成都地质学院建院三十周年

論文集

（之七）

应用数学系

一九八六年十月十五日

目　录

CONTENTS

关于两类计算重根的大范围收敛迭代法

何永富

1§　一类含单参数的大范围收敛迭代法

假设 $K_2 \equiv \{f(z)\}$ 表示由全体只含实零点的整函数作成的集合，其中每一个函数 $f(z)$ 的阶数（order）都小于2，且对实变元 z 常取实数值。特别，$f(z)$ 可以是一个只含实根的实值多项式。

现研究求方程

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

的实根的迭代程序

$$x_{n+1}=x_n \pm \beta |f(x_n)|/\sqrt{f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)} \tag{1.2}$$

此处 $\beta>0$ 为参数，$n=0,1,2,\cdots$，而 x_0 为任意实数，只须 $f(x_0)\neq 0$。

在（1.2）中取定+号或-号，得到两个序列 $\{x_n^+\}$ 与 $\{x_n^-\}$。

不失一般性，假设 $f(0)\neq 0$，将 $f(z)$ 的全体实零点按绝对值大小排列为

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots。$$

应用 *Hadamard* 因子分解定理，有

$$f(z)=c\,e^{az}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n},$$

其中 c，a 与 z_n 均为实数。对上式两端取对数导数，得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=a+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z_n}+\frac{1}{z-z_n}\right),$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_n)^2}.$$

对初值 x_0，有

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)_{z=x_0}=\frac{f'(x_0)^2-f(x_0)f''(x_0)}{f(x_0)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x_0-z_n)^2}$$

因此 $f'(x_0)^2-f(x_0)f''(x_0)>0$。同理，当 $f(x_n)\neq 0$ 时

$$f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)>0 \tag{1.3}$$

所以，程序（1.2）是恒有意义的。

定理 1 设$f(z)\in K_2$，对满足条件$f(x_0)\neq 0$的任意实数x_0，由(1.2）给出的迭代数列$\{x_n^+\}$，$\{x_n^-\}$将分别单调地收敛到$f(z)$在x_0右侧及左侧最邻近x_0的重数$\geqslant\beta^2$的实零点x^*，而遗漏$f(z)$在x_0，x^*间的重数$<\beta^2$的实零点。特别，如果迭代程序（1.2）所得数列发散，则沿着数列发散那侧，$f(z)$没有重数$\geqslant\beta^2$的实零点。

证明　只对$\{x_n^+\}$进行证明，关于$\{x_n^-\}$的证明是完全平行的。为简单计，略去x_n^+的上标，记成x_n。应用数学归纳法，易证

$$x_n\leqslant x^*,\qquad n=0.1.2,\cdots。 \tag{1.4}$$

当$n=0$时，显然$x_0<x^*$。现假设$n=k$时（1.4）成立，由

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x) \tag{1.5}$$

此处$m\geqslant 1$为实根x^*的重数，$g(x)$连续，有界且$g(x^*)\neq 0$。求导，有$f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x)$，因而

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{m}{x-x^*}$$

两端求导数，得

$$f'(x)^2-f(x)f''(x)=f(x)^2\left[\frac{g'(x)^2-g(x)g''(x)}{g(x)^2}+\frac{m}{(x-x^*)^2}\right] \tag{1.6}$$

由于$g(x)\in K_2$，根据（1.3）式，知$g'(x_n)^2-g(x_n)g''(x_n)>0$，从而

$$f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)\geqslant f(x)^2\frac{m}{(x-x^*)^2}$$

则

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+\beta|f(x_k)|/\sqrt{f'(x_k)^2-f(x_k)f''(x_k)}\\&\leqslant x_k+\beta|f(x_k)|/\sqrt{f(x_k)^2\frac{m}{(x_k-x^*)^2}}\\&=x_k+\frac{\beta}{\sqrt{m}}|x_k-x^*|\end{aligned}$$

因为$x_k\leqslant x^*$，如果$m\geqslant\beta^2$，有

$$x_{k+1}\leqslant x_k+x^*-x_k=x^*$$

这就证明了（1.4）。显然，$\{x_n\}$单调递增而且有界，所以存在实数$\overline{x}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\overline{x}\leqslant x^*$。根据程序(1.2)，我们有

$$|f(\overline{x})|=\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta}(x_{n+1}-x_n)\sqrt{f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)}=0$$

故

$$f(\overline{x})=0$$

即$\overline{x}$为$f(x)$的一个实零点。

往证$\overline{x}=x^*$。假若$\overline{x}\neq x^*$，其重数$\overline{m}<\beta^2$，则由$x_n\leqslant\overline{x}$，有

$$0 \leqslant \frac{\bar{x} - x_{n+1}}{\bar{x} - x_n} = 1 - \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n)\sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n)}}$$

从而

$$0 \leqslant \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n)\sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n)}} \leqslant 1 \tag{1.7}$$

因为 $f(x) = (x - \bar{x})^{\bar{m}} \varphi(x)$ 仿照（1.6）式，得

$$f'(x)^2 - f(x) f''(x) = f(x)^2 \left[\frac{\varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi(x)^2} + \frac{\bar{m}}{(x - \bar{x})^2} \right]$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta |f(x_n)|}{(\bar{x} - x_n)\sqrt{f'(x_n)^2 - f(x_n) f''(x_n)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \beta \Big/ \sqrt{\bar{m} + (\bar{x} - x_n)^2 \frac{\varphi'(x_n)^2 - \varphi(x_n)\varphi''(x_n)}{\varphi(x_n)^2}}$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\bar{m}}} > 1$$

与（1.7）式相矛盾，因此 $\bar{x} = x^*$。

显然，由以上证明推知，只要迭代数列（1.2）收敛，则其 极限一定是 $f(z)$ 的重数 $m \geqslant \beta^2$ 的零点，所以，沿着数列发散那一侧，函数 $f(z)$ 不会有重数 $\geqslant \beta^2$ 的零点。定理证毕。

§2　一类含双参数的大范围收敛迭代法

设函数 $f(z)$ 为只含实零点，阶数小于等于 2 的整函数，当 z 取实变量时，$f(z)$ 取实数值。又设实值 x^* 为 $f(x)$ 的一个 m 级零点，即

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) = (x - x^*)^\beta \varphi(x) \tag{2.1}$$

此处 m 为正整数，β 为实数，$g(x^*) \neq 0$，$\varphi(x) = (x - x^*)^{m-\beta} g(x)$。

现简记 $S_1 \equiv f'(x)/f(x)$，　$\sigma_1 \equiv \varphi'(x)/\varphi(x)$，　$S_2 \equiv -S_1'$，　$\sigma_2 \equiv -\sigma_1'$，$e \equiv x - x^*$，　$\sigma \equiv \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)' = \sigma_2 \cdot \sigma_1^{-2}$。于是，当 $x \neq x^*$ 时，由

$$\sigma_1 = S_1 - \frac{\beta}{e}, \qquad S_2 = \sigma_2 + \frac{\beta}{e^2}$$

有

$$S_2 = \sigma \left(S_1 - \frac{\beta}{e} \right)^2 + \frac{\beta}{e^2}$$

即

$$\frac{\beta(\beta\sigma + 1)}{e^2} - \frac{2\beta\sigma S_1}{e} + \sigma S_1^2 - S_2 = 0 \tag{2.2}$$

求解方程（2.2），得

$$x^* = x - \frac{\beta(\beta\sigma+1)f(x)}{\beta\sigma f'(x) \pm \sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\sigma-\sigma+1)f'(x)^2-(\beta\sigma+1)f(x)f''(x)}} \tag{2.3}$$

在一般情况下，σ 是未知的，β 也是需要确定的，故不妨将公式（2.3）看成两个实参数 α,β的迭代程序，于是，考虑更一般的迭代程序

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\beta(\beta\alpha+1)f(x_n)}{\beta\alpha f'(x_n) \pm \mathrm{sign}f(x_n)\sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\alpha-\alpha+1)f'(x_n)^2-(\beta\alpha+1)f(x_n)f''(x_n)}} \tag{2.4}$$

此处$n=0,1,2,\cdots$，$\mathrm{sign}f(x_n)$表示$f(x_n)$ 的符号函数。

为使程序（2.4）有意义，通常要求α、β满足

$$\beta>0, \qquad -\frac{1}{\beta}\leqslant\alpha\leqslant 0 \tag{2.5}$$

事实上，从（2.4）可知要求$\beta>0$。其次，要使$\beta\alpha-\alpha+1>0$，即当$\beta>1$时，要求$\alpha>\frac{1}{1-\beta}$；当$\beta<1$时，要求$\alpha<\frac{1}{1-\beta}$。最后，α，β应满足

$$f'(x_n)^2-\frac{\beta\alpha+1}{\beta\alpha-\alpha+1}f(x_n)f''(x_n)=f'(x_n)^2-\left(1+\frac{\alpha}{\beta\alpha-\alpha+1}\right)f(x_n)f''(x_n)\geqslant 0$$

由于$f(x)$满足（1.3），故若$f(x_n)f''(x_n)\leqslant 0$时，要求$-\frac{1}{\beta}\leqslant\alpha<+\infty$；若$f(x_n)f''(x_n)>0$，要求$\alpha\leqslant 0$。综上所述，即得（2.5）。

在（2.4）中取正号或负号，便得到相应的两个迭代序列$\{x_n^+\}$和$\{x_n^-\}$。对任何满足$f(x)\neq 0$的x值，以及$\beta>0,-\frac{1}{\beta}<\alpha\leqslant 0$,由（2.4）知

$$x_1^- - x_1^+ = \frac{2|f(x)|\sqrt{\beta}\sqrt{(\beta\alpha-\alpha+1)f'(x)^2-(\beta\alpha+1)f(x)f''(x)}}{(1-\alpha)f'(x)^2-f(x)f''(x)}>0$$

$$(x-x_1^+)(x-x_1^-)=\frac{\beta(\beta\alpha+1)f(x)^2}{(\alpha-1)f'(x)^2+f(x)f''(x)}<0$$

所以$x_1^+<x<x_1^-$，利用数学归纳法，可得

$$\cdots<x_2^+<x_1^+<x<x_1^-<x_2^-\cdots$$

即$\{x_n^+\}$和$\{x_n^-\}$为单调序列。

定理 2 对任何使$f(x)\neq 0$的实值x，方程$f(x)=0$于x两侧存在着重数$\geqslant\beta$的根，当迭代程序（2.4）中取$\beta>0$，$-\frac{1}{\beta}<\alpha\leqslant 0$时，由（2.4）产生的迭代序列$\{x_n^+\}$与$\{x_n^-\}$中没有$f(x)$的零点时，则序列$\{x_n^+\}$和$\{x_n^-\}$分别单调趋于最靠近$x$的且重数$\geqslant\beta$的两个根，而遗漏了它们之间重数$<\beta$的一切实根。

证明 （一）因为$g(x)$也是阶$\leqslant 2$的整函数，故对于满足$m\geqslant\beta$的任何实数β

$$\sigma_2=-\sigma_1'=-(\varphi'(x)/\varphi(x))'=\frac{m-\beta}{(x-x^*)^2}+\frac{g'(x)^2-g(x)g''(x)}{g(x)^2}>0$$

从而

$$\sigma=\sigma_2\cdot\sigma_1^{-2}>0,\qquad \delta\equiv\sigma-\alpha>0 \tag{2.6}$$

当$m<\beta$时，因为

$$\sigma\equiv\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)'=\left(\frac{(x-x^*)^{m-\beta}g(x)}{(m-\beta)(x-x^*)^{m-\beta-1}g(x)+(x-x^*)^{m-\beta}g'(x)}\right)'$$

$$=\frac{(m-\beta)-(x-x^*)^2(g'(x)/g(x))'}{\left((m-\beta)+(x-x^*)\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right)^2}$$

所以

$$\lim_{x\to x^*}\sigma=\frac{1}{m-\beta}<0 \tag{2.7}$$

（二）由(2.2)

$$\frac{1}{(x-x^*)^2}-\frac{2\alpha S_1}{(\beta\alpha+1)(x-x^*)}+\frac{\alpha S_1^2-S_2}{\beta(\beta\alpha+1)}=-\frac{\delta}{\beta(\beta\alpha+1)}\left(\frac{\beta}{x-x^*}-S_1\right)^2 \tag{2.8}$$

但（2.4）实际上是上式左端的两个根，故

$$\left(\frac{1}{x-x^*}-\frac{1}{x-x_1^+}\right)\left(\frac{1}{x-x^*}-\frac{1}{x-x_1^-}\right)=-\frac{\delta}{\beta(\beta\alpha+1)}\left(\frac{\beta}{x-x^*}-S_1\right)^2 \tag{2.9}$$

因此，x_1^-越过x右侧的根x_+^*或x_1^+越过x左侧的根x_-^*的充要条件是

$$\left(\frac{1}{x-x^*}-\frac{1}{x-x_1^+}\right)与\left(\frac{1}{x-x^*}-\frac{1}{x-x_1^-}\right)$$

同号，从而在根x^*附近$\delta<0$。

（三）假设方程$f(x)=0$于最靠近x两侧的根x^*的重数$m\geqslant\beta$，由（2.6）知$\delta>0$，于是从（二）必有

$$x_-^*<x_1^+<x<x_1^-<x_+^*$$

由归纳法易证$\{x_n^-\}$为以x_+^*为上界的单调序列，设

$$\lim_{n\to\infty}x_n^-=\zeta\leqslant x_+^*$$

从（2.4）易知ζ是$f(x)=0$的根。今证$\zeta=x_+^*$。若$\zeta<x_+^*$，因x_+^*是重数$m\geqslant\beta$的最靠近x的根，又$x<\zeta<x_+^*$，所以ζ必为重数$<\beta$的根。由（一）总可以找到自然数n，使对应于x_n^-的$\delta<0$，于是由（2.9）推知

$$\frac{1}{x_n^--\zeta}<\frac{1}{x_n^--x_{n+1}^-}$$

即

$$x_{n+1}^->\zeta$$

矛盾，故有$\zeta=x_+^*$。同理可证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^+=x_-^*$.

（四）设方程 $f(x)=0$ 于最靠近 x 两侧的根中有某一根 x^* 的重数 $m<\beta$，根据假设 $-\frac{1}{\beta}<\alpha\leqslant 0$，所以 $\frac{1}{\beta}>-\alpha$，更有 $\frac{1}{\beta-m}>-\alpha$，从而 $\frac{1}{m-\beta}<\alpha$，由（一）则在该根附近

$$\delta=\sigma-\alpha\approx\frac{1}{m-\beta}-\alpha<0$$

由（二）x_n 必越过 x^*。证明完毕。

特别，当 $\alpha\beta=-1$ 时，对（2.4）右端第二项有理化，并注意到 $\alpha\beta=-1$，得

$$\frac{-f(x_n)f'(x_n)\mp f(x_n)\operatorname{sign}f(x_n)\sqrt{f'(x_n)^2}}{(\alpha-1)f'(x_n)^2+f(x_n)f''(x_n)}$$

$$=\frac{-f(x_n)f'(x_n)\mp|f(x_n)f'(x_n)|}{(\alpha-1)f'(x_n)^2+f(x_n)f''(x_n)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-2f(x_n)f'(x_n)}{(\alpha-1)f'(x_n)^2+f(x_n)f''(x_n)}, & \begin{array}{l}\text{当}f(x_n)f'(x_n)\geqslant 0\text{且取负号}\\ \text{或}f(x_n)f'(x_n)<0\text{且取正号}\end{array}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

此时（2.4）只一个迭代程序

$$x_{n+1}=x_n+\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{(\alpha-1)f'(x_n)^2+f(x_n)f''(x_n)} \qquad (2.4')$$

定理 3 若 $\alpha\beta=-1$，则对任何 $f(x)\neq 0$ 的实值 x，由（2.4′）产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 或者单调收敛于最靠近 x 的某一侧重数 $\geqslant\beta$ 的根，或者按模单调收敛于该侧重数 $<\beta$ 的根。

定理 3 的证明，完全类似于定理 2，只须注意（2.8）式，此时应改为

$$(x-x^*)\left[(x-x^*)+\frac{2S_1}{\alpha S_1^2-S_2}\right]=-\frac{\delta}{\alpha S_1^2-S_2}(S_1(x-x^*)-\beta)^2$$

而（2.4′）正是上式左端方括弧内的根，因此

$$(x-x^*)[(x-x^*)-(x-x_1)]=-\frac{\delta}{\alpha S_1^2-S_2}(S_1(x-x^*)-\beta)^2$$

由于

$$\alpha S_1^2-S_2=\frac{(\alpha-1)f'(x)^2+f(x)f''(x)}{f(x)^2}<0$$

因而对于 x 某一侧的根 x^* 而言，x_1 越过 x^* 的充要条件仍然是在 x^* 附近 $\delta<0$。

推论 1　$0<\beta\leqslant 1$，$-\frac{1}{\beta}<\alpha\leqslant 0$ 时，（2.4）恒单调收敛于位于 x 的两侧最靠近 x 的两个根。

推论 2　当 $f(x)=0$ 位于 x 的一侧存在重数 $\geqslant\beta$ 的根，而另一侧无这样的实根，则 $\{x_n^+\}$、$\{x_n^-\}$ 中仅有一个序列单调收敛于紧靠 x 的重数 $\geqslant\beta$ 的根，而另一序列趋于无穷。

推论 3　如果 $\{x_n^+\}$ 或 $\{x_n^-\}$ 都趋于无穷，则 $f(x)$ 于 x 两侧不存在重数 $\geqslant\beta$ 的实根。

在本文写作过程过中，得到陈永昌教授，吴棣华和朱其吉同志的支持和帮助，谨致谢意。

一类不定式的几个定理

尹 翔 云

众所周知，到目前为止关于多元不定式的论述并不多见；同时有关著作在涉及这一问题时大都一带而过。近年来文［1］、文［2］对二元不定式中齐次有理分式函数的极限给予了讨论，得到的结果可归纳为

判别法Ⅰ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}=C$$

的充要条件：$a_i=cb_i$　$(i=0,1,2,\cdots,\ n)$。

判别法Ⅱ　$m>n$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_my^m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}=0$$

的充要条件：方程$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$与$b_0+b_1y+\cdots+b_ny^n=0$无实根。

并且证明，$m<n$，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_my^m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}$$

不存在。

本文在此基础上讨论 p 元（$p\geqslant 2$）不定式中齐次有理方式函数的极限、微分与积分。并且把全部讨论局限在实数中进行。

为了叙述方便，将二元齐次有理函数

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n$$

记成$B(x,y)^n$，将 p 元齐次有理函数

$$\sum b_i\prod_{j=1}^{p}x_j^{n_{ij}}$$

（其中 n_{ij} 是非负整数，$\sum_{j=1}^{p}n_{ij}=n\geqslant 1$，$i=1,2,\cdots,\ c_{n+p-1}^{n}$（记成$B(x_1,x_2,\cdots,x_p)^n$

参 考 文 献

［1］ E.Hansen and M.Patrick, A Family of Root Finding Methods, Num. Math.27(1977), 257-268

［2］ A.M.Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Third Edition, New York and London, Academic press, 1973.

简记为$B(X)^n_p$。另外记

$$\sum \lambda b_i \sum_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}}$$

为 $(\lambda B(X))^n_p$。

定义 给定p元齐次有理函数$B(X)^n_p$，当自变量的值不全为0时，如果

1）恒有$B(X)^n_p>0$，称$B(X)^n_p$恒正；

2）恒有$B(X)^n_p<0$，称$B(X)^n_p$恒负；

3）恒有$B(X)^n_p\geqslant 0$（$\leqslant 0$），称$B(X)^n_p$半定；

4）既有$X=X_1$使$B(X_1)^n_p>0$，又有$X=X_2$，使$B(X_2)^n_p<0$，称$B(X)^n_p$不定。

1）、2）泛称$B(X)^n_p$恒定，3）、4）泛称$B(X)^n_p$不恒定。

由上述定义可得到下列性质

性质1 因$A(X)^n_p+B(X)^n_p=C(X)^n_p,(\lambda A(X))^n_p=\lambda A(X)^n_p$，所以一切$p$元$n$次有理函数集：$\{R(X)^n_p\}$是实数域$R$上的齐次线性空间。简称齐次空间。

性质2 在齐次空间中任取$A(X)^n_p$与$B(X)^m_p$，总有$A(X)^n_p\cdot B(X)^m_p=D(X)^{n+m}_p$。（其中$D(X)^{n+m}_p$是$p$元$n+m$次齐次有理函数。

性质3 任取$B(X)^n_p\in\{R(X)^n_p\}$，则$B(X)^m_p$的偏导数；$B'_{x_j}(X)^n_p$是p元$n-1$次齐次有理函数。即

$$B'_{x_j}(X)^n_p=B_j(X)^{n-1}_p \qquad (j=1,2,\cdots,p)$$

性质4 如果$A(X)^n_p$，$B(X)^n_p$同为恒正（负），那么：

1）$\lambda>0$，$\mu>0$，$\lambda A(X)^n_p+\mu B(X)^n_p$恒正（负）；

2）$\lambda<0$，$\mu<0$，$\lambda A(X)^n_p+\mu B(X)^n_p$恒负（正）。

如果$A(X)^n_p$恒正(负)，$B(X)^n_p$恒负(正)那么：$\lambda\mu<0$)时，$\lambda A(X)^n_p+\mu B(X)^n_p$恒定。

性质5 如果$A(X)^n_p$，$B(X)^m_p$均恒定，那么$A(X)^n_p\cdot B(X)^m_p=D(X)^{n+m}_p$也恒定，反之亦然。

性质6 如果$B(X)^n_p$恒定，那么

1）x_1^n，$x_2^n,\cdots$，x_p^n的系数均不为0且同号；

2）n为偶数。

性质7 给定$B(X)^n_p$，且有下列情形之一：

1）x_1^n，$x_2^n,\cdots$，x_p^p的系数至少有一个为0；

2）x_1^n，$x_2^n,\cdots$，x_p^n的系数至少有两个异号；

3）n为奇数。

那么$B(X)^n_p$不恒定。

显然性质6和性质7等价，即它们互为逆否命题。

在恒定的概念下，易知$B(x,y)^n$恒定同方程$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$与$b_0+b_1y+\cdots+b_ny^n=0$无实根等价；$B(x,y)^n_p$不恒定同方程$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$与$b_0+b_1y+\cdots+b_ny^n=0$有实根等价。

关于$B(X)^n_p$恒定与不恒定的判别本文将不涉及。

定理 1 若 $p\geqslant 2$，n_{ij} 为非负整数，$\sum_{j=1}^{p} n_{ij}=n\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$，那么

$$\lim_{\substack{X_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ X_p\to 0}} \sum a_i \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}} \Big/ \sum b_i \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}} = d \qquad (1)$$

的充要条件：$a_i=db_i$ $\quad(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$

证：充分性是显然的，现证必要性。

如果（1）式成立，那么沿着经过原点的任意超直线：$x_j=\alpha_j t$ $(j=1,2,\cdots,\ p)$ 取极限，应有

$$\lim_{\substack{X_1=\alpha_1 t\\ \cdots\cdots\\ X_p=\alpha_p t\\ (t\to 0)}} \frac{\sum a_j \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}}}{\sum b_i \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}}} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\sum a_i \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{n_{ij}}\right) t^n}{\left(\sum b_i \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{n_{ij}}\right) t^n}$$

$$= \frac{\sum a_i \prod_{j=1}^{p} \alpha_i^{n_{ij}}}{\sum b_i \prod_{j1=}^{p} \alpha_j^{n_{ij}}} = d$$

于是

$$\sum (a_i - db_i) \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{n_{ij}} = 0 \qquad (2)$$

因为 $\{R(X)^n_p\}$ 是齐次线性空间（性质 1），对任意 α_j 来讲，

$$\prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{n_{1j}}, \quad \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{n_{2j}}, \ \cdots\cdots\cdots$$

线性无关。因之仅当 $a_i=db_i=0$ $(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$ 时，（2）式成立。即 $a_i=db_i$ $(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$ 证完。

推论 1.1 若 $p\geqslant 2$，n_{ij} 为非负整数，$\sum_{j=1}^{p} n_{ij}=n\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$，那么

$$\lim_{\substack{X_1\to\infty\\ \cdots\cdots\\ X_p\to\infty}} \sum a_i \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}} \Big/ \sum b_i \prod_{j=1}^{p} x_j^{n_{ij}} = d$$

的充要条件：$a_i=db_i$ $\quad(i=1,2,\cdots,\ c^{n}_{n+p-1})$

证：应用定理 1 中的证明方法即可证得。

推论 1.2 若 $p\geqslant 2$，n_{ij} 为非负整数，$\sum_{j=1}^{p} n_{ij}=n\geqslant 1$ $(i=1,2,\cdots c^{n}_{n+p-1})$，那么

$$\lim_{\substack{x_1\to\alpha_1\\ \cdots\cdots\\ x_p\to\alpha_p}}\sum a_i\prod_{j=1}^{p}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}}\Big/\sum b_i\prod_{j=1}^{p}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}}=d$$

的充要条件：$a_i=db_i$（$i=1,2,\cdots,c^n_{n+p-1}$）

证：令 $x_j=t_j+\alpha_j$（$j=1,2,\cdots,p$），即知为真。

由推论1.1推论1.2可得

推论 1.3 若$p\geqslant2$，n_{ij}为非负整数，$\sum\limits_{j=1}^{p}n_{ij}=n\geqslant1$（$i=1,2,\cdots,c^n_{n+p-1}$），那么

$$\lim_{\substack{x_1\to\alpha_1\\ \cdots\cdots\\ x_l\to\alpha_l\\ x_{l+1}\to\infty\\ \cdots\cdots\\ x_p\to\infty}}\sum a_i\prod_{j=1}^{l}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}}\prod_{K=l+1}^{p}x_K^{n_{ik}}\Big/\sum b_i\prod_{j=1}^{l}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}}\prod_{K=l+1}^{p}x_K^{n_{ik}}$$
$$=d$$

的充要条件：$a_i=db_i$（$i=1,2,\cdots,c^n_{n+p-1}$）。

定理 2 若$p\geqslant2$，又n_{ij}，m_{ij}均为非负整数，$\sum\limits_{j=1}^{p}n_{ij}=n$，$\sum\limits_{j=1}^{p}m_{ij}=m$，那么 $m>n>1$ 时

$$\lim_{\substack{x_1\to0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to0}}\sum a_i\prod_{j=1}^{p}x_j^{m_{ij}}\Big/\sum b_i\prod_{j=1}^{p}x_j^{n_{ij}}=0$$

的充要条件：$B(X)^n_p$恒定。

证：充分性。考虑以原点为心（不包含原点）的广义球邻域：$v_p(0,\delta)$，并引入广义球坐标：

$$\begin{aligned}
x_1&=\rho\cos\theta_1\\
x_2&=\rho\sin\theta_1\cos\theta_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{p-1}&=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cdots\sin\theta_{p-2}\cos\theta_{p-1}\\
x_p&=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cdots\sin\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1}
\end{aligned}$$

（其中 $\rho>0$，$0\leqslant\theta_s\leqslant\pi$，$\delta=1,2,\cdots,p-2$，$0\leqslant\theta_{p-1}\leqslant2\pi$），于是

$$A(X)^m_p=\rho^mA_1(\theta)_{p-1},\qquad B(X)^n_p=\rho^nB_1(\theta)_{p-1}$$

因$B(X)^n_p$恒定，那么$B_1(\theta)_{p-1}$恒定，且有m_1和M_1（同号），使得不等式

$$m_1\leqslant B_1(\theta)_{p-1}\leqslant M_1$$

成立。否则若m_1，M_2异号，那么由于$B(X)^n_p$与$B(\theta)_{p-1}$都是连续函数。根据中间值定理就一定有

$$\theta_0=(\theta_{10},\theta_{20},\cdots\theta_{p-1,0})$$

存在，使得$B_1(\theta_0)_{p-1}=0$，因之有$X=X_0$存在，使

$$B(X_0)^n_p=0$$

这与$B(X)_p^n$恒定相矛盾。从而对任何$X\in v_p(\theta,\delta)$时，必有下式

$$0\leqslant\left|\frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}\right|\leqslant\rho^{m-n}\left|\frac{A_1(\theta)_{p-1}}{B_1(\theta)_{p-1}}\right|\leqslant\rho^{m-n}M$$

成立，但因

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta_S\in(0,\pi)\quad(S=1,2,\cdots,p-2)\\ \theta_{p-1}\in(0,2\pi)}}\rho^{m-n}M=0$$

故

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}=0$$

必要性，不妨设$A(X)_p^m$与$B(X)_p^n$无公因式，否则可在取极限之前约去公因式。若$B(X)_p^n$不恒定，必有$X_0\neq 0$，使得$B(X_0)_p^n=0$，于是$B(X)_p^n$在超直线$\overline{OX_0}$：$x_j=\alpha_{j0}t(j=1,2,\cdots,p)$上恒为0，即

$$B(X)_p^n\Big|_{\substack{x_1=\alpha_{10}t\\ \cdots\cdots\\ x_p=\alpha_{p0}t}}=0$$

但因$A(X)_p^m$与$B(X_0)_p^n$无公因式，则

$$A(X)_p^m\Big|_{\substack{x_1=\alpha_{10}t\\ \cdots\cdots\\ x_p=\alpha_{p0}t}}\neq 0$$

因之

$$\lim_{\substack{x_1=\alpha_{10}t\\ \cdots\cdots\\ x_p=\alpha_{p0}t\\ t\to 0}}\frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}=\infty\qquad\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}$$

不存在，这与

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\frac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}=0$$

相矛盾。证完。

推论 2.1 若$p\geqslant 2$，n_{ij}，m_{ij}均为非负整数，$\sum_{j=1}^{p}n_{ij}=n$，$\sum_{j=1}^{p}m_{ij}=m$，那么$n>m>1$时

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots\\ x_p\to\infty}}\sum a_i\prod_{j=1}^{p}x_j^{m_{ij}}\Big/\sum b_i\prod_{j=1}^{p}x_j^{n_{ij}}=0\qquad(3)$$

的充要条件：$B(X)_p^n$恒定。

证：应用定理2证明中同样的推理可得。

推论 2.2 若$p\geqslant 2$，n_{ij}，m_{ij}均为非负整数，$\sum_{j=1}^{p}n_{ij}=n$，$\sum_{j=1}^{p}m_{ij}=m$，那么$m>n>1$时

$$\lim_{\substack{x_1\to\alpha_1\\ \cdots\cdots\\ x_p\to\alpha_p}} \sum a_i \prod_{j=1}^{p}(x_j-\alpha_j)^{m_{ij}} \Big/ \sum b_i \prod_{j=1}^{p}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}} = 0$$

的充要条件：$B(X-\alpha)^n_p$ 恒定。（其中 $B(X-\alpha)^n_p=\sum b_i\prod_{j=1}^{p}(x_j-\alpha_j)^{n_{ij}}$）

证：令 $x_j=t_j+\alpha_j$（$j=1,2,\cdots,p$），即化上述极限式为定理2中的情形。

推论 2.3 若$f(X)=A(X-\alpha)^m_p/B(X-\alpha)^n_p$，$\lim\limits_{X\to\alpha}f(X)=0$；又$\varphi[f(X)]$是复合函数，且$\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=d$，那么

$$\lim_{X\to\alpha}\varphi[f(X)]=d$$

证：因$\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=d\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta_1>0$，$\ni\cdot 0<|u|<\delta_1$，$|\varphi(u)-d|<\varepsilon$；又$\lim\limits_{X\to\alpha}f(X)=0\Longleftrightarrow$对每个$\delta_1>0$，$\exists\,\delta>0$，$\ni\cdot 0<|X-\alpha|<\delta$，$|f(X)|<\delta_1$。由此

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\ni\cdot 0<|X-\alpha|<\delta$，即有

$$\varphi|(u)-d|=|\varphi[f(X)]-d|<\varepsilon$$

$\therefore\quad \lim\limits_{X\to\alpha}\varphi[f(X)]=d$ 证完

推论 2.4 $p\geqslant 2$，若

1） $A(X)^m_p=A_1(X)^{m_1}_p\cdot A_2(X)^{m_2}_p\cdots\cdots A_s(X)^{m_s}_p$

2） $B(X)^n_p=B_1(X)^{n_1}_p\cdot B_2(X)^{n_2}_p\cdots\cdots B_t(X)^{n_t}_p$

那么

1） $m>n$，$\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\dfrac{A(X)^m_p}{B(X)^n_p}=0\Longleftrightarrow B_i(X)^{n_i}_p$ （$i=1,2,\cdots t$）

恒定；

2） $m<n$，$\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots\\ x_p\to\infty}}\dfrac{A(X)^m_p}{B(X)^n_p}0=\Longleftrightarrow B_i(X)^{n_i}_p$ （$i=1,2,\cdots,t$）恒定。

证：由性质5及定理2即得。

定理 3 设$B(X)^n_p$恒定，$\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\dfrac{A_0(X)^n_p}{B_0(X)^n_p}=d$，那么

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\frac{A_0(X)^n_p+A_1(X)^{n+1}_p+\cdots+A_r(X)^{n+r}_p}{B_0(X)^n_p+B_1(X)^{n+1}_p+\cdots+B_t(X)^{n+t}_p}=d$$

证：由定理1，定理2得

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ x_p\to 0}}\frac{A_0(X)^n_p+A_1(X)^{n+1}_p+\cdots+A_r(X)^{n+r}_p}{B_0(X)^n_p+B_1(X)^{n+1}_p+\cdots+B_t(X)^{n+t}_p}$$

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots \\ x_p\to 0}} \frac{[A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n+1} + \cdots + A_r(X)_p^{n+r}]/B_0(X)_p^n}{[B_0(X)_p^{n+1} + B_1(X)_p^n + \cdots + B_t(X)_p^{n+t}]/B_0(X)_p^n}$$

$$= d$$

推论 3.1 设 $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots \\ x_p\to\infty}} \dfrac{A_0(X)_p^n}{B_0(X)_p^n} = d$，那么在 $n>r$，$n>t$ 且 $B_0(X)_p^n$ 恒定时，有

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots \\ x_p\to\infty}} \frac{A_0(X)_p^n + A_1(X)_p^{n-1} + \cdots + A_r(X)_p^{n-r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n-1} + \cdots + B_t(X)_p^{n-t}} = d$$

推论 3.2 设 $m>n$，$B_0(X)_p^n$ 恒定，那么

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots \\ x_p\to 0}} \frac{A_0(X)_p^m + A_1(X)_p^{m+1} + \cdots + A_r(X)_p^{m+r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n+1} + \cdots + B_t(X)_p^{n+t}} = 0$$

推论 3.3 设 $m<n$，$m>r$，$n>t$，$B_0(X)_p^n$ 恒定，那么

$$\lim_{\substack{x_1\to\infty\\ \cdots\cdots \\ x_p\to\infty}} \frac{A_0(X)_p^m + A_1(X)_p^{m-1} + \cdots + A_r(X)_p^{m-r}}{B_0(X)_p^n + B_1(X)_p^{n-1} + \cdots + B_t(X)_p^{n-t}} = 0$$

定理 4 设

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{A(X)_p^m}{B(X)_p^n}, & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 \neq 0; \\ 0, & x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0。\end{cases}$$

且 $B(X)_p^n$ 恒定，$m>n+1$，那么 $f(X)$ 在原点可微，并且 $df(0)=0$

证：1）$X=0$，因 $B(X)_p^n$ 恒定，由性质 6 知 x_1^n，x_2^n，…，x_p^n 的系数均不为 0，于是 $f(\Delta x_j)$ 有意义，故

$$f'_{x_j}(0) = \lim_{\Delta x_j\to 0} \frac{A(\Delta x_j)_p^m}{B(\Delta x_j)_p^n} \cdot \frac{1}{\Delta x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

2）$X\neq 0$，因 $f(X)$ 是连续可微函数。据性质3°

$$f'_{x_j}(X) = \frac{A_j(X)_p^{m-1} B(X)_p^n - B_j(X)_p^{n-1} A(X)_p^m}{[B(X)_p^n]^2}$$

$$= \frac{C_j(X)_p^{m+n-1}}{[B(X)_p^n]^2} \qquad (j = 1, 2, \cdots p)$$

3）因 $B(X)_p^n$ 恒定，据性质5° $[B(X)_p^n]^2$ 恒定，又 $m>n+1 \Longrightarrow m+n-1>2n$，故

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ \cdots\cdots \\ x_p\to 0}} f'_{x_j}(X) = \lim_{X\to} \frac{C_j(X)_p^{m+n-1}}{[B(X)_p^n]^2} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

即所有 $f'_{x_j}(X)$ 在原点处连续。因之 $f(X)$ 在原点处可微，并且 $df(0)=0$ 　　证完

推论　设