

学教师
读教育丛书

小学数学 教学心理 初探

SHANGHAI
JIAOYU CHUBANSHE
上海教育出版社



小学教师继续教育丛书

小学数学教学心理初探

黄建弘 编写

上海教育出版社

(沪)新登字107号

小学教师继续教育丛书

小学数学教学心理初探

黄建弘 编写

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 129,000

1995 年 1 月第 1 版 1995 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—4,150

ISBN 7-5320-4147-6/G·4072

定价: 4.20 元

出版说明

这套《小学教师继续教育丛书》由上海市教育局师范教育处组织编写，供小学教师职务培训使用，教师职务培训是根据教师的专业技术职务的任职要求，以提高教师政治思想、职业道德素质、教育教学能力、教育科研能力为主要目标而进行的培训。它包括教师修养、专业知识与技能、教育理论、教育教学实践研究、教育科学研究五个方面的内容。这套丛书的编写力求紧密结合小学教育实际，能帮助教师适应课程、教材改革的要求。我们要求职务培训应具有针对性、适用性、实践性、科学性和先进性，为了体现这些要求，各册教材在编写的过程中，都先编写了讲义，组织了两遍以上的试教，并在试教前后进行了初期、中期、终结三个阶段的论证，反复听取了学员和专家的意见，然后正式编写。

由于编写这类丛书是全新的工作，不当之处在所难免，希望广大读者和专家给予批评、指正。

上海市教育局师范教育处

1994年7月

目 录

| | |
|----------------------------|-----|
| 序言 | 1 |
| 第一章 数学的认知发展阶段理论 | 10 |
| 第一节 认知结构是如何发展的 | 11 |
| 第二节 数学学科的发生认识论 | 19 |
| 第三节 数学的认知发展阶段 | 24 |
| 第二章 数学认知能力的发展 | 54 |
| 第一节 布鲁纳对皮亚杰理论的推进与修正 | 55 |
| 第二节 布鲁纳的认知发展说——表象模式理论 | 58 |
| 第三节 促进数学认知能力发展的教学原则与定 理 | 60 |
| 第三章 数学学习的过程 | 70 |
| 第一节 数学学习过程中的梯阶 | 70 |
| 第二节 抽象和概括 | 85 |
| 第三节 迪尼斯的学习模型和传统数学教学 | 88 |
| 第四节 迪尼斯理论在课堂教学上的应用 | 89 |
| 第四章 数学学习的阶段和类型 | 94 |
| 第一节 数学学习的直接对象 | 94 |
| 第二节 数学学习的各个顺序阶段 | 97 |
| 第三节 数学学习的层次类型 | 99 |
| 第五章 数学学习中创造力的培养 | 110 |
| 第一节 智力三维结构模式理论 | 110 |

| | | |
|-----|-----------------------------------|-----|
| 第二节 | 小学数学教学中创造能力的培养····· | 116 |
| 第六章 | 数学的接受学习与发现学习····· | 129 |
| 第一节 | 接受学习与发现学习、有意义的学习和死 记硬背的学习····· | 131 |
| 第二节 | 有意义的接受学习····· | 134 |
| 第三节 | 有意义的发现学习····· | 138 |
| 第七章 | 数学的概念学习····· | 145 |
| 第一节 | 数学的概念学习····· | 145 |
| 第二节 | 数学概念学习的几个专题····· | 152 |
| 第八章 | 数学的问题解决学习····· | 162 |
| 第一节 | 通过改变结构来解决问题····· | 164 |
| 第二节 | 通过发现教学模式来解决问题····· | 172 |

序 言

一、数学教学心理学的由来与发展

数学教学心理学是研究数学教学过程中的心理活动和规律的一门科学,它着重探索学生掌握数学概念、形成运算技能和发展数学能力的基本规律,为优化数学教学、提高学生学习数学的效果提供心理学理论基础。这门学科的研究是从19世纪末开始的,首见于杜威和麦克莱伦于1895年合著的《数之心理及其在算学教授法上之应用》。本世纪20年代以后,研究日趋广泛和系统。其内容主要有:数、形(包括自然数、代数、几何等)概念的掌握及其发展特征;学生运算技能和解题技能形成的心理特点,例如,式题和应用题的解题过程,应用题的文字叙述向数学语言的转译;学生对数学材料的抽象概括能力、选择运算能力和运算推理能力的发展规律,以及不同年级的发展特点;学生有效掌握数学法则、定理和公式的内外条件;数学教学与学生心理发展的关系;数学教学中的个别差异和因材施教;数学的测评等。

数学教师和心理学者通过上述几方面的研究,探讨学生在学习过程中的思维结构和规律,以达到使学生牢固掌握知识,发展逻辑推理能力、观察想象能力以及运算解题等能力的目的。学生学习数学的过程涉及许多心理学问题,如感性形象对抽象的数学知识的作用问题;掌握概念、法则中适当利用变式区别非本质特征、突出本质特征的问题;通过比较,认识有关数学概念的联系和区别,形成概念系统的问题;数学

知识先学习与后学习的迁移与干扰问题；自觉应用的问题，以及运算的正确、迅速、灵活和对法则公式的意识清晰程度及随后的自动化问题等等。

此外，还有在数学教学中的一些行之有效的具有心理意义的方法，如运用词对直观图象的调节作用；充分发挥表象作用；对比相似材料，培养分化能力，形成可逆联想；充分利用图形结合；引导学生主动探索、概括规律、运用知识；培养学生对数学的兴趣和创造性思想等等。

总之，数学教学心理学在探索与研究之中。

二、本课程的主要任务

数学教学心理研究在本世纪 20 年代以后日趋广泛和系统，不同的探索与研究在发展中相互纠正、补充。由于数学本身的特点，不少心理学家都研究了数学教学中智力发展的过程，探讨了学习活动的特性，结果就出现了有关学习活动的理论。而正是这些理论，揭示了具有重要意义的数学学习过程的知识，使数学的高效学习有了可能并取得了成果。

目前，心理学家、学习理论家和教育工作者对于人们的学习活动，以及对于人们如何学习才能有成效等问题仍然有着不一致的看法，但在许多领域中他们的看法还是一致的。不应当把不同的学习理论看成是对抗性的。在学习活动和智力发展过程中，存在着许多变化因素，我们可以把每一个理论看作是整理和研究这些因素的方法。

过去许多数学教师和师资训练机构忽视了学习理论的应用，而把教学方法集中于对学科知识的研究。目前关于学习的理论有了最新成果，人们对智力发展过程也有了更为深入的理解，课堂教学理论也有了最新的应用。

由于众所周知的原因，我国对小学数学教学心理的研究还处在引进、验证阶段。不少国内的学者翻译、编写了一些教学心理的书籍，但深入小学数学学科的不多。有的学者到小学数学教学第一线作了一些实验调查，但这是按照某一理论体系做的重复实验，并没有提出自己的新理论。虽然国际上已有不少关于小学数学教学心理的理论，但目前中等师范教育中却还没有开设有关小学数学教学心理学的课程。再说国外那些理论是在外国儿童身上通过实验做出的。儿童认识、学习数学有着普遍的心理规律，但毕竟也会因国家、社会生活环境的不同而有着差异。例如，皮亚杰的认知发展阶段理论中的某些实验，在发达国家与不发达国家、在知识层次高的家庭与知识层次低的家庭，实验的结果就有不少差异。所以我觉得，目前我们对小学数学教师职务培训所能切切实实做的，只能是比较全面地、同时又是简单地介绍国际上大家已公认的、对小学数学教学有效的数学教学心理理论的基础知识。让广大小学教师学了以后掌握一些数学教学心理的基本原理、原则和实验方法，然后回到数学教学实践中去，在第一线上摸索、比较，以形成我们自己的数学教学心理学。由于数学教学心理学的对象是活生生的儿童，只有花上十年、八年才会出现真正属于中国的小学数学教学心理学。

针对我国小学数学教学心理研究的现状和我国小学数学教师职前教育和职后培训的现状，我们设立《小学数学教学心理初探》作为职后培训课程之一。本课程将结合世界小学数学教学改革的实践，以简洁、自然的线条来介绍迄今为止已显示了对小学数学教学有特别意义的关于智力发展特征的几个主要理论和学习过程的理论，并说明每一个理论在数学教学实践中的应用。

三、本课程的内容安排

数学教学的变迁表明，仅仅是学习内容的更替并不能够保证较好的数学教学，但通过对发展心理和学习心理的研究而获得的、具有重要意义、关于数学学习过程的知识，却使数学的高效学习有了可能。如天赋问题、成熟过程的理论、学习理论、学习模型、动机问题、转换问题、抽象问题等等都属此列，它们使最佳学习有了可能。出发点是关于学习心理准备性问题的讨论。“学习准备”的含义是：“……一个人能够在他发展过程中的某一确定的时刻中掌握一个技巧或一个知识”。下列问题就是属于学习准备问题的范围：一个儿童在什么年龄阶段能够学习读和写？什么时候能够学习乘法口诀？多大的时候可以引入笔算乘除法？

到目前为止，世界上对于学习准备问题有三种主要的见解：

1. 学习准备只取决于儿童身体或智力成熟，教师必须知道某一个确定的学习题材能被学生正确地接纳的年龄阶段。（皮亚杰）

2. 学习准备取决于交往方式（动作、图、符号），教师应该知道，在哪一种交往方式中能够提供已选定的对象。（布鲁纳）

3. 学习准备唯一的是向前学习的问题，如果缺了一个或几个钻研新对象所必不可少的事实的话，那么学习成果就不会出现，所以教师必须就某一预定的知识给学生一个精确的对象分析。（加涅）

本书从这里出发，先介绍皮亚杰关于“数学认知发展阶段的理论”。皮亚杰确定和研究了人类从诞生到成年在智力成长过程中，数学的不同认知发展阶段。皮亚杰理论对数学教学

的重大意义在于发现了“儿童的智力发展展示了一条与数学结构建造相平行的直线”。任何理论都在不断地发展与修正，本书在介绍皮亚杰有关数学认知的理论时，力求将皮亚杰学派的最新解释展示给读者。

布鲁纳修正、发展了皮亚杰的有关理论，提出了关于“数学认知能力发展”的理论。布鲁纳创立了新的假设，由于说过了头，也遭受过不少批评。然而他将教师从被动等待中解放了出来，他提出：发展心理学的知识要使得教育更富有成效，儿童逻辑运算的发展也不仅仅是一个成熟和自发活动及学习经验的问题。教师的作用不仅仅是皮亚杰观点中揭示的在自发的过程中形成的运算和概念，还必须引导孩子形成还未被孩子们信赖的新概念和运算。特别是伴随新假设而出台的认知发展新理论——表象模式理论，在数学教学中乃至其他学科教学中都有着十分重大的意义。这个理论可以直接应用于数学课堂教学，对于教学方法的改进、教学质量的提高起了很大的作用，为了使学员学得生动，我们为此专门配备了运用表象模式理论的课堂教学录像。在三轮试教实验中，很多学员的结业论文都以此为专题，原因是这个理论容易应用到数学教学实际中去，对小学数学教师来说比较亲切。

迪尼斯是数学家转而去研究数学教学心理的，本书在第三章中将介绍他的数学学习过程理论。迪尼斯在西方数学教学中，由于他的“数学学习过程理论”而享有盛名，然而国内很少介绍。1989年我在慕尼黑大学数学教学研究所进修时，在弗里奇教授和金斯基博士的指点下收集了有关他的理论的材料。他通过深入教学第一线和大量教学实验，提出了“数学学习过程理论”。该理论被数学教育界评之为：“对数学教育来说，在教学论的形成和学习心理的采纳、要求上首推数学家

迪尼斯。”他提出：学习理论应该位于心理知识和对数学独特结构调查的协调之中。因此他的理论特别强调结构，他的闻名世界的结构性材料，也就是以他的名字命名的“迪尼斯块”，在西方发达国家小学中是家喻户晓的。他的数学学习的4个原则和教学过程的6个阶段对数学教师来说既感亲切又为之一新，原因是教师们或多或少地、无意识地使用过它们，只是没有上升到理论、不系统而已。此外是利用同构的概念来设计数学概念的游戏，使儿童在较低的年龄能学习高年级的数学概念，实令人赞叹不已。迪尼斯关于数学概念学习的理论，学员读过后，不少人马上联系自己在教学实践中有兴趣的课题进行教案设计，这反映了学员对一个数学家转向研究数学教学心理而得出的成果的喜悦，因为他是我们数学教育工作者自己的理论。

加涅在学习和教学理论上有很大的建树，他提出了组构数学这门学科内容的模型，采取一个从底到顶的方法，以更简单的、必先具备的事实、技能和概念为基础，把内容组织成为学习层次，以便学习更加复杂的技能、概念和原理。特别是他的层次类型中的概念学习、法则学习、问题解决学习完成的条件对于现行数学教学的改进非常有现实意义。本书将在第四章中介绍加涅的上述成果。

人的思维习惯形成始于幼年，对数学教学来说，要培养学生的创造性思维必须从小学一年级就开始。由于数学自身的变化和皮亚杰等人发展心理与学习心理理论的提出，在发达国家，数学在学校中已不再以含有完善解法范例的封闭的命题体系面目出现了，而是作为人思维行为的场地，这个思维被称之为儿童的创造能力。本书在第五章中从基尔福特提出的不同类型智能的三维结构模型出发，介绍了国外、国内在小学

数学教学中培养学生创造性能力的理论根据和实践经验，不少经验、例子出自于我们在上海郊区做的、有 1131 名学生参加的、历时两年半的《小学数学教学中创造力培养》的实验。

60年代数学教学改革以来，数学教学方法不外乎两种主要的类型：发现学习与接受学习。两种方法各有长处，实际上完全不应该是互相对立的，这里抓住“有意义”这三个字的含义，介绍有意义的发现学习与有意义的接受学习。希望能既了清两派的恩怨，又使教师从混乱中走出来。发现学习与接受学习都可以是有意义的，也可能是死记硬背的、机械的。关键是要给一定的条件，才能使之成为有意义的发现学习与有意义的接受学习。由于奥苏贝尔的有意义的接受学习理论，是通过已有数千年历史并对人类文明代代相传建立了汗马功劳的“接受学习”进行深刻反思、批判继承而建立起来的，因此习惯于用传统教学方式进教学的教师，在现行教材编排方式没有作大改变的今天，似乎对之格外倾心。

数学教学的重要类型是“概念学习”与“问题解决学习”。本书在最后两章集中介绍各家对这两个类型的研究成果。我在这两章中引用的材料都是在 1989 年和 1992 年在德国和日本收集到的，或是国外 1992 年寄来的，即使在国外也是较新的材料、较新的成果，共同特点是可操作性强。在概念学习这一章的第二节，我将国外学者的专题研究成果有机地排成序，以与“概念学习”的过程相呼应。“问题解决学习”在这几年一直是国际上数学教育界的热点，已数次为国际会议的中心课题。1992 年 5 月在日本东京召开的中日数学教学合作研究第一次会议，就是以“问题解决”为主要课题之一的。日本、美国、德国都对“问题解决学习”展开了深入研究，我主要介绍了如何通过改变结构、如何通过发现模式来解决问题，内容丰富、

实验基础详实,且都是国内尚未介绍过的。

哲学家只是用不同的方式解释世界,而问题是如何改造世界。同样,数学教学心理学家也只是用不同的观点来描述、假设数学认知、学习的心理过程,而问题主要是如何使数学的学习变成高效。从这一点上讲,小学数学教学心理学的真正主人是第一线的小学数学教师。

学员可以试将所介绍的理论要点应用于自己的教学之中。你也许会发现不少理论对你的学生和你本身都很适用,它们对于我们现存的学习环境,以及对和你相互影响的儿童来说,似乎是一个不错的模型。从中假如能得到启发的话,你还可以与自己班级面临的实际情况相结合,建立更适合你和学生及教学要求的模型,如果是这样,那当然是值得贺喜的了。

如果你对自己亲手教过的学生情况进行反思,你就会体会到每一种理论对于学生都会有某些用处。如果你进一步地从现在开始对每个学生所表现出来的各种形式的行为,从理论上去分析其原因,那么你就会成为真正能理解学生、帮助学生学到点子上的教师,你也就能不断改进自己的教学方法,提高教学效率。

这些,正是我编写《数学教学心理初探》的目的。

本书主要参考书籍:

1. Reform des Mathematikunterrichts (数学教学的改革)

1975年(德)Dieter Ellrott, Manfred Schindler

2. 儿童怎样学习数学

1979(美)R. W. 柯普兰著 李其维、康清镛译
上海教育出版社

3. 中学数学的教与学

1981 (美) F. H. 贝尔著 许振声、管承仲译

教育科学出版社

4. Grundkurs Mathematikdidaktik(数学教学论基础)

1986年(德) Friedrich Zech

黄建弘于 1993 年 3 月

第一章 数学的认知发展阶段理论

皮亚杰,瑞士著名儿童心理学家,曾任日内瓦大学教授。他在60年代初期创立了“发生认识论”,主要研究知识是怎样形成和发展的。他把知识的发生与发展归纳为两个主要的方面:(1)知识形成的心理结构(即认知结构*)(2)知识发展过程中新知识形成的机制。皮亚杰又以发生认识论作为基础提出了认知发展阶段理论。皮亚杰以结构主义为指导思想,用一些简单而巧妙的心理实验去研究逻辑、数学和心理学的概念是如何在儿童心理中发展起来的,他把数理逻辑的方法引进心理学的研究领域中来,他说,逻辑代数可以帮助心理学家具体描述心理的结构,并把实际思维过程的中心结构与运算列为演算式,加上数学也被看作为形式结构的科学,因此,皮亚杰的认知发展阶段理论正好是对数学认知发展的阶段作了详尽的描述。

在皮亚杰的理论体系中,认知结构的发展(通过同化、顺应、适应和平衡)、运算逻辑以及逻辑范畴(格和群)、科学概念的发生认识论这三者的统一,构成了儿童认知机能的全貌。其中,运算是认知的主要结构。在皮亚杰看来,要真正了解智慧,

* 认知结构是个人在感知及理解客观现实的基础上,在头脑里形成的一种心理结构。它由个人过去的知识经验组成。在认识过程中,新的感知同已形成的认知结构发生相互作用,从而影响对当前事物的认识。皮亚杰认为,它是主体认知活动的产物。布鲁纳把它叫作再现表象,它可有“动作”、“映象”和“符号”三种形式。在学习中,一个新的观念、信息或经验,不是被现有的认知结构所同化,就是改进现有的认知结构,或是接纳新的经验产生新的认知结构。

必须追溯到动作。无论数学思维或逻辑思维，实质上都是—种动作。运算是逻辑的核心概念，是划分发展阶段的主要标志。据此，皮亚杰把儿童认知发展划分为四个主要的阶段：①感知运动阶段(出生到两岁)，这时只有动作活动，并开始协调感觉、知觉和动作间的活动，是智慧的萌芽时期；②前运算阶段(二岁到六、七岁)，出现了语言，说出双词句(电报式)，具有表象思维能力，但缺乏可逆性；③具体运算阶段(六、七岁—十一、十二岁)，最初根据实物进行直观形象思维，逐步内化过渡到头脑的抽象逻辑思维。例如最初用笔算，逐步内化为心算(口算)；④形式运算阶段(从十一、十二岁——)能在头脑中把形式和内容分开，使思维超出所感知的具体事物或形象，进行抽象的逻辑思维和命题运算，也就是思维能从理论出发，而不必从具体到理论，能考虑假设的可能性与现实性。

第一节 认知结构是如何发展的

认知结构的发展是通过适应(同化、顺应)、平衡来进行的。

一、适应是智力活动和生物活动的本质

皮亚杰认为适应是智力活动和生物活动的本质，是行为的基础。达尔文进化论中的适应概念，即“适者生存”是大家熟知的。但是皮亚杰使用适应这个概念不单指生存，而更多是指人为了自身利益主动地改造自己的周围环境。他认为适应是智力活动的一种方式，也是人遗传的重要部分。它存在于生活的始终。适应是指人把自己无数的感觉和经验加以一定的整理，使自己去适应周围环境的能力。