统

单自由度系统是最简单,也是最基础的有限自由度集中参数系统。这里引入了集中参数振动系统的 3 个最基本物理参数:质量  $m$ , 弹簧  $k$ , 阻尼  $c$ 。

质量  $m$  是系统的惯性的代表,在模型中被抽象为仅有质量  $m$  [单位:千克(kg)] 的质点;弹簧  $k$  是系统的弹性的代表,被抽象为无质量的、刚度系数为  $k$  [单位:牛顿/米(N/m)] 的弹簧。在线性振动范围内,认为是线性弹簧,即刚度系数  $k$  不随弹簧变形的大小而改变;阻尼  $c$  是系统振动中各种机械能耗散机制的代表,如各种阻力、流体摩擦阻力、干摩擦阻力等。虽然实际结构系统振动时机械能耗散的物理机制很多,但线性振动理论范围内的典型做法还是将其等价于线性黏性阻尼,即假设阻尼力与阻尼器两端点间的相对运动速度成正比,比例系数为  $c$  [单位:牛顿·秒/米(N·s/m)],称为黏性阻尼系数。在单自由度系统中,运动只考虑一个方向,所有物理参数如  $m$ 、 $k$  和  $c$  也只相对于所考虑的这个运动方向定义。

建立图 1-1a) 所示系统的运动微分方程。其方法遵循以下步骤:

- 1) 取隔离体;
- 2) 进行受力分析;
- 3) 运用牛顿第二定律建立运动微分方程。

该系统的隔离体和受力分析如图 1-1b) 所示,其运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - x_{st}) - c\dot{x}$$

其中  $x_{st}$  为质量块的初始静位移。

将坐标原点放在质量块的静平衡位置,应有  $kx_{st} = mg$ , 整理上方程得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1-1)$$

先不考虑阻尼的效应,即假设  $c = 0$ , 并令  $\omega_n^2 = k/m$ , 方程(1-1) 成为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1-2)$$

由常微分方程理论可知,方程(1-2) 的通解可表示为

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

其中  $C_1$  与  $C_2$  是任意常数,由系统初始条件确定。

设系统初始条件如:  $t = 0$  时,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , 两任意常数可确定为  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \dot{x}_0 / \omega_n$ , 则系统无阻尼自由振动解为

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t = B \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1-3)$$

其中:

$$B = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \varphi = \arctan \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}$$

方程(1-3) 表明,质量块将作简谐振动运动,其振动的圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-4)$$

而振动的频率为:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

由  $f_n$  的表达式可看出,此频率只与系统的刚度和质量有关,与外界的初始激励(系统初位移和/或初速度)无关,故称为系统的固有频率。它是描述系统振动性能的一个非常重要的特征量,因为从式(1-3) 看出,系统受到初始激励后,将持续进行频率为  $f_n$  的往复运动,此往复运动的频率仅由系统本身的质量和刚度分布决定;往复运动的幅度大小(振幅)  $B$  及初相角  $\varphi$  则取决于外界的初始激励以及系统本身的质量、刚度分布(注意  $B$  及  $\varphi$  的表达式中包括  $x_0$ 、 $\dot{x}_0$  和  $\omega_n$ )。

在前面讨论中,略去了运动所受的阻力,系统在自由振动中机械能守恒,因而振幅  $B$  保持不变。实际系统能量耗散机制总是存在的,所以有必要考虑存在阻尼情况下( $c \neq 0$ ) 的自由振动。

对于  $c \neq 0$ , 定义阻尼比

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{c_c} \quad (1-5)$$

其中  $c_c = 2\sqrt{km}$ 。根据  $\omega_n$  的定义式(1-4), 方程(1-1)可转化为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1-6)$$

令方程(1-6)的特解为  $x = e^{st}$ , 代入该方程, 得到系统特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (1-7)$$

由方程(1-7)可解得系统的特征根为

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

则方程(1-6)的通解为

$$x = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (1-8)$$

其中  $C_1$  与  $C_2$  仍是由系统初始条件确定的常数。

由于包括了能量耗散机制, 由式(1-8)代表的单自由度系统的自由振动总体表现为衰减运动, 并随着阻尼比  $\zeta$  不同的取值范围而有所不同, 这说明系统的运动衰减形态是由其阻尼比决定的。但是, 从阻尼比的定义式(1-5)可以看出, 阻尼比并不仅仅取决于黏性阻尼系数, 它还同系统的质量和刚度有关, 因此阻尼比  $\zeta$  与固有频率  $\omega_n$  一样, 都是描述系统振动特性的本质特征参数。正是这个特征参数, 由其不同的取值范围, 将系统初始扰动后的衰减分为不同的运动形态。

主要的形态有两种, 当  $\zeta < 1$  时称为欠阻尼形态, 当  $\zeta > 1$  时为过阻尼形态; 在欠阻尼到过阻尼的临界点, 即  $\zeta = 1$ , 称为临界阻尼形态。以下分别进行讨论。

(1) 欠阻尼形态,  $\zeta < 1$ , 特征根成为

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$$

上式中  $j$  为虚数单位。应用欧拉公式, 式(1-8)可转化成

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos\omega_d t + C \sin\omega_d t) \quad (1-9)$$

或写为

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} B \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (1-10)$$

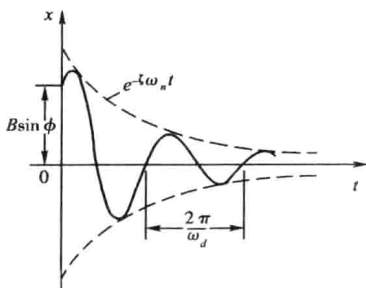


图 1-2 欠阻尼系统衰减振动曲线

可见此时运动为衰减振动, 其振动频率为  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  称为系统的阻尼固有频率。该运动曲线如图 1-2 所示。

式(1-9)中的常数  $A$  和  $C$  或式(1-10)中的振幅  $B$  及初相角  $\varphi$  由系统初位移、初速度及系统本身参数确定, 有

$$A = x_0, \quad C = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$B = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}$$

(2) 过阻尼形态,  $\zeta > 1$ , 此时特征根  $s_1$  和  $s_2$  为负实数。从运动表达式(1-8)可以看出, 系统被初始扰动后的运动并不振荡, 只是单调地以指数规律衰减趋于平衡位置。

(3) 临界阻尼形态,  $\zeta = 1$ , 此时  $s_1$  和  $s_2$  是重根, 都等于  $-\omega_n$ , 则方程(1-6)的通解的形式为

$$x = e^{-\omega_n t} (D + Et)$$

这也是非振荡衰减运动。其中  $D$  和  $E$  为由系统初始条件及系统本身参数确定的常数。

可以想象,作为一个孤立的点,临界阻尼形态物理上是很少遇到的,但临界阻尼概念的提出,实际是为了引入一个分析上更有意义的量:临界阻尼系数  $c_c$ 。回顾式(1-5),对  $\zeta = 1$ ,有

$$c = c_c = 2 \sqrt{km} \quad (1-11)$$

$c_c$ 为临界阻尼系数,物理意义上  $c_c$ 和系统的阻尼无关,如式(1-11), $c_c \equiv 2 \sqrt{km}$ ,它是由系统的质量和刚度决定的量。定义出  $c_c$ 实际是想说明,当系统的物理黏性阻尼系数  $c$  小于由该系统质量和刚度确定的量  $c_c = 2 \sqrt{km}$ 时,初始扰动后系统会表现出振荡衰减运动,否则,运动将只衰减而不振荡。

## 二、强迫振动——谐波激励和周期激励

强迫振动是指系统有外部激励期间表现的振动,外界激励可以是作用在质量块上的力,如图 1-3 所示;也可以是系统支承的运动,如图 1-5 所示。

### 1. 谐波激励响应

如果作用在质量块上的力是某个频率的简谐力,则称系统的响应为谐波响应。单自由度系统的谐波响应是线性振动理论分析的基础。

对于图 1-3a) 所示系统,设坐标原点在系统静平衡位置,略去平衡的质量重力和弹簧静反力,得隔离体受力分析图,如图 1-3b) 所示。系统运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-12)$$

考虑谐波响应时,设

$$f(t) = F \sin \omega t \quad (1-13)$$

按常微分方程理论,方程(1-12)的解由该方程的齐次方程即方程(1-1)的通解加该非齐次方程的任一特解组成,系统的初始条件为方程整个解的定解条件。

设系统有初始条件  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ,  $f(t)$ 为式(1-13)形式的简谐力,式(1-12)完整的解为

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-\zeta \omega_n t} \left( x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) + \\ & X e^{-\zeta \omega_n t} \left[ \sin \psi \cos \omega_d t + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\zeta \sin \psi - \lambda \cos \psi) \sin \omega_d t \right] + \\ & X \sin(\omega t - \psi) \end{aligned} \quad (1-14)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_n = & \sqrt{k/m}, \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \lambda = \frac{\omega}{\omega_n}, \\ X = & \frac{F}{k \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}, \psi = \arctan \frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2} \end{aligned}$$

由式(1-14)可以看出,完整的谐波振动响应包括 3 个部分。式(1-14)中的第 1 部分就是由系统初始扰动导致的自由振动响应。这里给出的是欠阻尼特征的系统响应表达。随着时间增加,这部分将衰减到零;式(1-14)中的第 2 部分称为系统伴随自由振动,它是由于初始条件和激励的引入而导致的系统本征振动(其振动频率为系统的阻尼固有频率  $\omega_d$ )。注意:即使系统初始条件为零,此部分仍存在;由于代表阻尼效应的时间负幂指数函数作为乘子存在,此部分也随时间衰减到零;式(1-14)中的第 3 部分振动不随时间增加而衰减,它始终存在并且有和激励谐波力相同的频率。忽略前两部分仅由这一项所代表的系统振动就称为稳态振动或稳态

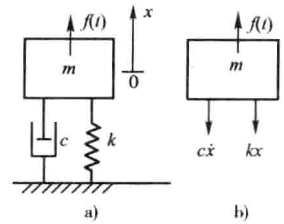


图 1-3 单自由度系统强迫振动

响应,对应项称为稳态项;包括所有三个部分并在初始时刻附近时段的系统振动称为瞬态振动或过渡过程响应。(1-14)中的前两部分称为瞬态项。

进一步讨论系统的稳态响应。重写式(1-14)并忽略瞬态项,有

$$x(t) = X \sin(\omega t - \psi) \quad (1-15)$$

响应振幅为

$$X = \frac{F}{k \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} = \frac{X_s}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$$

式中,  $X_s = F/k$  为激励力幅值静态地作用于系统时可导致的变形位移,而动态响应振幅则是系统静载变形位移的放大,为  $X = X_s \beta$

这里 
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} = \frac{X}{X_s} \quad (1-16)$$

为动态放大因子。它随频率比  $\lambda = \omega/\omega_n$  和阻尼比  $\zeta$  而变化。

另外 
$$\psi = \arctan \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \quad (1-17)$$

是响应  $x(t)$  滞后于谐波激励力  $f(t)$  的相位角。

$\beta$  和  $\psi$  随  $\lambda$  的变化曲线分别被称为系统的幅频曲线及相频曲线,如图 1-4a) 和图 1-4b) 所示。由图可见:

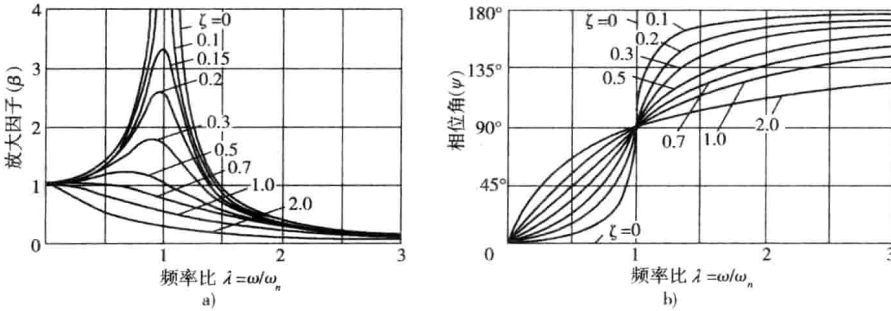


图 1-4 幅频曲线和相频曲线

a) 幅频曲线; b) 相频曲线

(1) 当激励频率远大于系统固有频率时,即  $\lambda \gg 1$ , 不论阻尼比  $\zeta$  的大小,  $\beta$  都趋于零。故系统工作于  $\lambda \gg 1$  称为相对高频段,此时响应振幅小于静载变形位移。动态响应振幅小是因为激振力变化太快而质量有惯性跟不上(见相频曲线,响应相位滞后趋于  $180^\circ$ ,说明激振力与响应位移几乎反相),故认为在相对高频段系统响应主要由其质量惯性所决定。所谓相对高频是指激励频率相对于系统固有频率较高,并不是绝对意义上的激振频率高。

(2) 当激励频率远小于系统固有频率时,即  $\lambda \ll 1$ , 不论阻尼比  $\zeta$  大小,  $\beta$  都趋于 1, 响应振幅趋于静载变形位移。 $\lambda \ll 1$  就称为相对低频段。静载变形由系统刚度决定其大小,故在相对低频段,系统响应主要由其刚度决定。

(3) 当激励频率在系统固有频率附近时,  $\lambda \approx 1$ , 阻尼比  $\zeta$  的大小极大地影响  $\beta$ 。此时的频段范围称为共振区。 $\beta$  的最大值  $\beta_{\max}$  在  $\lambda = \sqrt{1-2\zeta^2}$  时达到。实际系统中一般有  $\zeta^2 \ll 1$ , 故通常认为在  $\lambda \approx 1$  时响应位移达到最大值,即发生共振;此时有  $X_{\max} = X_s/(2\zeta)$ , 可见阻尼比越小共振峰值越大,并且共振峰值对阻尼比非常敏感。因此,只有在共振频段范围内,阻尼才对响应的大小有很好的控制作用。注意,这里的阻尼指的是阻尼比  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ , 它实际代表系统的

黏性阻尼系数和系统的质量及刚度之间的一个比例。由阻尼比定义可见,即使黏性阻尼系数  $c$  不变,减小  $k$  和  $m$  同样可以增大阻尼比。

注意到当  $\lambda = 1$  时,无论  $\zeta$  多大,总是有  $\psi = 90^\circ$ ,这也是共振时的一个典型现象。

## 2. 支承谐波激励响应

单自由度系统支承运动激励的模型如图 1-5 所示。

设支承运动的简谐运动为

$$x_g = X_g \sin \omega t \quad (1-18)$$

由隔离体受力图,可得系统运动微分方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_g + c\dot{x}_g \quad (1-19)$$

可以利用复函数方法求解式(1-19)的稳态振动。

令  $x_g = X_g e^{j\omega t}$ ,  $x = X e^{j(\omega t - \psi)}$

代入式(1-19),得  $(-m\omega^2 + jc\omega + k)X e^{-j\psi} = (k + jc\omega)X_g$

可求得  $X = X_g \frac{\sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}}$ ,  $\psi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} - \arctan \frac{c\omega}{k}$

定义传递率  $\beta = X/X_g$ ,其意义类似于放大因子。利用前对  $\lambda$ 、 $\zeta$  及  $\omega_n$  的定义,整理上两式后有

$$\beta = \frac{X}{X_g} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1-20)$$

$$\psi = \arctan \frac{2\zeta\lambda^3}{1 - \lambda^2 + (2\zeta\lambda)^2} \quad (1-21)$$

支承谐波激励的稳态位移响应,由于式(1-18)是正弦函数,故可取  $x$  复函数表达式中的虚部,仍为式(1-15)的形式,可写为

$$x(t) = X \sin(\omega t - \psi) = \beta X_g \sin(\omega t - \psi) \quad (1-22)$$

$\beta$  和  $\psi$  是支承谐波运动激励的幅频和相频响应曲线,如图 1-6 所示。由图可见,当  $\lambda > \sqrt{2}$  时,  $\beta < 1$ ,响应幅值将小于支承激励的幅值,此时弹簧阻尼系统起减小振动作用。在  $\lambda > \sqrt{2}$  的范围,阻尼比  $\zeta$  小的,传递率  $\beta$  相对要大。当  $\lambda > 3$  以后,对于相同阻尼比  $\zeta$ ,随  $\lambda$  增加传递率  $\beta$  的下降将不再明显。

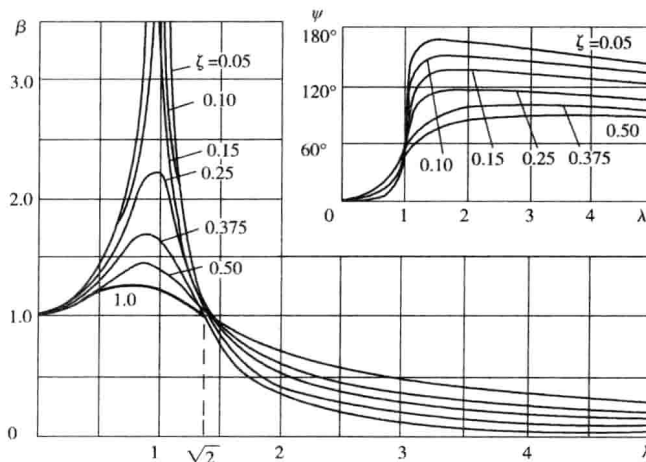


图 1-6 支承谐波激励的幅频和相频响应

前面已讨论了系统运动方程(1-12)的各种激励条件下的瞬态和稳态响应,很明显,对于实际问题的振动分析,首先要将问题表达成方程(1-12)的形式,方程中加速度、速度和位移项前的系数,就是等效的“质量”、“阻尼系数”和“弹簧常数”。目前还限于须把这些系数“归纳”为常数(虽然实际上有可能不是)。在做归纳和简化的过程中,可以根据研究目标,或多或少地包含或省略某些实际存在的物理性质。这样的“包含或省略”的多少,就决定了“建模”精度。而建模精度又是决定所求取的响应是否符合实际的最关键因素。下面举一些建模的例子。

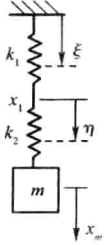


图 1-7 串联弹簧系统

**例 1.1** 如图 1-7 所示的串联弹簧系统,求取其等效刚度及等效质量,分别考虑两种情况:

(1) 不包括弹簧本身质量。

(2) 包括弹簧本身质量(设  $l_1, \rho_1$  和  $l_2, \rho_2$  分别为弹簧  $k_1, k_2$  的长度和质量线密度)。

求系统自由运动微分方程。

**解:** 在目前假设范围内,包括或不包括弹簧本身质量对系统的等效弹簧刚度无影响。

弹簧串联各弹簧所受力相等,图示情况皆为  $mg$ ,则弹簧  $k_1$  的变形为  $mg/k_1$ ,而弹簧  $k_2$  的变形为  $mg/k_2$ ,设系统等效弹簧刚度系数为  $k_e$ ,质量  $m$  的总变形应为各弹簧变形之和,故

$$\frac{mg}{k_e} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} \quad \text{则有} \quad k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

(1) 不考虑弹簧本身质量时,系统等效质量为集中质量,即  $m_e = m$ 。

(2) 包括弹簧本身质量时,设振动时弹簧的每点变形位移形态类同于静力  $mg$  作用时的位移形态。弹簧串联各弹簧受力相等,有  $k_1 x_1 = k_2 (x_m - x_1)$

即 
$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_m$$

设弹簧  $k_1$  上距固定端的距离为  $\xi$  的点的变形位移为  $x_\xi$ ,有

$$x_\xi = \frac{x_1}{l_1} \xi = \frac{x_m k_2}{l_1 (k_1 + k_2)} \xi \quad (a)$$

同样,设弹簧  $k_2$  上距两弹簧连接处  $x_1$  的距离为  $\eta$  的点的变形位移为  $x_\eta$ ,有

$$x_\eta = x_1 + \frac{x_m - x_1}{l_2} \eta = \frac{x_m}{(k_1 + k_2)} \left( \frac{k_1}{l_2} \eta + k_2 \right) \quad (b)$$

振动中弹簧分布质量产生的动能为

$$T_{k_1 k_2} = \int_0^{l_1} \frac{1}{2} \rho_1 \dot{x}_\xi^2 d\xi + \int_0^{l_2} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{x}_\eta^2 d\eta \quad (c)$$

由式(a)和式(b),有 
$$\dot{x}_\xi = \frac{\dot{x}_m k_2}{l_1 (k_1 + k_2)} \xi, \quad \dot{x}_\eta = \frac{\dot{x}_m}{(k_1 + k_2)} \left( \frac{k_1}{l_2} \eta + k_2 \right)$$

代入式(c),积分后得 
$$T_{k_1 k_2} = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 l_1 k_2^2 + \rho_2 l_2 (k_1^2 + 3k_1 k_2 + 3k_2^2)}{3 (k_1 + k_2)^2} \dot{x}_m^2$$

系统总动能为 
$$T = T_m + T_{k_1 k_2} = \frac{1}{2} \left[ m + \frac{\rho_1 l_1 k_2^2 + \rho_2 l_2 (k_1^2 + 3k_1 k_2 + 3k_2^2)}{3 (k_1 + k_2)^2} \right] \dot{x}_m^2 = \frac{1}{2} m_e \dot{x}_m^2$$



系统总势能为

$$U = \frac{1}{2}k_e x_m^2 = \frac{1}{2} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_m^2$$

不考虑阻尼系统为保守系统,有

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

求导得系统自由振动方程为

$$m_e \ddot{x}_m + k_e \dot{x}_m = 0$$

其中等效质量和等效刚度分别为

$$m_e = m + \frac{\rho_1 l_1 k_2^2 + \rho_2 l_2 (k_1^2 + 3k_1 k_2 + 3k_2^2)}{3(k_1 + k_2)^2}, k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

推导中设弹簧振动时每点变形位移形态类同于静力作用时的位移形态,这是一个对推导等效质量起关键作用的假设,实践证明,此假设近似程度很高。这种先假设振动系统动态变形形态,再来计算相关量的建模方法,称为瑞利法。很明显,此法的精度很大程度取决于所假设动态变形形态的精度。

**例 1.2** 一汽车拖车的悬架弹簧被它的载重压缩了  $d = 10.16\text{cm}$ 。当拖车速度  $v = 64.4\text{km/h}$  的行驶在幅度  $X_g = 7.62\text{cm}$ , 波长  $l = 14.63\text{m}$  的正弦波状路面上, 不计阻尼, 求拖车的振幅。(重力加速度  $g = 9.8\text{m/s}^2$ )

**解:** 拖车行驶路程可表示为  $z = vt$

支承激励函数可表示为  $x_g = X_g \sin \frac{2\pi z}{l} = X_g \sin \frac{2\pi vt}{l}$

则激励的圆频率为  $\omega = \frac{2\pi v}{l} = \frac{2 \times \pi \times 64.4 \times 10^3}{14.63 \times 3600} = 7.6828 (\text{rad/s})$

拖车可简化为单自由度系统, 设全部载质量为  $m$ , 悬架弹簧刚度为  $k$ , 则有  $d = \frac{mg}{k}, k = \frac{mg}{d}$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{d}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 10^2}{10.16}} = 9.8212 (\text{rad/s})$$

不计阻尼,  $\zeta = 0$ , 由式(1-20), 可得拖车振幅为

$$X = \beta X_g = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} X_g = \frac{1}{1 - \lambda^2} X_g = \frac{7.62}{1 - \left(\frac{7.6828}{9.8212}\right)^2} = 19.6362 (\text{cm})$$

**例 1.3** 讨论下列非黏性阻尼效应的线性化建模:

- (1) 机械平面零件间干摩擦;
- (2) 物体在低黏性流体中以较大速度运动。

**解:** 线性系统定义阻尼比  $\zeta$  时利用的是物理黏性阻尼系数  $c$  与临界阻尼系数  $c_c$  之比。物理黏性阻尼系数  $c$  代表的是其阻尼力与其两端点的相对速度成正比的线性黏性阻尼器振动能量耗散机制。现实情况中存在着多种不是线性黏性阻尼的能量耗散机制, 统称为非黏性阻尼。非黏性阻尼本质上是非线性的, 为了使在非黏性阻尼情况下, 以式(1-1)表示的线性系统模型方程仍然可用, 定义等价黏性阻尼系数  $c_{eq}$  来近似表示非黏性阻尼情况。这里的简化采用能量等价原则, 即假设在相同谐波振动周期内, 用等价黏性阻尼系数  $c_{eq}$  表达的耗散能量与拟简化的非线性阻尼耗散的能量相等。

已知单自由度线性系统的黏性阻尼器产生的阻力为  $f_d = -c\dot{x}$ , 则线性黏性阻尼器在稳态谐波响应  $x(t) = X\sin(\omega t - \psi)$  的一个振动周期  $T$  内所耗散的能量为

$$E_c = \left| \int_0^T f_d \dot{x} dt \right| = \left| \int_0^T c \dot{x}^2 dt \right| = \int_0^T c \omega^2 X^2 \cos^2(\omega t - \psi) dt = c \pi \omega X^2 \quad (\text{a})$$

假设在相同振动周期内所考虑的非黏性阻尼的耗散功与等效黏性阻尼的耗散功相等,即令  $E_{nc} = E_c$ , 这里  $E_{nc}$  为所考虑的拟简化非黏性阻尼在同一振动周期  $T$  内所耗散的能量, 则由式(a)可定义等效黏性阻尼系数  $c_{eq}$  为

$$c_{eq} = \frac{E_{nc}}{\pi \omega X^2} \quad (\text{b})$$

(1) 干摩擦阻尼力是一种典型非黏性阻尼, 已知干摩擦产生的阻力  $f_d$  与速度无关, 表达式为:  $f_d = -\mu N \text{sgn}(\dot{x})$ , 其中  $\mu$  为干摩擦系数,  $N$  为摩擦平面间的正压力,  $\text{sgn}(\quad)$  为符号函数, 其定义为:

$$\text{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0 \\ 0, & \dot{x} = 0 \\ -1, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

这样

$$E_{nc} = \left| \int_0^T f_d \dot{x} dt \right| = \left| \int_0^T \mu N \dot{x} dt \right| = 4 \int_0^X \mu N dx = 4 \mu N X$$

因此

$$c_{eq} = \frac{4 \mu N}{\pi \omega X}$$

(2) 当物体在流体(如水、空气)中以较大的速度(大于 3m/s)运动时, 阻尼力与相对速度平方成正比, 方向与速度方向相反, 其值可近似表示为  $f_d = -\mu_c |\dot{x}| \dot{x}$ , 其中  $\mu_c$  为流体阻力系数。

此时有

$$E_{nc} = \left| \int_0^T f_d \dot{x} dt \right| = 4 \int_0^{T/4} \mu_c \dot{x}^3 dt = \frac{8}{3} \mu_c \omega^2 X^3$$

就有

$$c_{eq} = \frac{8 \mu_c \omega X}{3 \pi}$$

注意到上述两种情况下的  $c_{eq}$  都是所设谐波振动圆频率  $\omega$  的函数。对其他类型的非黏性阻尼机制也可以类似方式来线性化简化。

### 3. 周期激励响应

上述谐波激励, 考虑的是一个单频率的谐波力激励或支承激励。如果激励并不是单频谐波, 而是周期函数的激励, 则可利用周期函数的傅立叶级数展开, 将问题转化为求取基频加一系列倍频的谐波函数激励的响应。由于系统运动方程是常系数线性微分方程, 叠加原理成立, 整个响应也就是每个谐波函数激励响应的叠加。以下用一个例子说明这个过程。

**例 1.4** 系统如图 1-3 所示, 设激励力函数  $f(t)$  为如图 1-8 所示的周期性方波, 设  $T = T_n/2$ ,  $T_n$  为系统固有周期, 求其稳态响应。

**解:** 在一个周期内, 激励力表达为

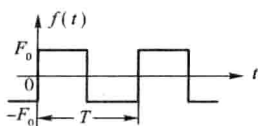


图 1-8 周期方波激励力函数

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

$f(t)$  满足狄里赫利条件, 可以有傅立叶级数展开

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i \omega_1 t + b_i \sin i \omega_1 t), \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$