高观点下的中学数学

GAOGUANDIANXIADEZHONGXUESHUXUE

主编　李三平

陕西师范大学出版总社有限公司

陕西师范大学优秀研究生教材资助项目

高观点下的中学数学

GAOGUANDIANXIADEZHONGXUESHUXUE

主编　李三平

陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号 JC13N0758

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的中学数学 / 李三平主编. —西安:陕西师范大学出版总社有限公司, 2013.7

ISBN 978-7-5613-7137-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①中学数学课-教学研究 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 139821 号

高观点下的中学数学

主　　编/ 李三平
责任编辑/ 叶向东 裴黎黎
责任校对/ 裴黎黎
封面设计/ 鼎新设计
出版发行/ 陕西师范大学出版总社有限公司
(西安市长安南路 199 号　邮编 710062)
网　　址/ http://www.snupg.com
经　　销/ 新华书店
印　　刷/ 陕西金德佳印务有限公司
开　　本/ 787mm×1092mm　1/16
印　　张/ 12.5
字　　数/ 250 千
版　　次/ 2013 年 7 月第 1 版
印　　次/ 2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号/ ISBN 978-7-5613-7137-4
定　　价/ 30.00 元

读者购书、书店添货如发现印刷装订问题,请与本社高教出版分社联系调换。
电话:(029)85303622(兼传真) 85307826

目录

Mu Lu

第一章

绪 论

在高等师范院校数学系，开设了门类众多的高等数学类课程，例如，数学分析、高等代数、几何学(空间解析几何、高等几何和微分几何)、近世代数、复变函数、实变函数、概率统计、拓扑学、常微分方程、偏微分方程、计算方法等等(为方便起见，本教材中称在大学学习过的所有数学类课程为“高等数学”). 这应该有几个方面的考虑，一方面是使将要走上中学数学教学岗位的毕业生具有一定的数学基础，能够承担中学数学教学、研究的任务以及继续学习和掌握现代数学知识，提高自身的数学修养，另一方面是使毕业生能利用在高师院校学到的高等数学类知识，指导其中学数学的教学和研究工作，也就是使他们能“居高等数学之高”去临“中学数学之下”. 那么，实际的情况又是如何呢?

据问卷调查和访谈得知，大多数在中学数学教学岗位上工作的高等师范院校毕业生的体会是：在自己的中学数学教学过程中，大学里所学习的高等数学类知识几乎没有很好地发挥作用；还有的甚至说：在中学任教多年，很少用到高等数学知识，把在大学学习过的高等类数学知识几乎都“还给”了大学老师；等等，只有少数人体会到，在中学数学教学中，虽然高等数学知识直接涉及到的并不多，但其原理、思想、观点和方法却时常在发挥着作用，特别是那些从事中学数学教学研究和从事初等数学研究的中学教师(这只是很少的一部分中学数学教师)认为，在他们的教学和科研工作中，高等数学的知识、原理、思想、观点和方法所发挥的作用是十分明显的.

造成上述情况的原因是多种多样的.

第一，由于受“应试教育”的影响，对数学教育的价值“实际需要，文化修养，智力筛选”中的前二者已经无暇顾及，只是将数学当做“筛子”用了. 由于对数学教育价值不能正确的理解，因而许多学生都将“取得好的数学成绩，博得家长和老师的欢喜”作为学习数学的重要目的. 我们常可见到的现象是，学生身陷数学的套题、技巧之中，奔命于作业、考试之间，教师更是疲于应付，只能将教学研究和科学研究放在极其次要的位置，这当然就更谈不上与所学习过的高等数学类知识建立联系了.

第二,在我国高等师范院校中,无论是中文、历史、地理,还是物理、化学、生物等各专业,所开设的专业课程,都是中学相应课程内容的加深、拓广,是在中学所学内容基础上的进一步加深,而数学系的课程设置则好像是个例外,除了微积分,大学数学系所开设的高等数学课程,与中学数学的研究对象、研究方法都存在着较大的不同,中学数学到大学数学,其知识几乎是直线式上升的,而非螺旋式上升.在高师院校数学系的大部分课程中,几乎看不到与中学数学的直接联系,学生很难获得用高等数学的高观点指导中学数学的真实体验.

第三,高等师范院校的教学也存在着一些不足.著名数学教育家,华东师范大学的张奠宙教授曾经指出:“我们在高师院校执教多年,深感居高未必能自然地临下.在大学课程中,只管讲学科知识本身,联系中学实际的任务往往视为累赘,忽略不讲,举个例子,讲实变函数论,大谈勒贝格测度、勒贝格积分,却不屑于谈谈测度与面积、体积之间的内在联系.对于中学教师来说,也许后者是至关重要的.”对此,我们也有同感.

如一个具体的例子,在大学《近世代数》中学习“欧氏环”这一内容,它可以看成是解释中学代数中“多项式因式分解”等有关问题的理论基础,但并不是每个学习过这一内容的人都能用它准确地解释如下几个与多项式因式分解有关的问题:①是不是每个多项式都能进行因式分解?②因式分解需要分解到什么程度?③因式分解的结果是否唯一?④多项式的因式分解与整数的素因数分解有无关系?难怪教育部原副部长王湛同志指出:师范教育的教学与基础教育改革存在着脱节现象.

我们知道,中学数学教材的叙述,较多地采用了描述性的方法,理论上的要求不可能十分严谨,内容的深度与广度都有一定的局限性.根据中学数学的教学目的和中学生的年龄特征,这样的处理方法应该说是合情合理的.但是,作为一名中学数学教师,仅仅具备新课程教材中所涉及的必修课内容的知识,那是远远不够的.即便是在现行中学教材中的数学知识范围内,有些问题如果不在高等数学的知识背景下来解释,仍将可能是含糊不清,疑问重重.

下面再通过几个具体例子来说明.

例 1 复数为什么不能比较大小?是否有序?

在高中数学教材中对这个问题的讲解是一笔带过,即“两个复数只能说明相等或不等,而不能比较大小”,为什么不能比较大小?

其实许多中学教师并不能准确解释其原因.另外,人们通常认为,只有有了大小的概念,才能排出顺序.然而,通过高等数学的学习,这种认识是应当改变的,“序”的概念应当有所扩展.事实上,在“字典序”的意义下,复数是“有序”的,当然,尽管有序,但两个复数之间仍不能比较大小(这些我们会在后面的章节中

详细叙述).

例 2 一元 n 次方程是否都存在公式解(或根号解)?

在初中数学中,大家就学习过一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根(对一元方程而言,“解”和“根”的意义是相同的)问题,其求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,大家一定都非常熟悉.对于一元三次方程 $x^3+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的求根公式,在高师院校数学系有关的课程中也有过讨论.如果是一个一般形式的一元三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$,我们可通过方程的变换 $x=z-\frac{a}{3}$ 转化为上述形式.而对于一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$,尽管讨论的不多,但是它也像一元二次、一元三次方程一样,存在公式解(或根号解).

一元三次、一元四次方程的公式解得到后,一元五次及五次以上方程的公式解以及解法就成了许多数学家关注的问题.为了求解一般的一元五次方程,众多著名数学家耗费了大量精力.直到 1830 年,年仅 19 岁的法国数学家伽罗华(Galois,1811—1832)在一篇《用根式解方程的可能性条件》的文章里,利用置换群的理论彻底阐明了一元多项式方程能否用代数方法求解(也就是方程存在公式解)的问题.他得到了如下重要的结论:一元五次及五次以上的多项式方程不能用根号求解.

这样一个看似并不太难的问题,它的解决所依据的伽罗华理论在现在看起来也并不是很容易.

下面是一个很常见的不等式的证明题.

例 3 已知 x,y,z 为实数,且 $x+y+z=1$,试证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

这个题目的证明方法有很多种,我们可以使用基本不等式、柯西不等式等结论来证明.

证法 1:(利用基本不等式)

因为

$$x^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}x,$$

$$y^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}y,$$

$$z^2+\frac{1}{9}\geqslant\frac{2}{3}z,$$

将以上三个式子左右两端分别相加,并利用已知条件,得

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

证法 2：（利用柯西不等式）

因为
$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2=1,$$
所以
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

在这里给出一个在前些年很流行，看似正确的证明方法，但实际上是不正确的证法. 请大家仔细分析一下这个证法的错误所在.

证明：设

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}-t, \\ y=\dfrac{1}{3}-2t,(t\in\mathbf{R},\text{为参数}) \\ z=\dfrac{1}{3}+3t, \end{cases} \qquad ①$$

则
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+14t^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

这个证法是错误的，可以下面的两种方式来解释.

第一，$x+y+z=1$②其变量的自由度是 2，而作了代换①后变量的自由度却变成了 1，实际上改变了原来的问题.

第二，②表示一个平面，而①表示一条直线，显然是犯了偷换命题的错误.

可以看出，如果不具备高等数学的知识，想要指出“错证”的错误所在都是不容易的.

例 4 如图 1-1，已知$\triangle ABC$中，D是BC边上的中点，G是AD上的任一点，连结BG并延长交AC于E，连CG并延长交AB于F，求证$FE/\!/BC$.

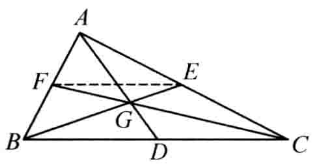

图 1-1

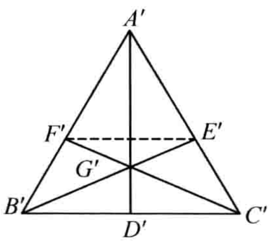

图 1-2

这个题目的证明并不难，可采用梅内劳斯定理或作辅助线的方法证明.

现在的问题是，将$\triangle ABC$看成正三角形$\triangle A'B'C'$，如图 1-2，如果能够证明$F'E'/\!/B'C'$，进而我们就说$FE/\!/BC$. 这样是否可以？

《普通高中数学课程标准（实验稿）》（以下简称《新课标》）指出，高中数学课程总目标是“使学生在九年义务教育数学课程的基础上，进一步提高作为未来

公民所必要的数学素养,以满足个人发展与社会进步的需要".

具体的目标如下:(1)获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴涵的数学思想和方法,以及它们在后续学习中的作用.通过不同形式的自主学习、探究活动,体验数学发现和创造的历程.(2)提高空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力.(3)提高数学地提出、分析和解决问题(包括简单的实际问题)的能力,数学表达和交流的能力,发展独立获得数学知识的能力.(4)发展数学应用意识和创新意识,力求对现实世界中蕴涵的一些数学模型进行思考和作出判断.(5)提高学习数学的兴趣,树立学好数学的信心,形成锲而不舍的钻研精神和科学态度.(6)具有一定的数学视野,逐步认识数学的科学价值、应用价值和人文价值,形成批判性的思维习惯,崇尚数学具有的理性精神,体会数学的美学意义,从而进一步树立辩证唯物主义和历史唯物主义世界观.

根据上述的课程目标,通过国际比较,以及剖析我国数学教育发展的历史与现状,从时代需要、国民素质、个性发展、全球意识等各方面综合思考,形成了实施和落实新课程标准的基本理念:(1)高中数学课程应具有基础性;(2)高中数学课程应具有多样性和选择性;(3)有利于学生形成积极主动、勇于探索的学习方式;(4)有利于提高学生的数学思维能力;(5)发展学生的数学应用意识;(6)正确处理"打好基础"与"力求创新";(7)返朴归真,注意适度的形式化;(8)体现数学的人文价值;(9)注重信息技术与数学课程的整合;(10)建立合理、科学的评价机制.

此次高中数学课程改革,在课程理念、课程目标、课程结构、课程内容和评价观念等方面都与原来的《数学教学大纲》(以下简称《教学大纲》)有诸多不同.二者相比,有以下几个特点:《新课标》对数学的本质有了新的认识,这种认识体现了一种动态的模式论的现代数学观;课程目标突出体现了以学生发展为中心的思想;课程内容在为课程目标服务的原则下增强了选择性;课程评价进一步丰富和完善了《教学大纲》多元化的理念.这些区别和不同都可从《新课标》的有关论述中看到.

已经出版并试行的新课程版教材,不仅在体系上作了重大调整,而且拓宽了知识的广度,这一点从新的高中数学课程教材框架可窥一斑.

新的高中数学课程分为必修课程和选修课程.

必修课程(每个学生都必须学习的数学内容)包括5个模块:

数学1:集合、函数概念和基本初等函数Ⅰ(指数函数、对数函数、幂函数).

数学2:立体几何初步、平面解析几何初步.

数学3:算法初步、统计、概率.

数学4:基本初等函数Ⅱ(三角函数)、平面向量、三角恒等变换.

数学 5:解三角形、数列、不等式.

选修课程是学生可以根据自己的兴趣和对未来发展的愿望进行选择的教学内容.选修课程由系列 1、系列 2、系列 3、系列 4 组成.

系列 1:由两个模块组成.

选修 1—1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用.

选修 1—2:统计案例、推理与证明、数系的扩充及复数的引入、框图.

系列 2:由三个模块组成.

选修 2—1:常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量与立体几何.

选修 2—2:导数及其应用、推理与证明、数系的扩充与复数的引入.

选修 2—3:计数原理、统计案例、概率.

系列 3:由六个专题组成.

选修 3—1:数学史选讲.

选修 3—2:信息安全与密码.

选修 3—3:球面上的几何.

选修 3—4:对称与群.

选修 3—5:欧拉公式与闭曲面分类.

选修 3—6:三等分角与数域扩充.

系列 4:由十个专题组成.

选修 4—1:几何证明选讲.

选修 4—2:矩阵与变换.

选修 4—3:数列与差分.

选修 4—4:坐标系与参数方程.

选修 4—5:不等式选讲.

选修 4—6:初等数论初步.

选修 4—7:优选法与试验设计初步.

选修 4—8:统筹法与图论初步.

选修 4—9:风险与决策.

选修 4—10:开关电路与布尔代数.

从《新课标》给出的课程框架可以看出,该课程框架与原有的《教学大纲》的要求有很大的不同,必修课程与选修课程都进行了不同程度的调整,特别是选修课程中涉及了一些数学的前沿性课题,尽管要求是较初步的,但其中有些内容在大学数学课程中也并未涉及到.

我们认为,这一方面是对高师院校数学系的课程设置提出了新的和更高的要求,即在注重师范性的前提下,要体现课程基础性与先进性的统一(对那些不能舍弃的经典数学内容尽可能地用现代数学的观点与语言来统帅;在教材中尽

可能编入已经构成相应学科基础的现代数学内容，至少应进行通俗介绍)，要体现均衡性与选择性的统一(使高师院校数学系的基础课和选修课保持一种恰当、合理的比重，并适应学生个性发展的要求)，还要体现发展性(着眼于学生的未来发展，培养终身学习的愿望和能力). 另一方面，要求高等师范院校数学系的学生注重自身思想素质、文化素质、专业素质与获取新知识能力的培养，以大学学到的数学知识为基础，不断接受和学习新的数学知识. 只有这样，才能使高等师范院校数学系的毕业生成为适应中学数学课程教学的合格师资，成为新课程改革的中坚力量.

编写本书的主要目的，就是想要解决如何在高观点的指导下，加强高等数学与中学数学的联系. 具体地有以下几个方面：一是将高等数学的思想、观点和方法渗透到中学数学教学中去；二是揭示中学数学内容中某些不容易解释和处理的问题的高等数学背景；三是通过具体材料或实例展示高等数学对中学数学的指导意义.

思考题

1. 在你的学习或教学经历中，是否还遇到过一些在初等(中学)数学范围内不能准确解释的初等数学问题？请举例说明.
2. 用初等数学和数学分析两种方法证明下题：
   若二次函数 $y=x^2+px+q$ 有一点 $M(x_0,y_0)$ 在 x 轴下方，则函数图象必与 x 轴交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)给出一个严格的证明；

(2)证明 x_0 必在 x_1 与 x_2 之间.

3. 利用行列式计算下题：
   $D=\sin(\alpha_1+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_3+\alpha_3)+\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)+\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_3)-\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_1)-\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)$.
4. 分析以下题目的解法：
   若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$，则 $\tan\alpha=($ $)$.
   在原式两端求导数可得，$-\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，两边同除以 $\cos\alpha$，可得 $\tan\alpha=2$.
   若将题目换成："$\cos\alpha+2\sin\alpha=-2$，则 $\tan\alpha=($ $)$"，它和上述题目的结果显然不同. 可是我们若使用了同样的方法，得到的结果仍然是 $\tan\alpha=2$，这明显是不对的，请你分析一下问题出在什么地方呢？

第二章

集合论观点下的中学数学

§1 朴素集合论与公理集合论

1.1 朴素集合论

通常,人们都把由德国数学家康托尔(G·Cantor,1845—1918)在19世纪70年代所创立的集合论称为朴素集合论.其实,关于集合的概念直到无限集合概念的引入,可追溯到欧几里得(Euclid,约公元前330—275)时代,只是在康托尔之前,对于集合(特别是无限集)的认识和研究,一直处于零碎不全的认识的初级阶段.到了19世纪,随着变量数学的迅速发展,当时的数学分析为了要弄清无穷小量与无穷级数的本质而迫切要求奠定微积分的理论基础.实际上,抽象代数已经在研究是无限集的群、环、域等特殊结构;几何学的不断发展已在力图突破图形的直观,走向了开辟点集拓扑学的新领域.这样一来,就急切地需要建立能统帅各个数学分支的理论基础.正是在这样的背景下,康托尔系统地总结了长期以来的数学的认识与实践,缔造和创立了一门崭新的数学学科——集合论.

将康托尔所创立的集合论,称之为朴素集合论,是因为在他的集合论体系中没有明确原始概念,也没有罗列一系列不证自明的规定.

康托尔曾对集合的概念作过如下的描述:“把一些明确的(或确定的)、彼此有区别的、具体的或想象中的抽象的东西作为一个整体,便叫做集合”.但康托尔的描述并不能作为集合概念的定义,因为诸如“整体、总体、总和、集合”等等都是等价说法.不懂得什么叫集合,也就说不清楚什么是整体.还有如下的说法:“集合就是具有某种共同属性的事物的全体”,以及现行中学数学教材中“一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集”,同样都不能作为集合这个概念的严格定义,只能作为一种“描述性”的说法.例如,a,b,c,d都是英文字母,但d却不是集合$\{a,b,c\}$的元素;集合$\{(1,2),H\}$中的两个元素——有序数对$(1,2)$和氢原子H,我们很难说明它们有什么共同的属性,但却都是集

合$\{(1,2),H\}$的元素. 另外,对于上述的描述性说法,也应该有一些限制,否则便会使我们陷于自相矛盾的境地. 例如,"由一切集合构成的集合 M"就是一句自相矛盾的说法. 因为既然是"一切集合",那么 M 应包含其中,但 M 却又是和"一切集合"都不相同的新集合,道理上是说不通的.

事实上,对任何一个概念下定义,必须借助于比它更为基本的概念. 因此,在数学发展的各个历史阶段,总有一些概念只能通过"举例、譬如或说明"来对它进行描述. 集合就是这样一个基本概念,一切想要对它做出严谨的、合乎数学要求的定义的尝试都没有成功. 这使得近代的公理集合论研究者们,也都放弃了对集合下定义的做法,把它作为一个不加定义的基本概念(原始概念),正如在几何中以"点、线、面、体"作为原始概念那样.

尽管对集合连严格的定义都没有,而且在康托尔创立集合论不久还出现了集合悖论,但其思想、方法仍被数学家广为接受,而且还用它作为构筑整个数学大厦的基础. 朱梧槚先生曾经这样描述了集合论为什么是现代数学的基础的问题:首先近代实变函数论的发展,乃是以集合论的建立作为其前提的,没有集合论,显然不会有近代的测度论,不会有描述性的实变函数论. 在近代数学的发展中,抽象空间理论的研究,具有极重要的地位,在这里,几何的概念与分析的方法融合在了一起. 但各种抽象空间都无非是具有各种特殊结构的无限集,它们不仅以集合的概念作为其基础,也从集合论中吸取了一些研究方法. 又如近世代数主要是探讨具有某些结合规律的元素系统的构造,在这里集合的概念当然也是基本的,而集合论中的思想方法也同样渗透进代数学的领域. 当然,在现行的中学数学教材及大学数学教材(除数学系的数学基础类课程外)中所讲的集合论知识,也正是康托尔的集合论.

康托尔在创立朴素集合论时,所依据的基本原则或主要思想方法是概括原则、外延原则、一一对应原则、延伸原则、穷竭原则和对角线方法. 其中概括原则与外延原则是用来构造集合并确定集合与集合的相等,是康托尔建立集合论的两个重要的思想方法.

概括原则 任给一个性质 P,我们就能把所有满足所给性质 P 的对象,也仅仅由这些具有性质 P 的对象汇集在一起而构成一个集合. 用符号可表示为

$$G=\{g\mid P(g)\}.$$

其中,g 表示 G 的任一元素,$P(g)$表示元素 g 具有性质 P.

例 1 由方程 $x^2-1=0$ 所有的解组成的集合,可以表示为

$$\{x\mid x^2-1=0\}.$$

概括原则的另一表达是

$$\forall g(g\in G\leftrightarrow P(g)).$$

其中，$\forall g$ 表示"对每一个 g"，而 $g\in G\rightarrow P(g)$ 表示"G 的元素具有性质 P"，而 $g\in G\leftarrow P(g)$ 表示"具有性质 P 的对象为 G 的元素".

外延原则 集合由它所含的元素唯一确定. 两个集合，当且仅当它们的元素完全相同时，称它们是相等的. 用符号可表示为

$$A=B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B).$$

有了上述两个原则，再通过$\subset$、$\supset$、$=$、$\cup$、$\cap$等关系和运算，就能用符号来形式地表达许多数学公式和内容了.

例 2 设 U 为实数集，已知 $A=\{x|-5<x<5\}$，$B=\{x|0\leqslant x<7\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(C_UA)\cap(C_UB)$，$(C_UA)\cup(C_UB)$，$C_U(A\cap B)$，$A\cup(C_UB)$.

解：

$$A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\},$$
$$A\cup B=\{x|-5<x<7\},$$
$$(C_UA)\cap(C_UB)=\{x|x\leqslant-5\text{ 或 }x\geqslant7\},$$
$$(C_UA)\cup(C_UB)=\{x|x<0\text{ 或 }x\geqslant5\},$$
$$C_U(A\cap B)=\{x|x<0\text{ 或 }x\geqslant5\},$$
$$A\cup(C_UB)=\{x|x<5\text{ 或 }x\geqslant7\}.$$

例 3 由集合 M 的一切子集组成的集合叫做 M 的幂集，记为 $P(M)$，即 $P(M)=\{A|A\subset M\}$.

由归纳可得，若集合 M 有 n 个元素，则其幂集 $P(M)$ 有 2^n 个元素. 可证明如下：

所含不同元的个数为 0 的相异子集有 C_n^0 个；

所含不同元的个数为 1 的相异子集有 C_n^1 个；

所含不同元的个数为 2 的相异子集有 C_n^2 个；

……………………………………………

一般的，所含不同元的个数为 k 的相异子集有 C_n^k 个，$(0\leqslant k\leqslant n)$，上述子集都互不相同，所以 M 的所有相异子集的个数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n(\text{个}).$$

例 4 将标号为 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中. 若每个信封放 2 张，其中标号 1，2 的卡片放入同一信封，则不同的放法共有(　　).

A. 12 种　　B. 18 种　　C. 36 种　　D. 54 种

解析：这道题目可以使用一般的求排列组合的方法来计算. 这里，我们使用化归与转化的思想，将投信问题转化为集合的一一对应关系问题，然后求解.

如图 2-1，设 6 张卡片两两组成一整体元素构成集合 A，三份信封为元素构成集合 B. 根据题意，集合 A 与集合 B 的元素是一一对应关系，所以可形成 3！种不同的对应关系，而

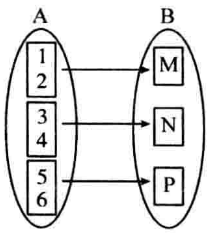

图 2-1

集合 A 中 1,2 在一起的构成的不同集合有{(1,2),(3,4),(5,6)},{(1,2),(3,5),(4,6)}{(1,2),(3,6),(4,5)},共有 3 种情形,所以不同的方法共有 $3!\times 3=18$ 种.

1.2 公理集合论

在数学发展的历史上,曾经出现过三次大的数学危机.

第一次数学危机产生于公元前 5 世纪,毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前 580—约前 500)学派的门徒、希腊人希伯苏斯(Hippasus,公元前 500 年左右)利用辗转丈量检验法,发现并证明了“存在两条不可公度的线段”(即正五边形的边长和其对角线长是不可公度的),它直接否定了毕达哥拉斯学派的著名论断:“任何两条线段都是可公度的”(即任何两条线段,它们的长度能表示成两个整数之比),从而导致了数学史上的第一次危机.过了近半个世纪,希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus,公元前 408－355)发现了与实数理论密切相关的逼近法,才使得数学渡过了这次危机.

数学史上把 18 世纪微积分诞生以来,在数学界出现的混乱局面称为数学史上的第二次危机.在 17 世纪和 18 世纪,由于微积分理论的产生及其在各个领域的广泛应用,使得微积分理论得到了飞速的发展.然而,当时整个的微积分理论却是建立在后来被证明是包含了逻辑矛盾的“无穷小”概念上,这样,出现危机就在所难免.

无穷小分析的主要特点在于“无穷小量”的自由应用,正因为如此,微积分在创建之初遇到了难以摆脱的困境.在这里,我们以“求一物体自由落体运动的瞬时速度”为例来说明.

为了求自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$,在 $t=t_0$ 时的瞬时速度,首先要计算时间间隔 Δt 内的平均速度:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t,$$

然后,令 $\Delta t=0$,可得在 $t=t_0$ 时的瞬时速度 gt_0,但当 $\Delta t=0$ 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0}{0}$,这是一个没有意义的式子;若 $\Delta t\neq 0$,则$\frac{\Delta s}{\Delta t}$中的 Δt 不论多么小,平均速度无论如何也不等于瞬时速度.

这就是说 Δt 在同一个问题中,要同时担任两个不同的(实际上是互相矛盾)角色,既要 $\Delta t=0$,又要 $\Delta t\neq 0$,这在数学中是不能允许的,因为它实际上也违反了逻辑学中的同一律.

为了摆脱困境，数学家们对微积分的基础展开了深入的研究，直到最后消除了数学史上的第二次危机. 在这个过程中，做出巨大贡献的是法国数学家柯西(Cauchy，1789—1875)，他发展和建立了极限理论. 戴德金(Dedekind，1831—1916)又在实数理论的基础上，证明了极限理论的基本定理，康托尔与魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1879)也都加入了为微积分理论寻找牢固基础的工作，提出了取代无穷小方法的"$\varepsilon-\delta$"方法.

一般认为，由于严格的实数理论和极限理论的建立，第一次、第二次数学危机已经得到解决. 在19世纪末，数学分析实现了严密化，并把集合论作为数学的统一基础时，当时的数学家都喜气洋洋，非常乐观. 1900年，在巴黎召开的第二届国际数学家大会上，法国大数学家庞开莱(Poincare，1845—1912)甚至宣称："数学的严格性，看来今天才可说是实现了". 然而，这种乐观持续的时间并不长，时隔不到两年，就出现了震惊西方哲学界、逻辑学界和数学界的罗素(Russell，1872—1970)悖论(Paradox).

罗素悖论 记 $M=\{x|x\notin x\}$，此时，若 $M\in M$，则由 M 的定义 $M\notin M$；若 $M\notin M$，则符合构成 M 中元素的条件得 $M\in M$.

为了帮助人们更容易地理解，罗素在1919年把它改写为"理发师悖论"：假定把李家村所有有刮胡子习惯的人分为两类，一类是自己给自己刮胡子的，另一类则是自己不给自己刮胡子的. 该村一个有刮胡子习惯的理发师声称："给而且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子". 现在要问这个理发师属于哪一类人？如果说他是属于自己给刮胡子的一类，则按他自己的约定，他不应该给自己刮胡子，因此是一个自己不给自己刮胡子的人；如果说他是属于自己不给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他必须给他自己刮胡子，因此他又是一个自己给自己刮胡子的人了. 于是这个理发师究竟属于哪一类呢？不管是哪种说法，都将使人陷入了逻辑两难的困境.

其实，在罗素悖论出现之前的1899年，康托尔就发现了所谓的康托尔悖论，只是在当时并未引起人们的足够重视.

康托尔悖论 设 M 是由一切集合构成的集合，则它的幂集(即由 M 的所有子集作为元素构成的集合) $P(M)$ 是 M 的子集，即 $P(M)$ 和 M 的一个子集一一对应.

但是，由实变函数中的康托尔定理知道，任何非空集合 M 的基数 $\overline{M}$ 小于其幂集 $P(M)$ 的基数 $\overline{P(M)}$，$P(M)$ 不可能和 M 之间建立一一对应关系，更不可能和 M 的子集建立一一对应关系，这就自相矛盾了.

集合悖论的出现，动摇了整个数学的基础，使得人们怀疑我们正在进行的数学推理是否可靠，从而也引发了数学史上的第三次数学危机. 20世纪最伟大