

根据教育部《国家课程标准》编写

Jiu Tou Niao



分式和二次根式

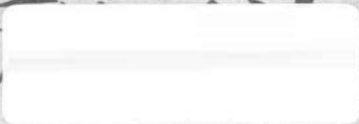
主编 南秀全

本册作者 饶健

长江出版传媒 | 湖北教育出版社

九头鸟 专题 突破

初中数学

分式  根式

主编 南秀全

本册作者 饶 健

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

九头鸟专题突破. 初中数学. 分式和二次根式/南秀全主编.
—武汉:湖北教育出版社,2013.6

ISBN 978 - 7 - 5351 - 8944 - 8

I. 九…

II. 南…

III. 中学数学课 - 初中 - 题解 - 升学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 093978 号

出版发行 湖北教育出版社

邮政编码 430015 电 话 027 - 83619605

地 址 武汉市青年路 277 号

网 址 <http://www.hbedup.com>

经 销 新 华 书 店

印 刷 武汉市新华印刷有限责任公司

地 址 武汉市江夏区纸坊古驿道 91 号

开 本 880mm × 1230mm 1/32

印 张 8.25

字 数 270 千字

版 次 2013 年 6 月第 1 版

印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5351 - 8944 - 8

定 价 16.50 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

序

裴光亚

九头鸟是智慧的象征，还是狡诈的代词？各有各的看法。

用它来形容本书的作者，却都有道理。

他们是智慧的，因为他们对中学数学的理解，对教育规律的把握。他们生长于一片红色的土地，过去是将军的摇篮。这里的 223 位将军大概不会想到，百年之后，这里会因为教育而驰名，并成长出一批教育资源的拓荒者。

他们也是“狡诈”的。说他们“狡诈”，是因为他们总是抢占先机，一时“洛阳纸贵”。他们炮制的“秘籍”、“兵法”，难免有蛊惑之嫌。但市场不相信狡诈。他们靠的是真诚，是内容本身赢得了读者。

常言道：天上九头鸟，地下湖北佬。但作为教育者，作为教育资源的开发者，并非每个湖北佬都担得起此等名声。而本书的作者是当之无愧的。他们是九头鸟的代表，更是九头鸟的集大成者。他们以黄冈经验为基础，并以他们的“狡诈”，对湖北以及全国各地的经验博采众长，从而使资源开发成为教育品牌下的一个拳头产品。这样的资源，已经不足以用“黄冈”二字来概括。于是，才有了九头鸟的称谓。是“黄冈教育”成就了“九头鸟专题”，还是“九头鸟专题”丰富了“黄冈教育”，我们已不得而知。

《九头鸟专题突破·初中数学》是由 12 个专题构成的系列丛书。这 12 个专题，是依据初中数学《课程标准》，从三个方面考量而形成的。这三个方面是：知识的本来逻辑，课本的系统设计，中考的基本特点。

作为第一读者，就会有第一印象，不妨叫做特色：

本丛书强调的是能力，关注的是中考。要适应中考，取胜中考，超越中考。因此，书中不仅有中考真题，还有以真题为背景的变式和在真题基础上的拓展创新。光有中考真题，只能适应中考。有了中考题的变式和创新，才有可能取胜中考，超越中考。只有超越中考，

才能抵达中考的理想境界。

在书山中采精集萃，在题海里大浪淘沙，历来是本书作者的拿手功夫。他们为初中生整理的竞赛系列，试题的代表性、新颖性和集大成性，都令人叹为观止。在《课程标准》实施十年后的今天，他们在浩如烟海的资料前披荆斩棘，经殚精竭虑的筛选而厚积薄发。于是，这套书才会带给我们耳目一新的感觉。市场上不少资料虽然有花样翻新的外表，包裹着的仍是陈旧不变的内容。那样一些资料，已经严重干扰了正常的教学秩序。正是从这个意义上，我们说，有这样一套理念、素材、问题都能与时俱进的丛书，是弥足珍贵的。

本书的整体结构——从知识点击到视野扫描，从中考演练到综合强化；内容的呈现结构——从正向的例题解析，到反面的纠错讨论，以至为进一步发展设置的探究平台；演练的分级结构——从达标练习，到具有一定挑战性的作业，到需要创新思考的问题。所有这一切，无不体现能力发展的基本规律。这个规律通俗地说，就是循序渐进，就是从学生的基本现实出发，力图把他们引向能力发展的制高点。人们讨厌应试教育，其实不是不要分数，不要中考，而是反对违背规律的做法。遵循规律，结构的规律，内容解读的规律，由知其然到知其所以然的认知规律，是本书的生命力之所在。

包含两层意思。一是，全套 12 册，每册一个专题，读者可以根据自己的需要选用；二是，这本书的构成，既可以作为教师的专题讲义，也可以作为学生的自主读物。书中多有圈注旁批，对教师是重点提示，对学生则是指点迷津。

以上只是我对本书的第一印象。我乐意推荐此书，并不只是这第一印象。而更重要的是我对作者和编辑的了解。作者南秀全先生和编辑彭永东博士，都是我非常钦佩的老师。南先生著作等身，说他是初中数学教育界的明星大腕，大概是没有质疑的。彭先生才华横溢，治学严谨，鄂教版《普通高中课程标准实验教科书·数学》就是在他的引领下通过国家教育部审定的。作为副主编的我，正是在与他的合作中坚信：优秀的编辑是作者的老师，是老师的老师。

“九头鸟专题”将猎渔之法轻松传递给读者，突破是必然的。突破后会走多远，用过此书的你将有深切的体会。



第一章 旋 转

1.1 图形的旋转

知识精华点击

课 标 要 求

1. 掌握旋转的有关概念,理解旋转变换也是图形的一种基本变换.
.....

教 材 详 解

1. 旋转的概念
.....

名师优质课堂

例 题 精 析

例 1 如图 1.1-1, 点 C 在线段 BE 上, $\triangle ABC, \triangle CDE$ 均为等边三角形, 且位于 BE 同侧, 观察图形, 图中是否存在这样的两个三角形, 其中一个是另一个旋转而成的? 如果存在, 指出这两个三角形以及旋转中心和旋转角分别是什么? 如果不存在, 请说明理由.

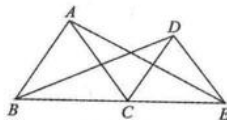


图 1.1-1

解 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACE$ 中的一个是由另一个旋转而成的.

旋转中心是点 C , $\angle ACB$ 和 $\angle DCE$ 都是旋转角.

利用 SAS 可证得 $\triangle BCD \cong \triangle ACE$.

说明 在图中寻找全等的图形, 然后再判断它们是否属于旋转的关系, 可想象着将一个图形绕某一点旋转一个角度试试.

变式 如图 1.1-2, $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 绕定点 P 顺时针旋转后得到的图形, A' 是 A 的对应点, 请作出 $\triangle ABC$.

为 什 么 错

1. 不能正确地理解旋转角度.

2

旁 批

提醒注意, 论注要点, 指明关键。

课标要求

明确知识要求和重、难点。

教材详解

系统梳理知识点, 补充延伸教材内容。

例题精析

题型分类剖析, 归纳解题技巧, 变式加深理解。

为什么错

剖析易错题, 诊断错因, 提升理解力。



探究平台

开放性、创新型
考题,综合考查,思
维拓展。

第一章 旋转

探究平台

例6 (2012·广州市)如图1.1-13,在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, D 是 BC 上一点,且 $BC=3BD$, $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$,则 CE 的长度为_____。

智能分级演练

知识达标

1. 将 $\triangle ABC$ 绕其顶点 A 逆时针旋转 45° 后得到 $\triangle ADE$,则 $\triangle ABC$ _____ $\triangle ADE$, $\angle BAD$ = _____度。

答案与提示

1. $\cong$, 45° 提示:旋转前后的两个图形是全等形, $\angle BAD$ 等于旋转角。
2. 正三角形 提示:可求得 $\triangle OAA'$ 中有 $OA=OA'$, $\angle OAA'=60^\circ$ 。

视野情境扫描

漫谈相似与全等

我们知道,相似图形与全等图形是形状相同的图形,……

中考真题演练

考点综述

本章重点考查旋转、轴对称知识的基本应用,涉及旋转角,……

真题讲解

例1 (江苏连云港)如图,正方形网格中的每一个小正方形的边长都是1,四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在格点上,……

真题演练

1. (2011·广西北海)已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切,若 $\odot O_1$ 的半径为1,两圆的圆心距为5,则 $\odot O_2$ 的半径为()
A. 4 B. 6 C. 3或6 D. 4或6

本章目标测试与评价

(时间:120分钟,总分:120分)

一、填空题(每小题3分,共30分)

1. 五角星绕中心点旋转一定的角度能与自身重合,则其旋转的

3

本章目标测试与评价

题型全面,便于自我
检测,了解学习效果。

智能分级演练

梯度设计,知
识达标,能力挑战,
自主创新。

答案与提示

紧跟题目,查
找方便,点拨解题
要点。

视野情境扫描

背景知识,趣味
阅读,拓展视野。

中考真题演练

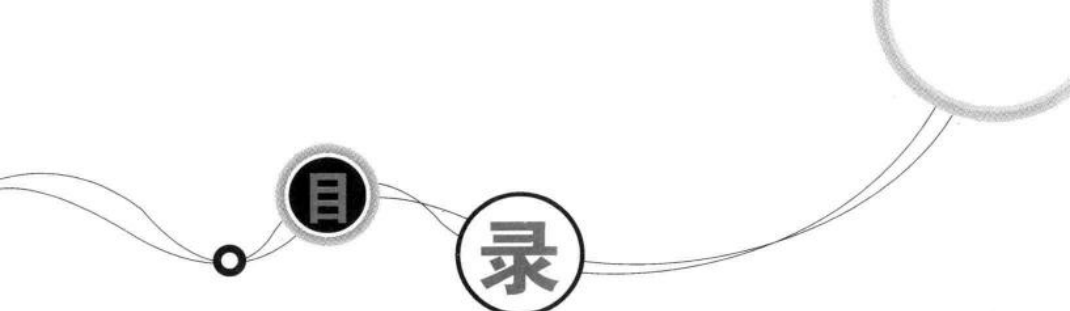
考点综述,真题
讲解,真题演练。

编

委

会

南秀全	占 鳌	余曙光	饶 健
卫金钰	付东峰	张 文	沈立新
盛春贤	王江山	杜 金	肖一鸣
王 菊	陈亦令	王 刚	彭 淼
张 罕	柯燕来	方世昌	胡世宇
柯永鑫	蔡柳生	张先林	



目

录

第一章 分式

1.1 分式及其基本性质	1
1.1.1 分式的概念	1
1.1.2 分式的基本性质	10
1.2 分式的运算	24
1.2.1 分式的乘除	24
1.2.2 分式的加减	38
1.3 整数指数幂	53
1.3.1 零指数幂	53
1.3.2 负整数指数幂	59
1.4 分式方程	71
1.5 分式方程的应用	90
中考真题演练	115
本章目标测试与评价	132

第二章 二次根式

2.1 二次根式的概念	139
2.2 二次根式的运算	154
2.2.1 二次根式的乘除法	154
2.2.2 二次根式的加减法	170
中考真题演练	185
本章目标测试与评价	195

第三章 知识综合与强化

专题一 分式、二次根式的计算与求值	202
专题二 分式、二次根式的巧算与规律探究	218
考题三 综合问题中的分式、二次根式	235

第一章 分式

1.1 分式及其基本性质

1.1.1 分式的概念

知识精华点击

课标要求

1. 掌握分式概念,能用分式表示数量关系;
2. 理解并能熟练地求出分式有意义的条件,分式的值为零的条件.

本节重点是理解分式有意义的条件,分式的值为零的条件;难点是能熟练地求出分式有意义的条件,分式的值为零的条件.

教材详解

1. 分式的概念:

整式 A 除以整式 B , 可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式, 如果除式 B 中含有字母, 那么称 $\frac{A}{B}$ 的分式 ($B \neq 0$), 其中 A 称为分式的分子, B 称为分式的分母.

分式的概念对于今后学习分式方程和函数等知识都有重要的作用, 所以, 理解分式的概念时, 一定要和分数的概念类比, 抓住分式的实质, 理解时应注意以下几点:

分式的形式与分数类似, 根本区别是: 分式的分母中含有字母.

(1) 分式是两个整式相除的商, 其中分母是除式, 分子是被除式, 而分数线则可以理解为除号, 还含有括号的作用. 比如: $-2 \div (m-n)$ 的商写作 $-\frac{2}{m-n}$, 不必写成 $-\frac{2}{(m-n)}$ 等;

(2) 分式的分子可以含字母, 也可以不含字母, 但分母必须含有字母, 后者是整式与分式的根本区别;

注意: 分母千万不能为 0.

(3) 因为“零不能作除数”, 所

以无论是分数还是分式,分母都不能为零.由于分数的分母是具体数值,其值是否为零一目了然,而分式的分母中含有字母,其值是否为零就必须分析、讨论分母中所含字母的取值范围,以避免因分母的代数式的值为零而使分式失去意义.如在分式 $\frac{y^2-1}{x^2-1}$ 中,分子中的字母 y 可以取任意数值,而分母中的字母只能取除去 ± 1 以外的任意数值;

(4)判断一个代数式是否为分式,不能把原式变形(如约分),而只能按原式进行判断,如 $\frac{2x}{x}$ 中分母含有字母,所以它是分式.

2. 分式有意义、无意义、值为零的条件

由分数的分母不能为零,用类比的方法归纳出:分式的分母也不能为零.注意只有满足了分式的分母不能为零这个条件,分式才有意义.即当 $B \neq 0$ 时,分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.否则,分式无意义.

我们要牢记:分式 $\frac{A}{B}$ 为零的条件是 $A=0$ 且 $B \neq 0$.两者必不可少.

分式的值为0时,必须同时满足两个条件:①分母不能为零;②分子为零.由于零除以任何非零的数时,商都为零.所以,一般地说,分子的值为零时,分式的值为零.但是,这时分式必须有意义,也就是分式的分母必须不为零.如式子 $\frac{|x|-2}{x^2-x-2}$ 中,当 $x=2$ 和 $x=-2$ 都能使分子的值为零,但当 $x=2$ 时分母的值为零,这个式子无意义,所以只有 $x=-2$ 才使这个式子的值为零.

3. 分式值的特殊情况对于分式 $\frac{A}{B}$:

(1)若 $\frac{A}{B}$ 的值为正数,则 $\begin{cases} A > 0, \\ B > 0, \end{cases}$
或 $\begin{cases} A < 0, \\ B < 0. \end{cases}$

分式的值是以分式有意义为前提.

(2)若 $\frac{A}{B}$ 的值为负数,则 $\begin{cases} A > 0, \\ B < 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A < 0, \\ B > 0. \end{cases}$

(3)若 $\frac{A}{B}$ 的值为整数,则 A 是 B 的整数倍.

名师优质课堂

例题精析

例1 代数式 $-\frac{3x^2}{2}$, $\frac{x^2+1}{\pi}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{x+1}{x}$, $\frac{5b}{3a}$ 中分式有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

分析 判断分式的重要依据是看分母中是否含有字母, 如果含有字母则是分式, 如果不含有字母则不是分式.

解 $\frac{x+1}{x}$, $\frac{5b}{3a}$ 中的分母含有字

母, 是分式, 其他不是分式. 故选 B.

注意: π 为圆周率, 是一个数, 千万别当成字母.

说明 本题主要考查分式的定义, π 是常数, 不是字母, 因此 $\frac{x^2+1}{\pi}$ 不是分式.

变式 下列各式中, 分式的个数是 ()

$$\frac{2}{x}, \frac{a+2b}{2}, \frac{a+b}{\pi}, \frac{a+1}{a}, a+\frac{\sqrt{b}}{b}$$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

分析 正确的理解与区分整式和分式的概念是解题的关键, 整式是指单项式和多项式, 分式是形如 $\frac{A}{B}$, 且 A, B 是整式, B 中含有字母. 所以判断一个式子是否为分式, 就是要看分母中含有字母, 若有则为分式; 反之则为整式.

解 $\frac{a+2b}{2}$, $\frac{a+b}{\pi}$ 的分母中均不含有

字母, 因此它们是整式, 而不是分式;

$a+\frac{\sqrt{b}}{b}$ 的分子不是整式, 因此不是分式;

$\frac{2}{x}$, $\frac{a+1}{a}$ 的分母中含有字母, 因此是分式. 故选 A.

$\sqrt{b}$ 是无理式, 不是整式.

说明 理解分式的定义是解题的关键, 如果 A, B 表示两个整式, 并且 B 中含有字母, 那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式, 特别要注意分子、分母都是整式, 这是前提条件. π 不是字母, 是常数, 这也要予以区分, 所以 $\frac{a+b}{\pi}$ 不是分式, 是整式.

例 2 分式 $\frac{1}{x(x-1)}$ 有意义的条件是 ()

A. $x \neq 0$ B. $x \neq 1$ C. $x \neq 0$ 或 $x \neq 1$ D. $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$

分析 从以下三个方面透彻理解分式的概念: (1) 分式无意义 $\Leftrightarrow$ 分母为零; (2) 分式有意义 $\Leftrightarrow$ 分母不为零; (3) 分式值为零 $\Leftrightarrow$ 分子为零且分母不为零. 分母不为零, 分式有意义, 即 $x(x-1) \neq 0$, 解得 x .

解 要使分式 $\frac{1}{x(x-1)}$ 有意义, 则要满足分母 $x(x-1) \neq 0$, 解得 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$. 故选 D.

说明 要使分式有意义只需让分式的分母不为 0; 而分式的分母为 0 时, 分母无意义; 因此, 若求 x 取何值时, 分式有意义, 可先求 x 取何值时, 分式无意义.

变式 无论 x 为任何实数, 下列分式都有意义的是 ()

- A. $\frac{1}{x^2}$ B. $\frac{1}{3x}$ C. $\frac{1}{x+3}$ D. $\frac{1}{x^2+1}$

分析 本题考查的是分式有意义的条件, 即分式分母不等于零. 根据分式有意义的条件对各选项进行逐一分析即可.

解 A. 当 $x=0$ 时, 此分式无意义,

故本选项错误; B. 当 $x=0$ 时, 此分式

无意义, 故本选项错误; C. 当 $x=-3$

时, $x+3=0$, 此分式无意义, 故本选项

错误; D. 无论 x 为何实数, $x^2+1 > 0$, 故本选项正确. 故选 D.

x^2+1 中的 x 可
取任意实数.

例 3 若 $\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$ 的值为零, 则 x 的值是 ()

- A. ± 1 B. 1 C. -1 D. 不存在

分析 分式的值为 0 的条件是: (1) 分子 = 0; (2) 分母 $\neq 0$. 两个条件需同时具备, 缺一不可. 据此可以解答本题.

解 由题意可得 $|x|-1=0$, 解得

$x=\pm 1$. 又 $\because x^2+2x-3 \neq 0$, $\therefore$ 把 $x=$

± 1 分别代入 x^2+2x-3 , 能使这个式

子不是 0 的是 $x=-1$. 故选 C.

别忘了代入分
母中进行检验.

说明 由于该类型的题易忽略分母不为 0 这个条件, 所以常以这个知识点来命题. 因此, 我们在解有关分式的值为零这类问题时, 有分子等于零求出字母的取值后, 一定要确保分母不能为零, 同时, 分式的值为零并不表示分式没有意义.

变式 已知当 $x=-2$ 时, 分式 $\frac{x-b}{x-a}$ 无意义; $x=4$ 时, 此分式的值为 0, 则 $a+b$ 的值等于 ()

- A. -6 B. -2 C. 6 D. 2

分析 根据分式的值为零的条件、分式有意义的条件列出相应的式子作答. 分式分母的值不为 0 时分式没有意义, 要使分式的值为 0, 必须分式分子的值为 0 并且分母的值不为 0.

解 由分母 $x-a=-2-a=0$ 则 $a=-2$. 由分子 $x-b=0$ 得 $4-b=0$ 解得 $b=4$. 所以 $a+b=-2+4=2$. 故选 D.

例 4 如果分式 $\frac{-3}{x-2}$ 的值为负数, 那么 x 的取值范围是()

A. $-2 < x < 2$ B. $x < 2$ C. $x > 2$ D. $x < -2$

分析 要满足分式值为正数, 则分子、分母的代数式同号即可.

解 $\because -3 < 0, \therefore$ 由 $x-2 > 0$ 得 $x > 2$, 故 $x > 2$ 时, 分式的值为负数, 选 C.

说明 对于分式值的正负情况, 可由分子与分母的同号、异号来确定, 更深刻揭示了分式概念的含义.

变式 已知分式 $\frac{x-3}{x+2}$ 的值为负数, 求 x 的取值范围.

分析 若分式的值为负数, 则 $x-3$ 和 $x+2$ 的符号不同, 列 $\begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 > 0, \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$ 两个不等式组, 解此不等式组就是 x 的取值范围.

解 由题意得 $\begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 > 0, \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 < 0, \end{cases}$ ②

解不等式组①, 得 $-2 < x < 3$, 解不等式组②, 无解.

$\therefore x$ 的取值范围是 $-2 < x < 3$.

为什么错

1. 不化简判断的规定

例 5 指出下列各式中, 哪些是分式?

$\frac{x^2}{2x-1}, \frac{4}{5b+c}, \frac{3}{7}, 2x^2-1, \frac{2a}{3a}, \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}b.$

错解 认为 $\frac{2a}{3a}$ 等于 $\frac{2}{3}$, 不是分式.

判断代数式是否为分式, 只需对原式判断.

分析 判断一个式子是否为分式, 可从以下方面考虑: (1) 式子的形式应当是 $\frac{A}{B}$ 的形式; (2) 分母 B 中要含有表示变量的字母; (3) 式子的分子、分母必须都是整式. 只有同时具备了以上三点的式子才可称作是分式. 同时, 对于一个式子不需要化简, $\frac{2a}{3a}$ 是一个分式, 但它不是最简分式.

正解 $\frac{3}{7}$ 是一个常数, 不是分式; $2x^2-1$ 是整式, 不满足 $\frac{A}{B}$ 的形式,

不是分式; $\frac{2a}{3} + \frac{1}{2}b$ 分母中不含字母, 不是分式, 其余各式均为分式.

2. “且”与“或”的区别不清

例 6 若分式 $\frac{3}{(x-1)(x-2)}$ 有意义, 则 ()

A. $x \neq 1$ B. $x \neq 2$ C. $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$ D. $x \neq -1$ 或 $x \neq -2$

错解 D

分析 分式 $\frac{3}{(x-1)(x-2)}$ 有意义的条件是 $x-1 \neq 0, x-2 \neq 0$ 即可求出 x 的范围. “且”字连接, 必须“且”的两个条件都成立. “或”字连接, 只需要一个条件成立即可. 此题两个条件都成立, 故用且字连接.

正解 根据题意得: $x-1 \neq 0$ 且 $x-2 \neq 0$, 解得: $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$, 故选 C.

3. 忽略分式有意义条件.

例 7 当 x 为何值时, 下列分式的值为零?

(1) $\frac{x^2-1}{x-1}$; (2) $\frac{x+m}{x-m}$.

错解 (1) 当 $x = \pm 1$ 时, 分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为零. (2) 当 $x = -m$ 时, 分式 $\frac{x+m}{x-m}$ 的值为零.

分析 (1) 分式的值为零时, 还要考虑分母不为零的条件, 即 $x-1 \neq 0, x \neq 1$;

(2) m 是字母, 表示一切数, 因而当 $x = -m$ 时, 分母 $x-m = -m - m = -2m$ 也可为零, 故解本题时应从 $\begin{cases} x+m=0, \\ x-m \neq 0. \end{cases}$ 两方面考虑, 由 $x+m=0$, 得 $x = -m$, 代入 $x-m \neq 0$ 中得, $-2m \neq 0, \therefore m \neq 0$ 这个条件不容忽视.

正解 (1) 当 $x^2-1=0$ 时, $x = \pm 1$, 又 $x-1 \neq 0, \therefore x \neq 1$, 故 $x = -1$ 时, 分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为零.

(2) 由 $\begin{cases} x+m=0, \\ x-m \neq 0. \end{cases}$ 得 $m \neq 0$ 且 $x = -m$ 时, 分式 $\frac{x+m}{x-m}$ 的值为零.

探究平台

例 8 若分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取何实数时总有意义, 求 m 的取

值范围.

分析 根据分母有意义,确定分母的值 $\neq 0$,即是方程 $x^2-2x+m=(x-1)^2+(m-1)\neq 0$,而 $(x-1)^2\geq 0$,则由 $m-1>0$ 即可得到 m 的取值范围.

解 $\because$ 分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取何实数时总有意义, $\therefore x^2-2x+m=(x-1)^2+(m-1)\neq 0$,有 $\because (x-1)^2\geq 0$, $\therefore$ 只有 $m-1>0$ 时, x^2-2x+m 绝不 $\neq 0$,故 $m>1$.

说明 本题主要考查分式有意义的条件:分式有意义,分母不能为0.因为只有当 $x=1$ 时, $(x-1)^2$ 才会等于0,那么此时 $m-1$ 若大于0,则 x^2-2x+m 绝对是不为0的,由此可以求出 m 的范围.此题以后还可利用二次函数的知识解决.

例 9 给定下面一系列分式: $\frac{x^3}{y}, -\frac{x^5}{y^2}, \frac{x^7}{y^3}, -\frac{x^9}{y^4}, \dots$, (其中 $x\neq 0$).

(1)把任意一个分式除以前面一个分式,你发现了什么规律?

(2)根据你发现的规律,试写出给定的那列分式中的第7个分式.

分析 根据题中所给的式子找出规律,根据此规律找出所求式子.

解 (1) $-\frac{x^5}{y^2} \div \frac{x^3}{y} = -\frac{x^2}{y}; \frac{x^7}{y^3} \div (-\frac{x^5}{y^2}) = -\frac{x^2}{y}$...规律是任意一个分式除以前面一个分式恒等于 $-\frac{x^2}{y}$;

(2) $\because$ 由式子: $\frac{x^3}{y}, -\frac{x^5}{y^2}, \frac{x^7}{y^3}, -\frac{x^9}{y^4}, \dots$,发现分母上是 $y^1, y^2, y^3, \dots$,故第7个式子分母上是 y^7 ,分子上是 x^3, x^5, x^7 ,故第7个式子是 x^{15} ,再观察符号发现第偶数个为负,第奇数个为正, $\therefore$ 第7个分式应该是 $\frac{x^{15}}{y^7}$.

说明 本题是找规律性的题目,需要同学们认真读题发现规律,利用规律.

例 10 若分式 $\frac{-3}{3-x}$ 的值为整数,则整数 $x=$ _____.

分析 由于 x 为整数,因此 $3-x$ 也是整数, -3 是被除数,故当除数为 ± 1 和 ± 3 时,分式 $\frac{-3}{3-x}$ 的值为整数,求出此时 x 的值即可.

解 由题意知, $3-x$ 只能为 $-3, -1, 1, 3$,由 $3-x=-3$ 得 $x=6$;由 $3-x=-1$ 得 $x=4$;由 $3-x=1$ 得 $x=2$;由 $3-x=3$ 得 $x=0$.
 $\therefore x$ 可取的整数为 $0, 2, 4, 6$.

说明 讨论形如 $\frac{a}{x+1}$ 型分式的值是否为整数时,可讨论 a 除以哪些整数后结果仍然是整数.

智能分级演练

知识达标

1. 梯形的面积为 S , 上底长为 m , 下底长为 n , 则梯形的高写成分式为_____.

2. 下列各式 $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{5}(x+y)$, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, $-3x^2$, 0 中, 是分式的有_____ ; 是整式的有_____.

3. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{1+2x}{1-2x}$ 无意义; 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{2x+1}{3x-4}$ 无意义.

4. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零; 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ 的值为零.

5. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{4x+3}{x-6}$ 的值为 1; 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{-7}{x^2+1}$ 的值为负数.

6. 下列各式① $\frac{3}{x}$, ② $\frac{x+y}{5}$, ③ $\frac{1}{2-a}$, ④ $\frac{x}{\pi-2}$ (此处 π 为常数) 中, 是分式的有()

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ①②③④

7. 分式 $\frac{x+a}{2x-1}$ 中, 当 $x = -a$ 时, 下列结论正确的是()

- A. 分式的值为零
B. 分式无意义
C. 若 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, 分式的值为零
D. 若 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 分式的值为零

8. 下列各式中, 可能取值为零的是()

- A. $\frac{m^2+1}{m^2-1}$ B. $\frac{m^2-1}{m+1}$ C. $\frac{m+1}{m^2-1}$ D. $\frac{m^2+1}{m+1}$

9. 使分式 $\frac{a}{a^2-1}$ 无意义, a 的取值是()