

成都地质学院建院三十周年

論文集

(之七)

应用数学系

一九八六年十月十五日

目 录

一、数学、计算数学部分

- 关于两类计算重根的大范围收敛迭代法.....何永富 (1)
一类不定式的几个定理.....尹翔云 (7)
八方程的T问题.....李恩伯 (15)

二、地质信探、物探数据处理

- 油气检测的统计模式识别方法.....何宝侃 汤磊 (27)
拟伪距离模式识别法在地震岩性分类上的应用.....聂勋碧 舒雅琴 (34)
聚类分析识别法在地震岩性分类中的应用.....聂勋碧 舒雅琴 (40)
分析构造裂缝的应力场方法.....曾锦光 (44)
关于克希霍夫“广义倾斜因子”问题的讨论.....曾锦光 (51)
将水准面视为球面的重力位场变换及相应的界面的反演方法
.....何玉辉 卢小平等 (55)

三、数学地质

- 来利山锡矿原生晕分带性研究及矿化露头评价.....朱章森 温世明 (63)
成矿能量 $\bar{P}$ 趋势分析及在来利山锡矿育矿预测中应用
.....温世明 朱章森 (71)
模糊概率回归预测方法研究及应用.....温世明 朱章森 (75)
来利山锡矿区泛克里格法预测.....杨 龙 (79)
成矿可能 L 预测方法.....罗晓春 (87)
矿床勘探过程模拟及其在小秦岭金矿田资源潜力评价中的应用
.....徐士宏 李伯平等 (92)
小秦岭金矿田矿床规模的逻辑信息法预测.....徐士宏 李伯平 (99)
以抽样判据为基础的定性数据判别分析方法及其在矿床统计预测中的应用
.....蒋建平 (102)
勘探网度的地质统计学研究.....徐人桢 (109)
地质统计分析在勘探网形研究上的应用.....杨 龙 (115)

四、程序设计, 计算机应用

- 多维模二褶积的快速算法.....陈天与 卢小平 (120)
SP10 屏幕编辑软件.....胡远来 (127)
RCA 汉字计算机激光排版系统的设计和实现.....张执谦 张抗援 (130)
地下水线性流与非线性流耦合模型计算方法初探.....陈戈止 (134)

PC-1500应用程序 岭回归分析.....	邬光平 (138)
IBM-PC/XT FORTRAN 77编译系统的使用研究.....	揭金良 吴国平 (140)
大样本 Q-型聚类分析.....	胡远来 姜若维 (149)
责任编辑:	

朱章森	徐人桡	何永富	曾锦光	简静生
柳雪芬	孙淑霞			

CONTENTS

I Mathematics, Computaional Mathematics

On Two Classes of Globally Convergent Iterative Methods for Computing Multiple Root of An Equation	He Yong-fu (1)
Some Theorems on a Kind of Indeterminate Expression	Yin Xiang-Yun (7)
The Tricomi problem of Lavrentieff's Equation.....	Li Enbo (15)

II Geological Information, Data processing for Geophysical Exploration

A Supervised Statistical Pattern Recognition Method for the Hydrocarbon Detection	Her Boa-Kai Tang Lei (27)
Analogue-Pseudo-Distance Pattern Recognition Applied to the Lithologic Classification in Seismic Exploration	Nie Xun-bi Su Yia-qin (34)
Cluster Analysis Recognition Apptied to the Lithololgic Classification in Seismic Exploration	Nie Xun-bi Su Yia-qin (40)
A Method for the Study* of Reservoir Fracturing Based on Structural Stress Fields.....	Zeng Jinguang (44)
A Discussion on The Problem of Generalized Kirchhoff Declinational Factor	Zeng Jinguang (51)
The Transformation of Gravity Field and Its Inverse Method for the Density Contrast Based on the Geoid as a spherical Surtace	He Yu-hui Lu Xiao-ping (55)

III Geomathematics

Research of the Classification Model of the Original Halo and Eraluation of Ore Outcrop for the Tin Ore of Laili Mounfain	Zhu Zhang-sen Wen Shi-ming (63)
The Method of Calculating Enerage of Formed Deposit to Multi	

Variables Statistics and the Tin Ore Blind Ore of Laili Mountain.....	Wen Shi-ming Zhu Zhang-sen (71)
Research and Application for the Method of Fuzzy Probability Regression.....	Wen Shi-ming Zhu Zhang-sen (75)
Forecasting Method of Universal Kriging for Stannary of Leili Mountain.....	Yang Long (79)
The Forecasting Method of Depositing Probability Degrees	Lo Shiao-chun (87)
Application for Simulation of the Deposit Exploration and Evaluation of Xiao Qin ling Au-field. resource Potentiality	Xu Shi-hung Li Bo-ping (92)
Logical Information Forecast for the Deposit Scale of Xiao Qin Ling Au Field.....	Xu Shi-hung Li Bo-ping (99)
Sample Based Discrete Discriminant Analysis and Its Application in Mineral Resources Appraisal.....	Jiang Jian-ping (102)
Geostatistics Study of the Density of Prospecting Net	Xu Ren-yan (109)
The Application of Geostatistical Analysis Method in Studying the Shap of Exploration Network.....	Yang Long (115)

IV Programming. Computer Application

The Fast Algorithm of Multidimensional Dyadic Convolution	Cheng Tian-yu Lu Xiao-ping (120)
A Sp10 Screen Editor.....	Hu Yuan-lai (127)
Design and Realization of RCA Chinese Character Computer Laser Composing.....	Zhang Zhi-qian Zhang Kang-yuan (130)
Calculate Methode ABC of Groundwater Linear and Non-linear Flow Coupling Model.....	Cheng Ge-zhi (134)
PC-1500 Application Program Regression Analysis	Wu Guang-ping (138)
An Application study for IBM-PC/XT FORTRAN77 Compiler System.....	Jie Jin-liang Wu Guo-ping (140)
The Bigdata Q-Mode Cluster Analysis	Hu Yuan-lai Jiang Ruo-wei (149)

关于两类计算重根的大范围收敛迭代法

何 永 富

1 § 一类含单参数的大范围收敛迭代法

假设 $K_2 \equiv \{f(z)\}$ 表示由全体只含实零点的整函数作成的集合, 其中每一个函数 $f(z)$ 的阶数 (order) 都小于 2, 且对实变元 z 常取实数值。特别, $f(z)$ 可以是一个只含实根的实值多项式。

现研究求方程

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

的实根的迭代程序

$$x_{n+1} = x_n \pm \beta |f(x_n)| / \sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (1.2)$$

此处 $\beta > 0$ 为参数, $n = 0, 1, 2, \dots$, 而 x_0 为任意实数, 只须 $f(x_0) \neq 0$ 。

在 (1.2) 中取定 + 号或 - 号, 得到两个序列 $\{x_n^+\}$ 与 $\{x_n^-\}$ 。

不失一般性, 假设 $f(0) \neq 0$, 将 $f(z)$ 的全体实零点按绝对值大小排列为

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$$

应用 Hadamard 因子分解定理, 有

$$f(z) = c e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n},$$

其中 c, a 与 z_n 均为实数。对上式两端取对数导数, 得

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z - z_n} \right),$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_n)^2}.$$

对初值 x_0 , 有

$$- \frac{d}{dz} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)_{z=x_0} = \frac{f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}{f(x_0)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x_0 - z_n)^2}$$

因此 $f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0) > 0$ 。同理, 当 $f(x_n) \neq 0$ 时

$$f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n) > 0 \quad (1.3)$$

所以, 程序 (1.2) 是恒有意义的。

定理 1 设 $f(z) \in K_2$, 对满足条件 $f(x_0) \neq 0$ 的任意实数 x_0 , 由 (1.2) 给出的迭代数列 $\{x_n^+\}$, $\{x_n^-\}$ 将分别单调地收敛到 $f(z)$ 在 x_0 右侧及左侧最邻近 x_0 的重数 $\geq \beta^2$ 的实零点 x^* , 而遗漏 $f(z)$ 在 x_0, x^* 间的重数 $< \beta^2$ 的实零点。特别, 如果迭代程序 (1.2) 所得数列发散, 则沿着数列发散那侧, $f(z)$ 没有重数 $\geq \beta^2$ 的实零点。

证明 只对 $\{x_n^+\}$ 进行证明, 关于 $\{x_n^-\}$ 的证明是完全平行的。为简单计, 略去 x_n^+ 的上标, 记成 x_n 。应用数学归纳法, 易证

$$x_n \leq x^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

当 $n=0$ 时, 显然 $x_0 < x^*$ 。现假设 $n=k$ 时 (1.4) 成立, 由

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) \quad (1.5)$$

此处 $m \geq 1$ 为实根 x^* 的重数, $g(x)$ 连续, 有界且 $g(x^*) \neq 0$ 。求导, 有 $f'(x) = m(x - x^*)^{m-1}g(x) + (x - x^*)^m g'(x)$, 因而

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{m}{x - x^*}$$

两端求导数, 得

$$f'(x)^2 - f(x)f''(x) = f(x)^2 \left[\frac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g(x)^2} + \frac{m}{(x - x^*)^2} \right] \quad (1.6)$$

由于 $g(x) \in K_2$, 根据 (1.3) 式, 知 $g'(x_n)^2 - g(x_n)g''(x_n) > 0$, 从而

$$f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n) \geq f(x_n)^2 \frac{m}{(x_n - x^*)^2}$$

则

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \beta |f(x_k)| / \sqrt{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)} \\ &\leq x_k + \beta |f(x_k)| / \sqrt{f(x_k)^2 \frac{m}{(x_k - x^*)^2}} \\ &= x_k + \frac{\beta}{\sqrt{m}} |x_k - x^*| \end{aligned}$$

因为 $x_k \leq x^*$, 如果 $m \geq \beta^2$, 有

$$x_{k+1} \leq x_k + x^* - x_k = x^*$$

这就证明了 (1.4)。显然, $\{x_n\}$ 单调递增而且有界, 所以存在实数 $\bar{x}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \leq x^*$ 。根据程序 (1.2), 我们有

$$|f(\bar{x})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} (x_{n+1} - x_n) \sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = 0$$

故

$$f(\bar{x}) = 0$$

即 $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 的一个实零点。

往证 $\bar{x} = x^*$ 。假若 $\bar{x} \neq x^*$, 其重数 $\bar{m} < \beta^2$, 则由 $x_n \leq \bar{x}$, 有

$$0 \leq \frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\bar{x} - x_n} = 1 - \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n) \sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}}$$

从而

$$0 \leq \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n) \sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}} \leq 1 \quad (1.7)$$

因为 $f(x) = (x - \bar{x})^m \varphi(x)$ 仿照 (1.6) 式, 得

$$f'(x)^2 - f(x)f''(x) = f(x)^2 \left[\frac{\varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi(x)^2} + \frac{m}{(\bar{x} - x)^2} \right]$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n) \sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \beta / \sqrt{m + (\bar{x} - x_n)^2 \frac{\varphi'(x_n)^2 - \varphi(x_n)\varphi''(x_n)}{\varphi(x_n)^2}} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{m}} > 1 \end{aligned}$$

与 (1.7) 式相矛盾, 因此 $\bar{x} = x^*$ 。

显然, 由以上证明推知, 只要迭代数列 (1.2) 收敛, 则其极限一定是 $f(z)$ 的重数 $m \geq \beta^2$ 的零点, 所以, 沿着数列发散那一侧, 函数 $f(z)$ 不会有重数 $\geq \beta^2$ 的零点。定理证毕。

§ 2 一类含双参数的大范围收敛迭代法

设函数 $f(z)$ 为只含实零点, 阶数小于等于 2 的整函数, 当 z 取实变量时, $f(z)$ 取实数值。又设实值 x^* 为 $f(x)$ 的一个 m 级零点, 即

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) = (x - x^*)^\beta \varphi(x) \quad (2.1)$$

此处 m 为正整数, β 为实数, $g(x^*) \neq 0$, $\varphi(x) = (x - x^*)^{m-\beta} g(x)$ 。

现简记 $S_1 \equiv f'(x)/f(x)$, $\sigma_1 \equiv \varphi'(x)/\varphi(x)$, $S_2 \equiv -S_1'$, $\sigma_2 \equiv -\sigma_1'$,
 $e \equiv x - x^*$, $\sigma \equiv \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)' = \sigma_2 \cdot \sigma_1^{-2}$ 。于是, 当 $x \neq x^*$ 时, 由

$$\sigma_1 = S_1 - \frac{\beta}{e}, \quad S_2 = \sigma_1 + \frac{\beta}{e^2}$$

有

$$S_2 = \sigma \left(S_1 - \frac{\beta}{e} \right)^2 + \frac{\beta}{e^2}$$

即

$$\frac{\beta(\beta\sigma + 1)}{e^2} - \frac{2\beta\sigma S_1}{e} + \sigma S_1^2 - S_2 = 0 \quad (2.2)$$

求解方程 (2.2), 得

$$x^* = x - \frac{\beta(\beta\sigma+1)f(x)}{\beta\sigma f'(x) \pm \sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\sigma-\sigma+1)f'(x)^2 - (\beta\sigma+1)f(x)f''(x)}} \quad (2.3)$$

在一般情况下, σ 是未知的, β 也是需要确定的, 故不妨将公式 (2.3) 看成两个实参数 α, β 的迭代程序, 于是, 考虑更一般的迭代程序

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\beta(\beta\alpha+1)f(x_n)}{\beta\alpha f'(x_n) \pm \operatorname{sign} f(x_n) \sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\alpha-\alpha+1)f'(x_n)^2 - (\beta\alpha+1)f(x_n)f''(x_n)}} \quad (2.4)$$

此处 $n=0, 1, 2, \dots$, $\operatorname{sign} f(x_n)$ 表示 $f(x_n)$ 的符号函数。

为使程序 (2.4) 有意义, 通常要求 α, β 满足

$$\beta > 0, \quad -\frac{1}{\beta} \leq \alpha \leq 0 \quad (2.5)$$

事实上, 从 (2.4) 可知要求 $\beta > 0$ 。其次, 要使 $\beta\alpha - \alpha + 1 > 0$, 即当 $\beta > 1$ 时, 要求 $\alpha > \frac{1}{1-\beta}$; 当 $\beta < 1$ 时, 要求 $\alpha < \frac{1}{1-\beta}$ 。最后, α, β 应满足

$$f'(x_n)^2 - \frac{\beta\alpha+1}{\beta\alpha-\alpha+1} f(x_n)f''(x_n) = f'(x_n)^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta\alpha-\alpha+1}\right) f(x_n)f''(x_n) \geq 0$$

由于 $f(x)$ 满足 (1.3), 故若 $f(x_n)f''(x_n) \leq 0$ 时, 要求 $-\frac{1}{\beta} \leq \alpha < +\infty$; 若 $f(x_n)f''(x_n) > 0$, 要求 $\alpha \leq 0$ 。综上所述, 即得 (2.5)。

在 (2.4) 中取正号或负号, 便得到相应的两个迭代序列 $\{x_n^+\}$ 和 $\{x_n^-\}$ 。对任何满足 $f(x) \neq 0$ 的 x 值, 以及 $\beta > 0, -\frac{1}{\beta} < \alpha \leq 0$, 由 (2.4) 知

$$x_1^- - x_1^+ = \frac{2|f(x)|\sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\alpha-\alpha+1)f'(x)^2 - (\beta\alpha+1)f(x)f''(x)}}{(1-\alpha)f'(x)^2 - f(x)f''(x)} > 0$$

$$(x - x_1^+)(x - x_1^-) = \frac{\beta(\beta\alpha+1)f(x)^2}{(\alpha-1)f'(x)^2 + f(x)f''(x)} < 0$$

所以 $x_1^+ < x < x_1^-$, 利用数学归纳法, 可得

$$\dots < x_2^+ < x_1^+ < x < x_1^- < x_2^- \dots$$

即 $\{x_n^+\}$ 和 $\{x_n^-\}$ 为单调序列。

定理 2 对任何使 $f(x) \neq 0$ 的实值 x , 方程 $f(x) = 0$ 于 x 两侧存在着重数 $\geq \beta$ 的根, 当迭代程序 (2.4) 中取 $\beta > 0, -\frac{1}{\beta} < \alpha \leq 0$ 时, 由 (2.4) 产生的迭代序列 $\{x_n^+\}$ 与 $\{x_n^-\}$ 中没有 $f(x)$ 的零点时, 则序列 $\{x_n^+\}$ 和 $\{x_n^-\}$ 分别单调趋于最靠近 x 的且重数 $\geq \beta$ 的两个根, 而遗漏了它们之间重数 $< \beta$ 的一切实根。

证明 (一) 因为 $g(x)$ 也是阶 ≤ 2 的整函数, 故对于满足 $m \geq \beta$ 的任何实数 β

$$\sigma_2 = -\sigma'_1 = -(\varphi'(x)/\varphi(x))' = \frac{m-\beta}{(x-x^*)^2} + \frac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g(x)^2} > 0$$

从而

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_1^{-2} > 0, \quad \delta \equiv \sigma - \alpha > 0 \quad (2.6)$$

当 $m < \beta$ 时, 因为

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \left(\frac{1}{\sigma_1} \right)' = \left(\frac{(x-x^*)^{m-\beta} g(x)}{(m-\beta)(x-x^*)^{m-\beta-1} g(x) + (x-x^*)^{m-\beta} g'(x)} \right)' \\ &= \frac{(m-\beta) - (x-x^*)^2 (g'(x)/g(x))'}{\left((m-\beta) + (x-x^*) \frac{g'(x)}{g(x)} \right)^2} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \sigma = \frac{1}{m-\beta} < 0 \quad (2.7)$$

(二) 由 (2.2)

$$\frac{1}{(x-x^*)^2} - \frac{2\alpha S_1}{(\beta\alpha+1)(x-x^*)} + \frac{\alpha S_1^2 - S_2}{\beta(\beta\alpha+1)} = -\frac{\delta}{\beta(\beta\alpha+1)} \left(\frac{\beta}{x-x^*} - S_1 \right)^2 \quad (2.8)$$

但 (2.4) 实际上是上式左端的两个根, 故

$$\left(\frac{1}{x-x^*} - \frac{1}{x-x_1^+} \right) \left(\frac{1}{x-x^*} - \frac{1}{x-x_1^-} \right) = -\frac{\delta}{\beta(\beta\alpha+1)} \left(\frac{\beta}{x-x^*} - S_1 \right)^2 \quad (2.9)$$

因此, x_1^- 越过 x 右侧的根 x_+^* 或 x_1^+ 越过 x 左侧的根 x_-^* 的充要条件是

$$\left(\frac{1}{x-x^*} - \frac{1}{x-x_1^+} \right) \text{与} \left(\frac{1}{x-x^*} - \frac{1}{x-x_1^-} \right)$$

同号, 从而在根 x^* 附近 $\delta < 0$ 。

(三) 假设方程 $f(x) = 0$ 于最靠近 x 两侧的根 x^* 的重数 $m \geq \beta$, 由 (2.6) 知 $\delta > 0$, 于是从 (二) 必有

$$x_-^* < x_1^+ < x < x_1^- < x_+^*$$

由归纳法易证 $\{x_n^-\}$ 为以 x_+^* 为上界的单调序列, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^- = \xi \leq x_+^*$$

从 (2.4) 易知 ξ 是 $f(x) = 0$ 的根。今证 $\xi = x_+^*$ 。若 $\xi < x_+^*$, 因 x_+^* 是重数 $m \geq \beta$ 的最靠近 x 的根, 又 $x < \xi < x_+^*$, 所以 ξ 必为重数 $< \beta$ 的根。由 (一) 总可以找到自然数 n , 使对应于 x_n^- 的 $\delta < 0$, 于是由 (2.9) 推知

$$\frac{1}{x_n^- - \xi} < \frac{1}{x_n^- - x_{n+1}^-}$$

即

$$x_{n+1}^- > \xi$$

矛盾, 故有 $\xi = x_+^*$ 。同理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+ = x_-^*$ 。

(四) 设方程 $f(x) = 0$ 于最靠近 x 两侧的根中有某一根 x^* 的重数 $m < \beta$, 根据假设 $-\frac{1}{\beta} < \alpha \leq 0$, 所以 $\frac{1}{\beta} > -\alpha$, 更有 $\frac{1}{\beta - m} > -\alpha$, 从而 $\frac{1}{m - \beta} < \alpha$, 由 (一) 则在该根附近

$$\delta = \sigma - \alpha \approx \frac{1}{m - \beta} - \alpha < 0$$

由 (二) x_n 必越过 x^* 。证明完毕。

特别, 当 $\alpha\beta = -1$ 时, 对 (2.4) 右端第二项有理化, 并注意到 $\alpha\beta = -1$, 得

$$\begin{aligned} & \frac{-f(x_n)f'(x_n) \mp f(x_n)\operatorname{sign}f(x_n)\sqrt{f'(x_n)^2}}{(\alpha-1)f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)} \\ &= \frac{-f(x_n)f'(x_n) \mp |f(x_n)f'(x_n)|}{(\alpha-1)f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)} \\ &= \begin{cases} \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{(\alpha-1)f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)}, & \text{当 } f(x_n)f'(x_n) \geq 0 \text{ 且取负号} \\ 0 & \text{或 } f(x_n)f'(x_n) < 0 \text{ 且取正号} \\ & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

此时 (2.4) 只有一个迭代程序

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{(\alpha-1)f'(x_n)^2 + f(x_n)f''(x_n)} \quad (2.4')$$

定理 3 若 $\alpha\beta = -1$, 则对任何 $f(x) \neq 0$ 的实值 x , 由 (2.4') 产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 或者单调收敛于最靠近 x 的某一侧重数 $\geq \beta$ 的根, 或者按模单调收敛于该侧重数 $< \beta$ 的根。

定理 3 的证明, 完全类似于定理 2, 只须注意 (2.8) 式, 此时应改为

$$(x - x^*) \left[(x - x^*) + \frac{2S_1}{\alpha S_1^2 - S_2} \right] = -\frac{\delta}{\alpha S_1^2 - S_2} (S_1(x - x^*) - \beta)^2$$

而 (2.4') 正是上式左端方括弧内的根, 因此

$$(x - x^*) [(x - x^*) - (x - x_1)] = -\frac{\delta}{\alpha S_1^2 - S_2} (S_1(x - x^*) - \beta)^2$$

由于

$$\alpha S_1^2 - S_2 = \frac{(\alpha-1)f'(x)^2 + f(x)f''(x)}{f(x)^2} < 0$$

因而对于 x 某一侧的根 x^* 而言, x_1 越过 x^* 的充要条件仍然是在 x^* 附近 $\delta < 0$ 。

推论 1 $0 < \beta \leq 1$, $-\frac{1}{\beta} < \alpha \leq 0$ 时, (2.4) 恒单调收敛于位于 x 的两侧最靠近 x 的两个根。

推论 2 当 $f(x) = 0$ 位于 x 的一侧存在重数 $\geq \beta$ 的根, 而另一侧无这样的实根, 则 $\{x_n^+\}$ 、 $\{x_n^-\}$ 中仅有一个序列单调收敛于紧靠 x 的重数 $\geq \beta$ 的根, 而另一序列趋于无穷。

推论 3 如果 $\{x_n^+\}$ 或 $\{x_n^-\}$ 都趋于无穷, 则 $f(x)$ 于 x 两侧不存在重数 $\geq \beta$ 的实根。

在本文写作过程中, 得到陈永昌教授, 吴棣华和朱其吉同志的支持和帮助, 谨致谢意。

一类不定式的几个定理

尹翔云

众所周知,到目前为止关于多元不定式的论述并不多见;同时有关著作在涉及这一问题时大都一带而过。近年来文[1]、文[2]对二元不定式中齐次有理分式函数的极限给予了讨论,得到的结果可归纳为

判别法 I

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n} = C$$

的充要条件: $a_i = c b_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)。

判别法 II $m > n$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n} = 0$$

的充要条件: 方程 $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n = 0$ 与 $b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n = 0$ 无实根。

并且证明, $m < n$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n}$$

不存在。

本文在此基础上讨论 p 元 ($p \geq 2$) 不定式中齐次有理分式函数的极限、微分与积分。并且把全部讨论局限在实数中进行。

为了叙述方便,将二元齐次有理函数

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n$$

记成 $B(x, y)^n$, 将 p 元齐次有理函数

$$\sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}}$$

(其中 n_{ij} 是非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$ (记成 $B(x_1, x_2, \dots, x_p)^n$)

参考文献

- [1] E.Hansen and M.Patrick, A Family of Root Finding Methods, Num. Math.27(1977), 257-268
- [2] A.M.Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Third Edition, New York and London, Academic press, 1973.

简记为 $B(X)_p^n$ 。另外记

$$\sum \lambda b_i \sum_{j=1}^p x_j^{n_{ij}}$$

为 $(\lambda B(X))_p^n$ 。

定义 给定 p 元齐次有理函数 $B(X)_p^n$ ，当自变量的值不全为 0 时，如果

- 1) 恒有 $B(X)_p^n > 0$ ，称 $B(X)_p^n$ 恒正；
 - 2) 恒有 $B(X)_p^n < 0$ ，称 $B(X)_p^n$ 恒负；
 - 3) 恒有 $B(X)_p^n \geq 0$ (≤ 0)，称 $B(X)_p^n$ 半定；
 - 4) 既有 $X = X_1$ 使 $B(X_1)_p^n > 0$ ，又有 $X = X_2$ ，使 $B(X_2)_p^n < 0$ ，称 $B(X)_p^n$ 不定。
- 1)、2) 泛称 $B(X)_p^n$ 恒定，3)、4) 泛称 $B(X)_p^n$ 不恒定。

由上述定义可得到下列性质

性质 1 因 $A(X)_p^n + B(X)_p^n = C(X)_p^n$ ， $(\lambda A(X))_p^n = \lambda A(X)_p^n$ ，所以一切 p 元 n 次有理函数集： $\{R(X)_p^n\}$ 是实数域 R 上的齐次线性空间。简称齐次空间。

性质 2 在齐次空间中任取 $A(X)_p^n$ 与 $B(X)_p^m$ ，总有 $A(X)_p^n \cdot B(X)_p^m = D(X)_p^{n+m}$ 。(其中 $D(X)_p^{n+m}$ 是 p 元 $n+m$ 次齐次有理函数。

性质 3 任取 $B(X)_p^n \in \{R(X)_p^n\}$ ，则 $B(X)_p^n$ 的偏导数： $B'_{x_j}(X)_p^n$ 是 p 元 $n-1$ 次齐次有理函数。即

$$B'_{x_j}(X)_p^n = B_j(X)_p^{n-1} \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

性质 4 如果 $A(X)_p^n$ ， $B(X)_p^n$ 同为恒正(负)，那么：

- 1) $\lambda > 0$ ， $\mu > 0$ ， $\lambda A(X)_p^n + \mu B(X)_p^n$ 恒正(负)；
- 2) $\lambda < 0$ ， $\mu < 0$ ， $\lambda A(X)_p^n + \mu B(X)_p^n$ 恒负(正)。

如果 $A(X)_p^n$ 恒正(负)， $B(X)_p^n$ 恒负(正)那么： $\lambda \mu < 0$ 时， $\lambda A(X)_p^n + \mu B(X)_p^n$ 恒定。

性质 5 如果 $A(X)_p^n$ ， $B(X)_p^m$ 均恒定，那么 $A(X)_p^n \cdot B(X)_p^m = D(X)_p^{n+m}$ 也恒定，反之亦然。

性质 6 如果 $B(X)_p^n$ 恒定，那么

- 1) $x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n$ 的系数均不为 0 且同号；
- 2) n 为偶数。

性质 7 给定 $B(X)_p^n$ ，且有下列情形之一：

- 1) $x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n$ 的系数至少有一个为 0；
- 2) $x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n$ 的系数至少有两个异号；
- 3) n 为奇数。

那么 $B(X)_p^n$ 不恒定。

显然性质 6 和性质 7 等价，即它们互为逆否命题。

在恒定的概念下，易知 $B(x, y)^n$ 恒定同方程 $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ 与 $b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n = 0$ 无实根等价； $B(x, y)_p^n$ 不恒定同方程 $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ 与 $b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n = 0$ 有实根等价。

关于 $B(X)_p^n$ 恒定与不恒定的判别本文将不涉及。

定理 1 若 $p \geq 2$, n_{ij} 为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$), 那么

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ x_p \rightarrow 0}} \sum a_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} = d \quad (1)$$

的充要条件: $a_i = db_i$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$)

证: 充分性是显然的, 现证必要性。

如果 (1) 式成立, 那么沿着经过原点的任意超直线: $x_j = \alpha_j t$ ($j = 1, 2, \dots, p$) 取极限, 应有

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x_1 = \alpha_1 t \\ \dots \\ x_p = \alpha_p t \\ (t \rightarrow 0)}} \frac{\sum a_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}}}{\sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sum a_i \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{ij}}) t^n}{(\sum b_i \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{ij}}) t^n} \\ &= \frac{\sum a_i \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{ij}}}{\sum b_i \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{ij}}} = d \end{aligned}$$

于是

$$\sum (a_i - db_i) \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{ij}} = 0 \quad (2)$$

因为 $\{R(X)\}$ 是齐次线性空间 (性质 1), 对任意 α_j 来讲,

$$\prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{1j}}, \prod_{j=1}^p \alpha_j^{n_{2j}}, \dots$$

线性无关。因之仅当 $a_i = db_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$) 时, (2) 式成立。即 $a_i = db_i$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$) 证完。

推论 1.1 若 $p \geq 2$, n_{ij} 为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$), 那么

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_p \rightarrow \infty}} \sum a_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} = d$$

的充要条件: $a_i = db_i$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$)

证: 应用定理 1 中的证明方法即可证得。

推论 1.2 若 $p \geq 2$, n_{ij} 为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$), 那么

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_p \rightarrow a_p}} \sum a_i \prod_{j=1}^p (x_j - a_j)^{n_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p (x_j - a_j)^{n_{ij}} = d$$

的充要条件: $a_i = db_i$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$)

证: 令 $x_j = t_j + a_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$), 即知为真。

由推论1.1推论1.2可得

推论 1.3 若 $p \geq 2$, n_{ij} 为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$), 那么

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_i \rightarrow a_i \\ \dots \\ x_{i+1} \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_p \rightarrow \infty}} \sum a_i \prod_{j=1}^i (x_j - a_j)^{n_{ij}} \prod_{K=i+1}^p x_K^{n_{iK}} / \sum b_i \prod_{j=1}^i (x_j - a_j)^{n_{ij}} \prod_{K=i+1}^p x_K^{n_{iK}} = d$$

的充要条件: $a_i = db_i$ ($i = 1, 2, \dots, c_{n+p-1}^n$)。

定理 2 若 $p \geq 2$, 又 n_{ij}, m_{ij} 均为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n, \sum_{j=1}^p m_{ij} = m$, 那么 $m > n$

> 1 时

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ x_p \rightarrow 0}} \sum a_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} = 0$$

的充要条件: $B(X)_p^n$ 恒定。

证: 充分性。考虑以原点为心 (不包含原点) 的广义球邻域: $v_p(0, \delta)$, 并引入广义球坐标:

$$x_1 = \rho \cos \theta_1$$

$$x_2 = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{p-1} = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-2} \cos \theta_{p-1}$$

$$x_p = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1}$$

(其中 $\rho > 0, 0 \leq \theta_i \leq \pi, \delta = 1, 2, \dots, p-2, 0 \leq \theta_{p-1} \leq 2\pi$), 于是

$$A(X)_p^n = \rho^n A_1(\theta)_{p-1}, \quad B(X)_p^n = \rho^n B_1(\theta)_{p-1}$$

因 $B(X)_p^n$ 恒定, 那么 $B_1(\theta)_{p-1}$ 恒定, 且有 m_1 和 M_1 (同号), 使得不等式

$$m_1 \leq B_1(\theta)_{p-1} \leq M_1$$

成立。否则若 m_1, M_1 异号, 那么由于 $B(X)_p^n$ 与 $B(\theta)_{p-1}$ 都是连续函数。根据中间值定理就一定有

$$\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p-1,0})$$

存在, 使得 $B_1(\theta_0)_{p-1} = 0$, 因之有 $X = X_0$ 存在, 使

$$B(X_0)_p^n = 0$$

这与 $B(X)_p^n$ 恒定相矛盾。从而对任何 $X \in v_p(\theta, \delta)$ 时, 必有下式

$$0 \leq \left| \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} \right| \leq \rho^{m-n} \left| \frac{A_1(\theta)_{p-1}}{B_1(\theta)_{p-1}} \right| \leq \rho^{m-n} M$$

成立, 但因

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \theta_s \in (0, \pi) \\ \theta_{p-1} \in (0, 2\pi) \quad (S=1, 2, \dots, p-2)}} \rho^{m-n} M = 0$$

故

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = 0$$

必要性, 不妨设 $A(X)_p^m$ 与 $B(X)_p^n$ 无公因式, 否则可在取极限之前约去公因式。若 $B(X)_p^n$ 不恒定, 必有 $X_0 \neq 0$, 使得 $B(X_0)_p^n = 0$, 于是 $B(X)_p^n$ 在超直线 OX_0 : $x_j = \alpha_{j0}t$ ($j = 1, 2, \dots, p$) 上恒为 0, 即

$$B(X)_p^n \Big|_{\substack{X_1 = \alpha_{10}t \\ \dots \\ X_p = \alpha_{p0}t}} = 0$$

但因 $A(X)_p^m$ 与 $B(X_0)_p^n$ 无公因式, 则

$$A(X)_p^m \Big|_{\substack{X_1 = \alpha_{10}t \\ \dots \\ X_p = \alpha_{p0}t}} \neq 0$$

因之

$$\lim_{\substack{X_1 = \alpha_{10}t \\ \dots \\ X_p = \alpha_{p0}t \\ t \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = \infty \quad \lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = \infty$$

不存在, 这与

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = 0$$

相矛盾。证完。

推论 2.1 若 $p \geq 2$, n_{ij} , m_{ij} 均为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n$, $\sum_{j=1}^p m_{ij} = m$, 那么 $n > m >$

1 时

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ X_p \rightarrow \infty}} \sum a_i \prod_{j=1}^p x_j^{m_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p x_j^{n_{ij}} = 0 \quad (3)$$

的充要条件: $B(X)_p^n$ 恒定。

证: 应用定理 2 证明中同样的推理可得。

推论 2.2 若 $p \geq 2$, n_{ij} , m_{ij} 均为非负整数, $\sum_{j=1}^p n_{ij} = n$, $\sum_{j=1}^p m_{ij} = m$, 那么 $m > n >$

1 时

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow \alpha_1 \\ \dots \\ X_p \rightarrow \alpha_p}} \sum a_i \prod_{j=1}^p (x_j - \alpha_j)^{m_{ij}} / \sum b_i \prod_{j=1}^p (x_j - \alpha_j)^{n_{ij}} = 0$$

的充要条件: $B(X - \alpha)_p^n$ 恒定。(其中 $B(X - \alpha)_p^n = \sum b_i \prod_{j=1}^p (x_j - \alpha_j)^{n_{ij}}$)

证: 令 $x_j = t_j + \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$), 即化上述极限式为定理 2 中的情形。

推论 2.3 若 $f(X) = A(X - \alpha)_p^m / B(X - \alpha)_p^n$, $\lim_{X \rightarrow \alpha} f(X) = 0$; 又 $\varphi[f(X)]$ 是复合函数,

且 $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = d$, 那么

$$\lim_{X \rightarrow \alpha} \varphi[f(X)] = d$$

证: 因 $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = d \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \exists 0 < |u| < \delta_1, |\varphi(u) - d| < \varepsilon$; 又 $\lim_{X \rightarrow \alpha} f(X) = 0 \iff$ 对每个 $\delta_1 > 0, \exists \delta > 0, \exists 0 < |X - \alpha| < \delta, |f(X)| < \delta_1$. 由此

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists 0 < |X - \alpha| < \delta$, 即有

$$|\varphi[f(X)] - d| < \varepsilon$$

$\therefore \lim_{X \rightarrow \alpha} \varphi[f(X)] = d$ 证完

推论 2.4 $p \geq 2$, 若

$$1) \quad A(X)_p^m = A_1(X)_p^{m_1} \cdot A_2(X)_p^{m_2} \cdot \dots \cdot A_t(X)_p^{m_t}$$

$$2) \quad B(X)_p^n = B_1(X)_p^{n_1} \cdot B_2(X)_p^{n_2} \cdot \dots \cdot B_t(X)_p^{n_t}$$

那么

$$1) \quad m > n, \quad \lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = 0 \iff B_i(X)_p^{n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, t)$$

恒定;

$$2) \quad m < n, \quad \lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n} = 0 \iff B_i(X)_p^{n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, t) \text{ 恒定.}$$

证: 由性质 5 及定理 2 即得。

定理 3 设 $B(X)_p^n$ 恒定, $\lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A_0(X)_p^n}{B_0(X)_p^n} = d$, 那么

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n+1} + \dots + A_r(X)_p^{n+r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n+1} + \dots + B_t(X)_p^{n+t}} = d$$

证: 由定理 1, 定理 2 得

$$\lim_{\substack{X_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n+1} + \dots + A_r(X)_p^{n+r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n+1} + \dots + B_t(X)_p^{n+t}}$$

$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{[A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n+1} + \dots + A_r(X)_p^{n+r}]/B_0(X)_p^n}{[B_0(X)_p^{n+1} + B_1(X)_p^n + \dots + B_t(X)_p^{n+t}]/B_0(X)_p^n} = d$$

推论 3.1 设 $\lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ X_p \rightarrow \infty}} \frac{A_0(X)_p^n}{B_0(X)_p^n} = d$, 那么在 $n > r$, $n > t$ 且 $B_0(X)_p^n$ 恒定时, 有

$$\lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ X_p \rightarrow \infty}} \frac{A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n-1} + \dots + A_r(X)_p^{n-r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n-1} + \dots + B_t(X)_p^{n-t}} = d$$

推论 3.2 设 $m > n$, $B_0(X)_p^n$ 恒定, 那么

$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X_p \rightarrow 0}} \frac{A_0(X)_p^m + A_1(X)_p^{m+1} + \dots + A_r(X)_p^{m+r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n+1} + \dots + B_t(X)_p^{n+t}} = 0$$

推论 3.3 设 $m < n$, $m > r$, $n > t$, $B_0(X)_p^n$ 恒定, 那么

$$\lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ X_p \rightarrow \infty}} \frac{A_0(X)_p^m + A_1(X)_p^{m-1} + \dots + A_r(X)_p^{m-r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n-1} + \dots + B_t(X)_p^{n-t}} = 0$$

定理 4 设

$$f(X) = \begin{cases} \frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}, & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 \neq 0; \\ 0, & x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0. \end{cases}$$

且 $B(X)_p^n$ 恒定, $m > n+1$, 那么 $f(X)$ 在原点可微, 并且 $df(0) = 0$

证: 1) $X = 0$, 因 $B(X)_p^n$ 恒定, 由性质 6 知 $x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n$ 的系数均不为 0, 于是 $f(\Delta x_j)$ 有意义, 故

$$f'_{x_j}(0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{A(\Delta x_j)_p^m}{B(\Delta x_j)_p^n} \cdot \frac{1}{\Delta x_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

2) $X \neq 0$, 因 $f(X)$ 是连续可微函数。据性质 3°

$$\begin{aligned} f'_{x_j}(X) &= \frac{A_j(X)_p^{m-1} B(X)_p^n - B_j(X)_p^{n-1} A(X)_p^m}{[B(X)_p^n]^2} \\ &= \frac{C_j(X)_p^{m+n-1}}{[B(X)_p^n]^2} \quad (j=1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

3) 因 $B(X)_p^n$ 恒定, 据性质 5° $[B(X)_p^n]^2$ 恒定, 又 $m > n+1 \Rightarrow m+n-1 > 2n$, 故

$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X_p \rightarrow 0}} f'_{x_j}(X) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{C_j(X)_p^{m+n-1}}{[B(X)_p^n]^2} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

即所有 $f'_{x_j}(X)$ 在原点处连续。因之 $f(X)$ 在原点处可微, 并且 $df(0) = 0$ 证完

推论 设