大学数学题解系列丛书

【XIANXING DAISHU XITIJI】

线性代数习题集

李健 袁昊 廖敏 编著

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

大学数学题解系列丛书

线性代数习题集

李健 袁昊 廖敏 编著

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题集 / 李健，袁昊，廖敏编著. —成都：西南交通大学出版社，2014.1
（大学数学题解系列丛书）
ISBN 978-7-5643-2871-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… ②袁… ③廖… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－习题集 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 022990 号

大学数学题解系列丛书

线性代数习题集

李健　袁昊　廖敏　编著

责任编辑	张宝华
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://press.swjtu.edu.cn
印刷	成都勤德印务有限公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	7.25
字数	181 千字
版次	2014 年 1 月第 1 版
印次	2014 年 1 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-2871-9
定价	15.00 元

考研数学简介

数1、数3、数农（314）主要内容为“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”，数2主要内容为“微积分”、“线性代数”，按专业方向不同进行数学科目的选考。考试试卷均为满分为150分，考试时间为180分钟。试卷内容所占比例：数1、数3、数农中微积分约为56％、线性代数约为22％、概率论与数理统计约为22％；题型所占比例：单项选择题8小题，每小题4分，共32分；填空题6小题，每小题4分，共24分；解答题（包括证明题）9小题，共94分。数2中微积分约为78%，线性代数约为22%；题型及所占比例与上相同。

“微积分”主要考试内容：

（1）函数、极限、连续；
（2）一元函数微分学（曲率等内容数3、数农不要求）；
（3）一元函数积分学（弧长、功、引力、压力、质心、形心等内容数3、数农不要求）；
（4）向量代数和空间解析几何（数3、数农不要求，了解少部分内容）；
（5）多元函数微分学（梯度、方向导数、切平面、二阶泰勒展开式等内容数3、数农不要求）；
（6）多元函数积分学（三重积分、曲面、曲线积分、转动惯量、引力、功及通量等内容数2、数3、数农不要求）；
（7）无穷级数（数2、数农不要求，数3要求部分）；
（8）常微分方程与差分方程（数1、数2不要求差分方程，数3要求差分方程，数农要求很少内容）。

“线性代数”主要考试内容：

（1）行列式；
（2）矩阵；
（3）线性方程组、向量（数3、数农不要求向量空间，过渡矩阵等）；
（4）矩阵的特征值和特征向量；
（5）二次型。

“概率论与数理统计”主要考试内容：

（1）随机事件和概率；
（2）随机变量及其分布；
（3）多维随机变量及其分布；
（4）随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理；
（5）数理统计的基本概念；
（6）参数估计（数2、数农要求部分内容）；
（7）假设检验（数2、数农要求部分内容）。

前　言

为了更好地达到公共数学教学要求，提高大学数学基础课的教学水平，特由高等数学教研室编写了一套数学习题集. 此套习题集具有针对性强和难度等级分明等特点，量体裁衣，在很大程度上提高了同学们学习大学数学的兴趣和成绩. 通过编写此书也进一步增强了教师的业务素质和教师之间的凝聚力.

此套习题集以研究生考试题型为导向，由易至难地引导学生学习，以方便教学管理、减少教学的随意性，并为实现分级数学教学、逐步建立考教分离打下了基础. 同时也方便学生完成个人作业，为学生参加研究生考试提供适应性的帮助.

此套习题集的编写情况：高等数学、微积分：李健、何基好、郭正林、肖启良；线性代数：袁昊、李健；概率论与数理统计：吴智、袁昊. 另外还要感谢内部试用版的编写老师：胡尧、肖贤春、黄敏、袁权龙、杨光惠、梁洁、刘轶中、卢大远、吴秀碧等.

此套习题集经过几年试用作了如下完善：对题目进行“A、B、C”分类，分别对应“基础”、“强化”、“提高”三个阶段：基础课学习阶段的同学只要求掌握“阶段练习 A”，喜欢数学的同学可以做一下“阶段练习 B”，有考研愿望的同学试一下“阶段练习 C”. 本次修订工作主要由李健、袁昊、廖敏、何基好、吴智、郭正林、肖启良等老师参与完成.

限于时间仓促，编者水平有限，本习题集中不妥之处在所难免，恳请老师和同学们批评指正！

编 著

2013 年 9 月

考研专业简介

根据工学、经济学、管理学、农林各学科专业对硕士研究生入学所应具备数学知识和能力的不同要求，硕士研究生入学统考数学试卷分为4种，其中针对工学门类的为数学1、数学2，针对经济学和管理学门类的为数学3，针对农林生科类的为数农（314）。招生专业须使用的试卷种类规定如下：

一、须使用数学1的招生专业

1. 工学门类中的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等20个一级学科中的所有的二级学科、专业。
2. 授工学学位的管理科学与工程一级学科。

二、须使用数学2的招生专业

学门类中的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、仪器科学与工程等5个一级学科中的所有的二级学科、专业。

三、须选用数学1或数学2的招生专业（由招生单位自定）

工学门类中的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、磁盘业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业选用数学1，对数学要求较低的选用数学2。

四、须使用数学3的招生专业

经济学门类中的各一级学科，管理学门类中的工商管理、农林经济管理一级学科，授管理学学位的管理科学与工程一级学科。

五、须使用数农的招生专业

农学、林学、动科、生命科学等一级和二级学科可以选考数农（314）。

以上所有理工类专业都考数学，试卷满分为150分，考试时间为180分钟。

目　录

第一章　行列式

第一节　二阶与三阶行列式

阶段练习题（A）

一、单项选择题

1. 二阶行列式$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$的值为（　　）.

（A）-1　　（B）1　　（C）$2\sin^2\alpha$　　（D）$2\cos^2\alpha$

2. 若行列式$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$，则$x=$（　　）.

（A）$-1, \pm\sqrt{2}$　　（B）$0, \pm\sqrt{2}$　　（C）$1, -2$　　（D）$2, \pm\sqrt{2}$

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$是关于$x$的一次多项式，则该多项式的一次项系数是_________.

三、解答题

1. 计算下列二阶、三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{vmatrix}$.

阶段练习题（B）

一、填空题

1. 当 x 取________时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

二、解答题

1. 计算下列二阶、三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

第二节　n 阶行列式

阶段练习题（A）

一、单项选择题

1. 5 阶行列式的展开式共有（　　）项.

（A）5^2　　（B）5!　　（C）10　　（D）15

2. 设 D 为 9 阶行列式，$\tau(k_1k_2\cdots k_9)$ 表示 $1,2,\cdots,9$ 排列的逆序数，则 $\tau(123456789)D$ 等于（　　）.

（A）-1　　（B）D　　（C）0　　（D）1

3. 设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$，其中 a_1,a_2,a_3 不全为零，那么 D 是（　　）行列式.

（A）对角形　　（B）上三角形　　（C）下三角形　　（D）以上都对

4. 设 $\tau(\ )$ 表示排列的逆序数，则 $\tau(314728965)+(-1)^{\tau(6427531)}=$（　　）.

（A）10　　（B）12　　（C）0　　（D）11

5. 分别计算下列 4 个 4 阶排列的逆序数，然后指出奇排列是（　　）.

（A）4312　　（B）4132　　（C）1342　　（D）2314

二、填空题

1. 已知 $1i25j4897$ 为偶排列，则 $i=$________；$j=$________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值为________.

3. 当 $i=$________，$k=$________时，$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中一个取负号的项.

4. 若 $(-1)^{\tau(4k1i5)+\tau(12345)}a_{41}a_{k2}a_{13}a_{i4}a_{55}$ 是 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项，则当 $k=$________，$i=$________时该项符号为正；当 $k=$________，$i=$________时该项符号为负.

三、解答题

1. 若 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为整数，则 D 必为整数. 该结论对不对？为什么？

2. 写出 4 个数码 1,2,3,4 的所有 4 阶排列.

3. 写出全体形如 5**2* 及 2*5*3 的 5 阶排列. 总结一下，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个？

4. 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

（1）314265;　　（2）314265789;　　（3）542391786;

（4）987654321;　　（5）246813579;　　（6）$n(n-1)\cdots 21$.

5. 在由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的下述 9 阶排列中，选择 i 与 j 使得

（1）$2147i95j8$ 为偶排列;　　（2）$1i25j4896$ 为奇排列;

（3）$412i5769j$ 为偶排列;　　（4）$i3142j786$ 为奇排列.

6. 在 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各项应取什么符号？为什么？

（1）$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　　（2）$a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$；

（3）$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$；　　（4）$a_{51}a_{13}a_{32}a_{44}a_{26}a_{65}$.

7. 写出 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项，并指出正负号.

8. 写出 4 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中所有取负号且包含 a_{23} 的项.

9. 按行列式定义计算下列行列式:

（1）$D_1 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；

（2）$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（4）$D_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

阶段练习题（B）

一、单项选择题

1. 排列 $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数为（　　）.

（A）n　　（B）0　　（C）$\dfrac{n(n-1)}{2}$　　（D）$\dfrac{n(n+1)}{2}$

二、填空题

1. 若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是__________.

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，则 x^4 项的系数为__________.

三、解答题

1. 问 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 为什么错？正确答案是什么？

2. 设在由 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 中，$a_1<a_2<\cdots<a_k$，$b_1<b_2<\cdots<b_{n-k}$，求排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 的逆序数.

3. 设 $c_1c_2\cdots c_kd_1d_2\cdots d_{n-k}$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 形成的一个 n 元排列，证明：

$$(-1)^{\tau(c_1c_2\cdots c_kd_1d_2\cdots d_{n-k})}=(-1)^{\tau(c_1c_2\cdots c_k)+\tau(d_1d_2\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{c_1+c_2+\cdots+c_k}\cdot(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

4. 证明：如果在 n 阶行列式中，第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行分别与第 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 列交叉位置的元素都是 0，并且 $k+l>n$，那么这个行列式的值等于 0.

第三节　行列式的性质

阶段练习题（A）

一、单项选择题

1. $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}=$（　　）.

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}=$__________.

2. $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ 的根为__________.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$ ______； $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ______； $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix} =$ ______.

三、解答题

1. 证明: $D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

2. 计算 $D = \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{vmatrix}$.

3. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，计算 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & -6a_{22} & 2a_{23} \\ a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{13}-5a_{12} & \frac{1}{2}a_{12} \\ 2a_{21} & 3a_{23}-5a_{22} & \frac{1}{2}a_{22} \\ 2a_{31} & 3a_{33}-5a_{32} & \frac{1}{2}a_{32} \end{vmatrix}$.

4. 计算 $(n>1)$：$D_1=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1}\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

5. 求多项式 $g(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x\end{vmatrix}(n>1)$ 的根.

6. 计算：（1）$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$；

（2）$D_2=\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$；

（3）$D_3=\begin{vmatrix}3&6&5&6&4\\2&5&4&5&3\\3&6&3&4&2\\2&5&4&6&5\\1&1&1&-1&-1\end{vmatrix}$.

阶段练习题（B）

一、单项选择题

1. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$均为4维列向量，若4阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|=a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=b$，那么4阶行列式$|2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=$（　　）.

（A）$2a-b$　　（B）$2b-a$　　（C）$-2a-2b$　　（D）$-2a+2b$

2. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$均为4维列向量，已知$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=5$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=-1$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（　　）.

（A）4　　（B）6　　（C）32　　（D）48

二、填空题

1. 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=$______.

2. 4阶行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=$______.

3. $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}=$______.

4. $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\-1&1&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}=$______.