21世纪高等学校规划教材

高等数学（下）
——基础教程

刘春凤 等 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材

高等数学（下）
——基础教程

刘春凤 纪楠 彭亚绵 编著

清华大学出版社

内容简介

本书遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，是为普通高校理工科各专业开设的“高等数学”课程编写的教材。教材分上、下两册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、空间解析几何、多元函数微积分(共6章)。下册内容包括不定积分、定积分、重积分、线面积分、无穷级数和常微分方程(共6章)。书末附有积分表、习题答案和参考文献等。

本书结构严谨、逻辑清晰，注重直观简约，内容由浅入深，通俗易懂，分层布局，梯次渐进，既宜于教师因材分层讲授，又便于读者循序渐进自学，也可作为报考工科研究生的参考书，并可供工程技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下)：基础教程/刘春凤等编著. —北京：清华大学出版社，2013
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-302-33838-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第213118号

责任编辑：魏江江　薛　阳
封面设计：常雪影
责任校对：焦丽丽
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者：北京市人民文学印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：22.25　　**字　　数**：540千字
版　　次：2013年6月第1版　　**印　　次**：2013年6月第1次印刷
印　　数：1～3800
定　　价：39.80元

产品编号：054691-01

本书编委会

前言

FOREWORD

数学不仅是一些知识，也是一种素质，即数学素质；数学不仅是一种工具，也是一种思维，即理性思维；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化。当今，人类进入信息时代，数学无声无息地走进人们的生活，引领科技的发展，把握社会的命脉，我们几乎所有的工作都与数学相关，追求科学的、可持续发展的工作目标，越来越多地需要数学的描述，需要使用数学工具进行定量分析，可以说信息时代本质上就是数学时代，信息技术本质上就是数字技术，使用数学的程度甚至成为衡量国家科学进步的主要标志。大学数学课程因其在培养大学生理性思维、计算能力，创新意识等方面具有不可替代的作用，而成为大学课程中最重要的公共必修课，因此学好数学既是学者进取之道，也是人生智慧之举。

随着我国从精英教育到大众化教育的转型，高等教育发生了一系列的变化，伴随着变化也产生了诸多前所未有的问题。几十年、甚至上百年一贯制的大学数学教育问题首当其冲受到影响。尽管大学数学教学内容和课程体系改革方兴未艾，面向重点大学的具有新思路且含有数学实验的新教材陆续出现，对数学教学改革起到了推动和引领作用。然而对于普通院校，尤其对独立学院，由于缺乏与本校人才培养目标高度适应的新教材，选用教材时多倾向与重点大学保持一致，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教得辛苦，学生学得艰难，有相当比例的学生“学不会，用不了”，教学效果事倍功半。

面对当前普通高校的大学数学教育，笔者颇受张景中院士提出的教育数学的观点的启发。学数学好比吃核桃，核桃仁美味而富有营养，但要完整地砸开吃到它却非易事，“数学教育要研究的是如何砸核桃吃核桃，而教育数学要研究改良核桃的品种，让核桃更美味更营养，更容易砸开吃净。”为此，我们组织多年从事高等数学教学的一线教师，遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，融入张景中院士“想的是教育，做的是数学”的思想，编写了高等数学系列教材。本套教材旨在让更多的学子在轻松学习高等数学知识的同时，掌握数学本质，培养数学素质，提高数学能力，感受数学魅力，自觉走进数学，自由享用数学。

高等数学系列教材包括《高等数学（上）——基础教程》、《高等数学（下）——基础教程》和《高等数学（上）——实训教程》、《高等数学（下）——实训教程》（以下分别简称《基础教程》和《实训教程》），本套教材有三个显著特点：

（1）调整结构，增加实训。新编《高等数学基础教程》上册包括微分学，空间解析几

何,下册包括积分学、无穷级数和常微分方程。《基础教程》作为课内“学数学”理论教学篇,《实训教程》用于课外“用数学”的实训教学篇。《实训教程》由五个板块组成:知识网络图、精品课堂、达标实训、拓展实训、应用实训和数学实验,它是《基础教程》的拓展,两个教程内容协调一致,配合使用可实现课上与课下,课内与课外相辅相成。

(2) 分层布局,梯次渐进。考虑到不同专业的学生对数学需求的差异,《基础教程》把传统的内容按照六个板块:内容初识、经典解析、概念反思、理论探究、方法纵横、应用欣赏进行了重新划分与整合。其中内容初识和经典解析为第一梯度,内容初识只限于介绍简单概念和基础知识,经典解析部分仅限于介绍最基础且经典的方法。这一梯度避开了抽象的概念和繁琐的计算,例如极限与连续的内容初识部分只描述极限概念而不精确刻画,避开“ε-N 语言”,经典解析极限方法仅介绍有理分式函数的极限,两个重要极限和无穷小代换法,力求使读者轻松入门。概念反思和理论探究为第二梯度,在读者对本章内容已有初步了解的基础上,进一步揭示概念的内涵,展开相关理论的推演和证明,强化学生对知识的深刻理解,培养学生的数学思维。方法纵横和应用欣赏为第三梯度,其中方法纵横部分将集中讲解本章难度较高和综合性较强的数学方法,例题的选择注意典型性、灵活性和可拓展性,有的选自全国数学竞赛试题,也有的选自考研真题。著名数学家和数学教育家项武义先生说:教数学,要教学生“运用之妙,存乎一心”,以不变应万变,不讲或少讲只能对付几个题目的“小巧”,要教给学生“大巧”,这个板块就是启发联想,夯实数学基本功,使学生通过引导探究渐入“无招胜有招”的境界,为学生继续深造奠定坚实的数学基础。应用欣赏旨在体现数学具有广泛应用性这一特点,但限于课程学时,高等数学的应用课堂难以细说,故在基础教程里仅举少许典型应用案例供读者欣赏,使读者学知所用。

(3) 融入实验,学以致用。长期以来,数学给人们的一些印象就是凭大脑、纸、笔进行推理、证明和计算,抽象的推理和繁琐的计算使一些学生对数学兴趣索然。计算机科技的迅速发展,优秀的数学软件为用数学方法解决复杂的实际问题提供了良好的平台,使数学教学如虎添翼,过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题,如今可以通过数学实验轻松解决,数学实验使数学计算变得轻松,数学形象变得直观,数学奥妙变得美丽,数学推理变得自然。引数学实验入大学数学教学是我们近十年的举措,本套教材嵌入的高等数学实验在实训教程中,这一部分的教与学教师可酌情安排。

本教材由刘春凤教授、纪楠、彭亚绵编著,崔玉环、杨爱民、李冬梅参编。教材融合了河北联合大学编写团队多年的教学经验,注重直观简约,对繁琐的理论推导进行了适度的约简,对数学的理论和概念,尽可能地通过几何直观,解释其抽象和深刻的内涵,内容由浅入深,梯次渐进,通俗易懂,既宜于教师因材分层讲授,也便于读者循序渐进自学。

本教材得以出版,对河北联合大学教材编委会的指导和支持和清华大学出版社的精心设计和悉心编辑表示衷心感谢。

由于本教材对高等数学内容调整幅度较大,前后呼应未必贴切,章节衔接未必自然,书中谬误之处难免,恳请读者批评指正。

编 者

2013 年盛夏

目录

CONTENTS

第7章

不定积分

众所周知，求函数的导数问题是微分学中的基本计算，但是，在科学技术领域中往往还会遇到与此相反的计算问题：已知一个函数的导数，求原函数。由此产生了不定积分，不定积分与求导互为逆运算。不定积分和定积分构成了一元函数的积分学，重积分、曲线积分、曲面积分构成了多元函数积分学。本章研究不定积分的概念、性质和计算方法，其他内容将在后续章节中介绍。

内容初识

7.1 不定积分的概念

7.1.1 原函数

问题 1 如果已知物体的运动方程为 $s=f(t)$，则此物体的速度是位移 s 对时间 t 的导数，反过来，如果已知物体运动的速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，求物体的运动方程 $s=f(t)$。

问题 2 已知曲线上每一点的切线斜率 $k=k(x)$，求该曲线方程 $y=f(x)$。

【注】 两个问题的共性：均为微分学中导数计算的反问题。

定义 7.1 已知定义在某一区间上的函数 $f(x)$，如果存在函数 $F(x)$，使得对于该区间内的任一点 x 都有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$是 $f(x)$在该区间上的一个原函数。

例如：在区间$(0,+\infty)$内，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，则在区间$(0,+\infty)$内，$\ln x$ 是$\dfrac{1}{x}$的一个原函数。显然 $\ln x+3$，$\ln x-4$，$\ln x+C$（C 为任意常数）也都是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的一个原函数。

由此可见，函数$\frac{1}{x}$存在无穷多个原函数。因此，对原函数的研究，必须要讨论三个问题：

(1) 一个函数在什么条件下存在原函数?

(2) 若一个函数存在原函数，一共有多少个?

(3) 若函数的原函数不唯一，那么任意两个原函数之间有什么关系?

定理 7.1(原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$在某区间内连续，那么 $f(x)$在该区间内必有原函数。

【注】 该定理表明连续函数一定有原函数。

事实上，如果 $F(x)$是 $f(x)$在该区间上的一个原函数，即有 $F'(x)=f(x)$，则 $[F(x)+C]'=f(x)$(其中 C 为任意常数)，所以 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$的原函数。因此，若函数 $f(x)$在某一区间原函数存在，则必有无穷多个原函数。

若 $F(x)$和 $G(x)$都是函数 $f(x)$的原函数，则有

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x),$$

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

由拉格朗日中值定理知，$G(x)-F(x)=C$(C 为常数)。所以 $G(x)=F(x)+C$。

也就是说：$f(x)$的所有原函数都可以表示成 $F(x)+C$ 的形式。

7.1.2 不定积分的定义

定义 7.2 如果函数 $F(x)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$的全体原函数 $F(x)+C$(C 为常数)叫做函数 $f(x)$在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

其中，符号“$\int$”称为**积分号**，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，C 称为**积分常数**，此时我们称 $f(x)$ 在区间 I 上可积。

按照不定积分的定义，本节开篇提出的问题就可以这样描述：

(1) 若已知物体运动的瞬时速度 $v(t)$，则物体的运动规律 $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t$；

(2) 若已知曲线 $f(x)$ 在每一点的切线斜率为 $f'(x)$，则此曲线为 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x$。

例 7.1 计算$\int \sin x\mathrm{d}x$。

【解】

因为 $(-\cos x)'=\sin x$， 所以 $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

例 7.2 计算$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

【解】

$$\text{因为}\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{所以}\quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

例 7.3 设曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $k=f(x)=2x$，求曲线的方程。

【解】 因为 $(x^2)'=2x$，所以根据不定积分的几何解释可知曲线的切线斜率为 $2x$ 的全部曲线是

$$y=\int 2x\mathrm{d}x = x^2+C, \quad \text{即} \quad y=x^2+C$$

因为 C 可取任意实数，所以 $y=x^2+C$ 就表达了无穷多条抛物线，所有这些抛物线构成一个曲线的集合，叫做**曲线族**，且族中任一条抛物线可由另一条抛物线沿 y 轴平移而得到。

一般地，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的**原函数族**，对于 C 每取一个值 C_0，就确定 $f(x)$ 一个原函数，在直角坐标系中就确定一条曲线 $y=F(x)+C_0$，这条曲线叫做 $f(x)$ 的一条积分曲线。所有这些积分曲线构成一个曲线族，称为 $f(x)$ 的**积分曲线族**。这就是**不定积分的几何意义**，如图 7.1 所示。

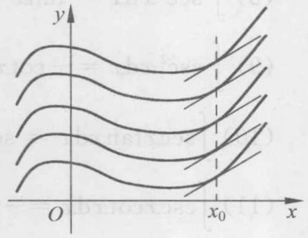

图 7.1

对不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，若 x 是时间变量，$f(x)$ 是直线运动的物体的速度函数，则 $f(x)$ 的原函数就是路程函数 $s(x)$，即 $\int f(x)\mathrm{d}x = s(x)+C$。这就是**不定积分的物理学意义**。

7.1.3 不定积分的性质

性质 7.1 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为非零常数）。

性质 7.2 $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$。

性质 7.3 求不定积分与求微分（导数）互为逆运算，即

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$，

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$。

【注】 证明上述性质，只要验证等式右端的导数等于左端的被积函数即可，论证留给读者。

7.1.4 不定积分基本公式

因为不定积分是求导的逆运算，因此，根据导数的计算公式，可得不定积分基本公式如下：

导数公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$($k$ 为常数) $\qquad (kx)' = k$

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C(\mu \neq -1) \qquad \left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

(4) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C \qquad (\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$

(5) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1) \qquad (a^{x})' = a^{x}\ln a$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (\sin x)' = \cos x$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad (\cos x)' = -\sin x$

(8) $\int \sec^{2}x\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad (\tan x)' = \sec^{2}x$

(9) $\int \csc^{2}x\mathrm{d}x = -\cot x + C \qquad (\cot x)' = -\csc^{2}x$

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C \qquad (\sec x)' = \sec x\tan x$

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C \qquad (\csc x)' = -\csc x\cot x$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(13) $\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$

【注】 不定积分基本公式是不定积分的基础,以后计算积分时可以直接引用,必须记牢。

下面我们仅利用不定积分的性质和基本积分公式计算不定积分。

例 7.4 计算 $\int(2\cos x + 2x^{2} - 3)\mathrm{d}x$。

【解】

$$
\begin{aligned}
\int(2\cos x + 2x^{2} - 3)\mathrm{d}x &= \int 2\cos x\mathrm{d}x + \int 2x^{2}\mathrm{d}x - \int 3\mathrm{d}x \\
&= 2\int \cos x\mathrm{d}x + 2\int x^{2}\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x \\
&= 2\sin x + \frac{2}{3}x^{3} - 3x + C
\end{aligned}
$$

【注】

(1) 分项积分后每个不定积分都含有任意常数,因为任意常数之和仍为任意常数,所以只写出一个 C 即可。

(2) 要检验积分结果是否正确,可把所得结果求导,如果其导数等于被积函数,则正确。

例 7.5　计算$\int\left(10^x+3\sin x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$。

【解】

$$\begin{aligned}\int\left(10^x+3\sin x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x&=\int 10^x\mathrm{d}x+3\int\sin x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=\frac{10^x}{\ln 10}-3\cos x+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot x^{-\frac{1}{2}+1}+C\\&=\frac{10^x}{\ln 10}-3\cos x+2\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

【注】　请读者记住此快捷公式$\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+C$。

例 7.6　计算$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x^2}}\mathrm{d}x$。

【解】

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x^2}}\mathrm{d}x&=\int x^{\frac{1}{10}}\mathrm{d}x-2\int x^{-\frac{1}{15}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{2}{5}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\frac{1}{10}+1}\cdot x^{\frac{1}{10}+1}-\frac{2}{-\frac{1}{15}+1}\cdot x^{-\frac{1}{15}+1}+\frac{1}{-\frac{2}{5}+1}\cdot x^{-\frac{2}{5}+1}+C\\&=\frac{10}{11}x^{\frac{11}{10}}-\frac{15}{7}x^{\frac{14}{15}}+\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}+C\end{aligned}$$

【注】　当被积函数是分式或根式表示的幂函数时，要把它化为 x^μ 形式，然后应用$\int x^\mu\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C(\mu\neq-1)$。

【联想】

(1) $\int\frac{1}{x^\beta}\mathrm{d}x=\int x^{-\beta}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{x^{\beta-1}}+C$,

(2) $\int x^{\frac{m}{n}}\mathrm{d}x=\frac{n}{m+n}\cdot x^{\frac{m+n}{n}}+C$,

(3) $\int\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{m}{n}}\mathrm{d}x=-\frac{n}{m-n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{m-n}{n}}}+C$。

【练习】　(1) $\int\frac{1}{x^5}\mathrm{d}x$，　(2) $\int\frac{1}{x^{104}}\mathrm{d}x$，　(3) $\int x^{\frac{9}{8}}\mathrm{d}x$，　(4) $\int\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$。

例 7.7　计算$\int\left(\sin x+\frac{2}{1+x^2}+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$。

【解】

$$\begin{aligned}\int\left(\sin x+\frac{2}{1+x^2}+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x&=\int\sin x\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=-\cos x+2\arctan x+\mathrm{e}^x+C\end{aligned}$$

例 7.8 计算 $\int 2^x e^x dx$。

【解】

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$$

【注】

(1) 在计算过程中要注意每一步的依据(即用了哪些公式);

(2) 在计算熟练后,做题的步骤可作适当精简;

(3) 不能把含积分变量 x 的任何函数从积分号内移出积分号外。

例 7.9 计算 $\int \frac{x^4+12}{x^2+1}dx$。

【解】

$$\int \frac{x^4+12}{x^2+1}dx = \int\left(x^2-1+\frac{13}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + 13\arctan x + C$$

例 7.10 计算 $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$。

【解】

$$\begin{aligned}\int \sec x(\sec x - \tan x)dx &= \int \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x dx \\ &= \tan x - \sec x + C\end{aligned}$$

【注】 利用不定积分的性质和基本积分公式,或者将被积函数做简单的代数、三角恒等变形,化为基本积分表中诸函数的线性组合(即各函数分别乘以常数再相加)求一些函数的不定积分的方法叫做直接积分法。

例 7.11 设曲线通过点(1,3),且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的平方的 3 倍,求此曲线的方程.

【解】 设所求的曲线方程为 $y=f(x)$,按题设,曲线上任一点(x,y)处的切线斜率为 $y'=f'(x)=3x^2$,即 $f(x)$是 $3x^2$的一个原函数。又

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C,$$

故必有某个常数 C,使 $f(x)=x^3+C$,即曲线方程为 $y=x^3+C$,因所求曲线通过点(1,3),故 $3=1+C$,得 $C=2$。

于是所求曲线方程为 $y=x^3+2$。

【练习】

(1) 在积分曲线族 $y=\int 5x^3 dx$ 中,求通过点(1,1)的曲线方程。

(2) 一质点作直线运动,已知其加速度为 $a=6t^2-\cos t+2$,若 $s(0)=2, v(0)=4$,试求:位移 s 与时间 t 的函数关系。

例 7.12 计算 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$。

【解】