

土体工程动力 分析与计算

侯超群 李海滨 康佐 编著

TUTI GONGCHENG DONGLI
FENXI YU JISUAN

中国建筑工业出版社

土体工程动力分析与计算

侯超群 李海滨 康 佐 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

土体工程动力分析与计算 / 侯超群等编著. —北京:

中国建筑工业出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-112-14399-3

I. ①土… II. ①侯… III. ①土动力学 IV.

①TU435

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 128165 号

本书在参阅国内外大量文献与资料的基础上, 结合土体动力学的发展方向、研究现状, 从固体弹性波基本知识入手, 结合工程实践阐述了土体的动力特性以及动力参数的测试; 针对土力学三个经典课题, 分别介绍了动荷载条件下的地基承载力、挡土墙土压力以及边坡稳定性问题; 通过对地震作用、交通荷载以及工程建设引起的振动荷载的介绍, 阐述常见的土体震害; 最后, 针对不同的场地条件给出了土体抗震加固措施。

本书可作为岩土工程、结构工程、工程地质等专业的技术人员及高等院校相关专业教师、研究生的参考用书。

责任编辑: 王 磊 田启铭

责任设计: 张 虹

责任校对: 党 蕾 赵 颖

土体工程动力分析与计算

侯超群 李海滨 康 佐 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

文道思发展有限责任公司制版

北京市铁成印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 14 $\frac{3}{4}$ 字数: 370 千字

2013 年 9 月第一版 2013 年 9 月第一次印刷

定价: 46.00 元

ISBN 978-7-112-14399-3

(22459)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

前 言

土动力学作为土力学的一个重要分支，在工程实践中逐步被重视起来，在理论分析方面也引起广大岩土工作者的关注。特别是近年来由于地震灾害、人类活动引发了地质灾害，如：滑坡、坍塌等频有发生。对于机械振动、交通荷载引起的地基变形、边坡失稳，诸如此类的问题将土动力学问题再一次推向了公众面前，也使人们对于土的动力失稳、变形、破坏等问题更加关注。

本书的目的在于通过对土体动力特性的揭示，介绍土体动力参数的测试方法。分别介绍了动力荷载作用下地基承载力、边坡稳定性及挡土墙土压力问题。系统地阐述土的动力问题、分析方法、实验手段以及相关的工程案例。

本书兼顾理论和实践两个方面。一方面可以作为岩土工程、地质工程等相关专业研究生的土动力学入门教材；另一方面也为从事岩土工程、地质工程的工程技术人员提供了相关的案例参考。

全书分为八章。第一章概要介绍了土动力学的研究内容、研究对象、动荷载的分类及其对建筑物的影响，以工程实例给出了动荷载引起的土工问题。第二章介绍了振动和波动的基本概念，详细讲述了质点振动方程和无限介质中弹性波的振动理论，最后介绍了土介质中的波动方程以及其传播特点。第三章主要讲述土体的动强度和动变形，还分别阐述了振动压密、振陷等土体动力变形和砂土的振动液化问题。第四章主要讲述土体动力特性的室内试验、原位测试，重点介绍了如何获得所需的土体动力参数。第五章针对三个土力学经典课题，分别讲述了地基动承载力、挡土墙动土压力计算以及边坡的动力稳定性分析。第六章简要介绍了地震反应分析方法。第七章分别阐述了几种常见的土体动力问题及其危害。第八章概要介绍了防治土体动力失稳的地基处理方法及其检测方法。

全书由合肥工业大学侯超群、西安科技大学李海滨、西安市地下铁道有限责任公司康佐负责编著。全书由侯超群修改定稿，李海滨、康佐负责审阅。编写过程得到了长安大学盛燕萍的大力协助。

在本书的编写过程中参阅了大量的文献资料，均列于书后，在此向作者表示感谢，同时对在编写过程中给予热情帮助的人员表示衷心感谢。由于时间紧迫、水平所限，书中不足之处在所难免，敬请读者批评指正，以便修订完善。

编著者

2012年9月于西安

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 土力学与土动力学	1
1.2 动荷载的类型	1
1.3 动荷载对工程建筑的影响	3
1.4 土动力学的任务	3
第 2 章 振动与波动	5
2.1 振动与波动的概念	5
2.2 质点(刚体)振动	5
2.3 弹性无限介质中波的传播	24
2.4 半无限弹性空间中波的传播	28
2.5 土介质中的波	32
第 3 章 土的动力特性	36
3.1 动力作用下土的应力与应变	36
3.2 土的动强度	37
3.3 土的动变形	43
3.4 砂土的振动液化	47
第 4 章 土体动力特性测试	64
4.1 土动力特性的室内试验	64
4.2 土动力特性的原位测试	82
第 5 章 土体动力稳定性分析	110
5.1 地基的动承载力	110
5.2 挡土墙动土压力	118
5.3 边坡的动力稳定性分析	126
第 6 章 土体地震反应分析	138
6.1 剪切层法	138
6.2 集中质量法	147

6.3	有限单元法	163
6.4	振型叠加法	168
第7章	岩土工程中常见的振动问题	177
7.1	地震概述	177
7.2	交通荷载	181
7.3	工程建设引起的振动	189
7.4	震害	193
第8章	土体的抗震措施	197
8.1	概述	197
8.2	强夯法	198
8.3	挤密砂桩法	221
8.4	加固要求和效果检测	229
参考文献	231

第1章 绪论

1.1 土力学与土动力学

土力学是研究土在应力作用下的工程性质与行为的学科。把土作为建筑材料的系统性研究是由太沙基 (Karl Terzaghi) 博士在 20 世纪初开创的, 他在 1925 年出版了第一部土力学著作, 此后的几十年内, 全世界都受到这一新学科的冲击。

土动力学是土力学的一个分支, 它是研究土在动应力作用下的工程性质与行为的学科。虽然“应力”一词在土力学原来的定义中同时包括静应力和动应力, 但是通常“应力”一词只意味着静应力。因此, 一般的土力学教科书对土在动应力作用下的行为只是稍作提及, 不作深入介绍。

1.2 动荷载的类型

建筑物的地基、基础和上部结构是一个共同作用的系统。来自地基运动的动荷载可以通过基础传递到上部结构, 来自上部结构的动荷载也可以通过基础传递到地基, 这样传递的动荷载, 还可以再次往返传递。每次传递时, 若动荷作用下地基及上部结构物的变形强度特性发生变化, 则实际所引起的动荷载也不断变化。为了估计动荷作用下基地土和上部结构稳定性的发展和趋向, 一方面需要了解材料性质的变化规律, 另一方面要了解动荷载往返传递规律。动荷载的类型和特点则是研究问题的基础。

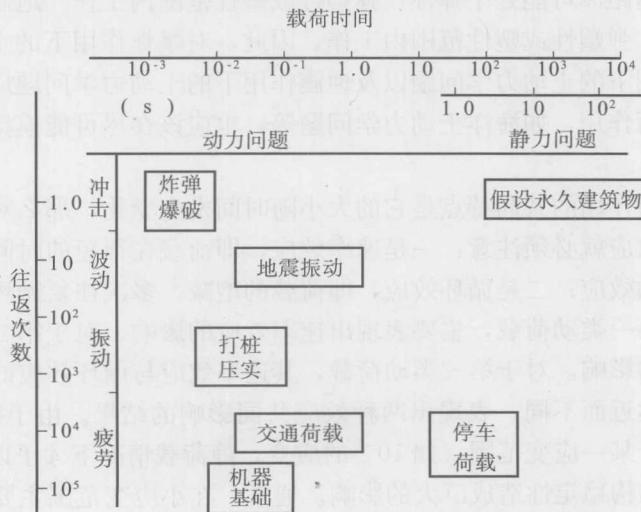


图 1-1 动荷载的分类

动荷载可以由机器运动的惯性产生,可以由坠落重物所引起的冲击力产生,可以由地震或大能量的爆破作用产生,也可以由交通荷载(火车、汽车等)的作用产生,还可用流体在管腔内的流动所引起的脉冲力、高耸建筑物上作用的风力、海洋建筑上波浪压力以及各种爆炸引起的气浪压力等产生。这些由不同原因引起的动荷载具有不同的作用特点(图1-1);从动荷载作用的要素,即振幅、频率、持续时间和波形的变化来分析,动力机器运行时引起的动荷载,视机器的不同类型、振幅和频率的变化范围较大,且具有随时间变化的多样性和作用的长期性;坠落重量所引起为动荷载为冲击型,其大小取决于传递结构的弹性和惯性,作用时间较短;地震所引起的动荷载,振动复杂,缺乏规律性,幅值大,频率低(1~5Hz),历时短(通常只有几十秒),变化大;车辆移动荷载的动荷作用,其特性与道路的不平整度以及车辆的自重、车速等因素相关;海浪的动荷作用,周期长(5~20s),持时久(3~9h),循环次数大(几千次);流体运动的动荷作用,其特性视抽水泵、压力机械的性质和管腔的几何形状而定;风载的动荷作用,频幅的变化都很大,时增时减,不够稳定;气浪的动荷作用为多次连续的冲击,持续时间不等;爆炸引起的动荷载主要为大压力幅的单脉冲,持续时间很短,压力上升很快(几毫秒或几十毫秒)。对于这些复杂多变的动荷作用,在研究其对土性的影响时,自然应该区别对待。因此,在土动力学的研究中,常根据主要的动荷作用特点,基本上可以分为如下三类问题:

- (1) 单一的、大脉冲荷载问题,如爆破引起的动力作用;
- (2) 多次重复的微幅振动问题,如机器基础引起的振动作用;
- (3) 有限次数的、无规律振动问题,如地震引起的振动作用。

上述三类动荷载,有其共同的地方(即荷载随时间而在变化),因此在理论分析方法上也大体相同。但是由于它们在变化规律及应力量级上的不同,在土中所产生的应变级及发展规律均有很大的差别。例如,在核爆炸作用下,土中产生的应力波所引起的应变级在考虑防护的范围内可以大到 10^{-2} 。而在一个合理设计的动力机器基础上,土的应变级约为 10^{-5} 或更小。地震引起的应变级则介于二者之间。在这些不同应变级范围内,土的性质具有不同的应力应变规律,如机器基础下的土主要在弹性范围内工作,爆炸作用下的土视爆炸能量及传递距离可能处于弹性、弹塑性或塑性范围内工作。地震作用下的土视震级也可能处于弹性、弹塑性或塑性范围内工作。因此,对爆炸作用下的土动力学问题、动力机器基础振动作用下的土动力学问题以及地震作用下的土动力学问题应分别研究。对于其他原因引起的动荷作用,如海洋土动力学问题等,也应该在尽可能模拟其动荷要素的条件下进行研究。

既然,各种动荷作用的共同特点是它的大小随时间发生变化,那么对动荷载在随时间变化过程中的两种效应就必须注意:一是速率效应,即荷载在很短的时间内以很高的速率施加于土体所引起的效应;二是循环效应,即荷载的增减,多次往复循环地施加于土体所引起的效应。对于第一类动荷载,主要表现出速率效应的影响。对于第二类动荷载,则主要表现出循环效应的影响。对于第三类动荷载,其速率效应与循环效应的影响视地震的震级大小和距震中的远近而不同,表现出两种效应共同影响的结果。由于循环效应的影响,即使应变级远小于某一应变范围(如 10^{-3} 的应变,静荷载情况下才予以注意的范围)仍会对材料特性甚至结构稳定性造成巨大的影响。通常,在小应变范围主要研究土的弹性参数、动模量、动泊松比和阻尼比问题;在大应变范围主要研究土的动强度、动变形、振动

液化以及土体动力稳定性问题。

1.3 动荷载对工程建筑的影响

任何建筑物最终必将建造在地基岩土中。由岩土传播而来的动荷载作用,一方面将引起地基振动,当地基土的强度或变形能力经受不住地基振动产生的内力或变形时,地基就被破坏;另一方面会引起结构物的振动,当结构物的承载力或变形能力经受不住振动所产生的内力或变形时,结构物就被破坏。地基破坏同样会导致上部结构的损坏。因此,不同程度的破坏可以由各种动荷作用所引起,如动力机器运转引起基础过大的振幅(甚至共振)、运动车辆引起道路两旁建筑物的附加沉降或裂缝、爆破引起的地裂以及喷砂冒水等。由于地震作用引起的破坏对建筑物的威胁更大,因此,它成为目前土动力学、土工抗震、结构动力学等研究的主要对象。

影响震害程度的主要因素有地震的震级、震中距离、震动持续时间、频率特性、地基条件、建筑结构形式和施工质量等。在相同的地基条件和建筑结构形式的情况下,震害将主要取决于地面运动的震动强度(如地面运动的最大加速度等)、地面运动的频率特性及震动的持续时间。加速度愈高,持续时间愈长,频率越低,则破坏愈烈;反之加速度愈低,持续时间愈短,频率愈高,则破坏愈小。例如1966年6月27日美国帕克菲尔德地震(5.3级),虽然记录到的最大加速度达 $0.5g$,但因频率高、持续时间短(1.5s),并无破坏产生。而1957年7月28日墨西哥城地震时,虽然最大加速度仅为 $0.05\sim 0.10g$,但由于频率低、持续时间长(几秒),故破坏严重。其次,在震级、震中距离、震动持续时间、频率特性等相同的条件下,地基愈松软,地基对振幅的放大和不均匀沉陷愈大,一般震害也愈严重。如果考虑到建筑物的不同刚度,则柔性愈大,在软基上共振愈大;刚性愈大,在硬基上共振的影响愈大,相应的震害也愈显著。因此,高层楼房(20~30层)在软基上容易损坏,而低层楼房(5~6层)却在硬基上容易损坏。地基失效是一个必须引起足够重视的问题。此外,在国内外遭受地震的地区内也常看到一些工程建筑物未遭破坏或轻微破坏,它们为我们进行工程抗震提供了宝贵经验。

1.4 土动力学的任务

土动力学的任务在于探求动荷载作用下土体的变形、强度特性,应用近代力学的原理,分析研究土工建筑物及建筑物土质地基在各种动力影响下的变形稳定性和强度稳定性。土动力学研究的内容应包括土的动力特性和土体的动力稳定性(包括土与结构物相互作用)两大部分。由于动荷载具体作用的特性不同,土可能在不同应力水平和动应变幅下工作,显示出不同的应力—应变特性规律。故上述两个部分的分析研究,必须尽量模拟实际动荷载作用的特点,面向动荷载作用下工程建设中的实际问题,建立起自己的理论体系和分析解决问题的基本方法。

一般来说,土动力学研究的问题包括:(1)工程建设中的各种动荷载作用及其特点问题;(2)动荷载所引起的振动和波动及其在土中运动的规律问题;(3)土的动应力—应变关系问题;(4)土的动强度和动变形问题;(5)土的振动液化问题;(6)土动力特性测试

设备与测试技术问题；(7) 动荷载条件下的地基承载力、土坡稳定及挡土墙土压力问题；(8) 土与结构物的相互作用问题（包括动力机器基础问题）。

土动力学问题的研究必须建立在土力学、地震工程学、结构动力学、土工抗震学等一系列学科的基础上，并且充分运用现有室内外试验量测技术，广泛积累原型观测和工程实录资料，做出理论联系实际的分析，建立科学的理论方法。当前，解决问题的途径包括：一是，建立起一定理论下的计算方法，引入一些表征动力作用和土动力特性的相应指标，作为动力设计的基础，并在不断的实践中加以检验和修正；二是，直接用模型试验的方法作为基础，并根据运用相似律模拟的精确程度和量测手段的完善程度，为设计提供出定性或定量的依据。由于问题的复杂性，现阶段土动力学研究的主要工作还是沿着第一条途径进行的，其着重点仍在理论依据和指标的合理确定方面，同时注重理论的实际验证和增稳工程措施。第二条途径的研究工作在过去结构模型试验的基础上探索着相似条件及测试新方法。土动力学的研究，与其他学科相类似，需要进一步将理论分析、室内试验、现场试验、原型观测和模型试验紧密结合起来，各取所长，互相促进，做出多途径长时期的系统探索。

第2章 振动与波动

2.1 振动与波动的概念

土介质（假设为均质、各向同性的连续弹性体）中的一个质点在外力作用下，在其平衡位置附近沿直线往复运动，该质点的运动叫做振动。对于连续介质，当某一质点振动时，该质点的振动能量就会传递到周围质点上，从而引起周围质点的振动，这种振动能量在介质内部的传播过程叫做波动。“一石激起千层浪”是由于石子投入水中而激发波浪，使漂浮在水面上的小木块在原位随水质点来回摆动，似质点在振动，而波浪类似波动。可见振动和波动是既有区别又有联系的两种物理现象，振动是研究一个物体或质点在原位的来回运动；波动是研究介质中质点“接力式”运动。振动是波动的根源，而波动又是振动的传播过程。

弄清楚振动和波动的基本概念，对于研究动荷作用下土的动力性状以及评价动力影响范围等均具有实际意义。例如地震时在震源处发生强烈震动，其震动能量以应力波的形式向四面八方传播直至地表，使建筑物遭受损坏。因此，我们既要研究地震时土体任一点的振动大小、强度和变形特性，又要研究由震源向四周岩土体各点传播的特点和变化规律。再如工厂的机器运转、建筑工地打桩或强夯及车辆行驶都可能给附近建筑物或精密仪器设备带来有害影响，也需要我们研究振动特点和波传递规律，以便采取必要的措施。

2.2 质点（刚体）振动

既然振动是波动的根源，首先了解振动类型及其规律是研究波动的前提，而且振动理论又是机器基础动力计算的理论依据。

2.2.1 振动特征

质点（或刚体）的振动是指质点相对于某一位置（如静力平衡位置）所作的往复运动，如图 2-1 所示。简谐振动是最简单、最基本的振动形式，不仅在机器基础动力计算中

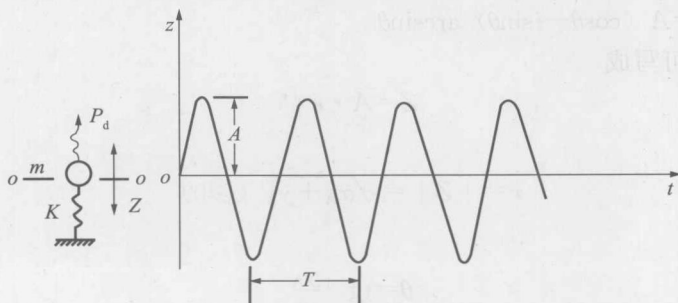


图 2-1 质点简谐运动

用到,而且在一般振动计算中也常用,即使像地震那样的随机振动,有时为了分析简便,也化为等效简谐振动来研究。

描述简谐振动的主要特征参数是频率、周期和振幅。

频率是指质点每秒钟往复(振动)的次数,用符号 f 表示,单位是次/秒(c/s)、周/秒或赫兹(Hz)。当以弧度/秒(rad/s)表示时,称圆频率(或角频率,用 ω 表示)。两者的关系 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 。周期是往复(振动)一次所需的时段,用 T 表示,单位是秒(s),它与频率之间的关系为 $T = \frac{1}{f}$ 。

振幅是质点离开其平衡位置的最大位移,用 A 表示,单位一般用毫米(mm)。在一周中从最大正位移到最大负位移称双振幅,它的一半称单振幅或振幅。

于是简谐振动可以用正弦函数或余弦函数表达,如图2-2所示。

位移

$$Z = A \sin(\omega t - \theta) \quad (2-1)$$

速度

$$\dot{Z} = A\omega \cos(\omega t - \theta) \quad (2-2)$$

加速度

$$\ddot{Z} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \theta) \quad (2-3)$$

式中 θ ——位移滞后于扰力 P_d 的相位角。

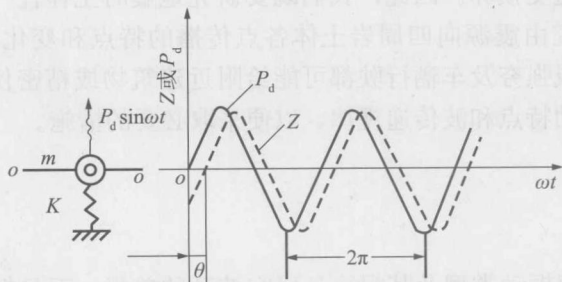


图2-2 质点简谐运动时扰力与位移的关系

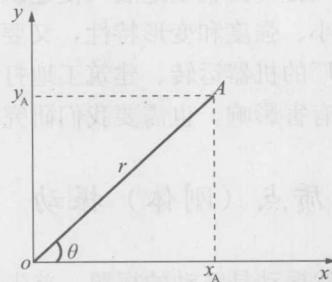


图2-3 复数表示法

在振动与波动的研究中,为使问题的分析简化,广泛使用简谐振动的复数表示法。在图2-3中,复平面 $x+iy$,则复数位移为

$$Z = A e^{i(\omega t - \theta)} = A e^{-i\theta} \cdot e^{i\omega t} \quad (2-4)$$

$$\text{令 } \bar{A} = A e^{-i\theta} = A (\cos\theta - i\sin\theta) \text{ arcsin}\theta$$

则式(2-4)可写成

$$Z = \bar{A} \cdot e^{i\omega t}$$

复数的模

$$r = |Z| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} (\geq 0)$$

幅角

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y_A}{x_A}$$

幅角表示位移滞后于扰力的相位角。

速度

$$\dot{Z} = i\omega Z \quad (2-5)$$

加速度

$$\ddot{Z} = -\omega^2 Z \quad (2-6)$$

需要注意, 这些关系仅对简谐振动成立。

2.2.2 振动分类

1. 按产生振动的原因分:

(1) 自由振动

当振动体系的平衡被破坏, 扰力已撤除, 只靠弹性恢复力来维持振动。振动的频率就是体系的固有频率(用 λ 表示)。当存在阻尼时, 振动会逐渐衰减直至停止。

(2) 强迫振动

在外扰力持续作用下, 体系被迫产生振动, 其振动特性与体系的动力参数有关, 如弹簧常数 K , 阻尼系数 c 和质量 m 以及外扰力方向、幅值、频率等。该条件下的振动频率就是扰力频率。

2. 按振动的振型分:

(1) 单向振动

仅用一个位移量或转角就可表示质点在某一个方向的瞬时位置(一个自由度), 如图 2-4 (a)所示的竖向振动和图 2-4 (b)所示的绕 z 轴的扭转振动。

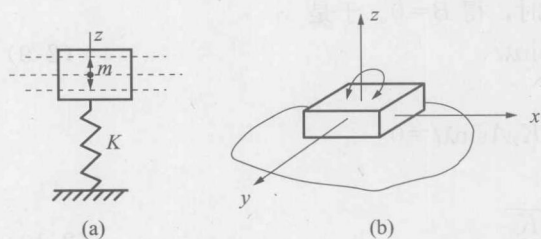


图 2-4 单向振动

(a) 竖向振动; (b) 扭转振动

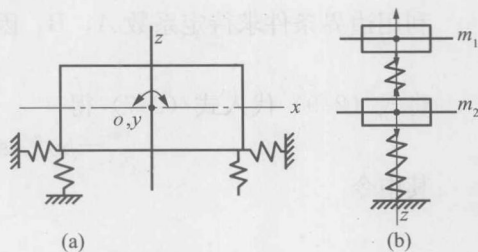


图 2-5 耦合振动

(a) 水平一摇摆振动; (b) 双质点竖向振动

(2) 耦合振动

需要用两个或两个以上的位移量或转角才能表示刚体在某一瞬时的位置(多自由度)。其振动特点是刚体在一个方向的运动必将引起另一方向的运动, 如图 2-5 (a)所示的刚体, 当沿 x 轴水平运动时, 引起绕 y 轴的摇摆振动。图 2-5 (b)是两个具有不同质量的刚体, 用两根弹簧串联, 当质量 m_1 沿 z 轴运动时, 引起质量 m_2 也沿 z 轴运动, 这也属于耦合振动。

3. 按振动规律分

(1) 简谐振动

能用一项正弦函数(或余弦函数)表达运动规律的振动, 该振动具有周期性。

(2) 复合周期振动

由有限个不同频率的简谐振动所合成，且任意两个简谐振动频率之比为有理数。

(3) 随机振动

不能用简谐振动或其简单合成来表达运动规律的振动，也就是无规律的非周期振动。

2.2.3 振动分析

1. 单向振动

(1) 竖向振动

1) 自由振动

① 无阻尼自由振动

图 2-6 是质量为 m 的刚体（或质点）置于弹簧常数为 K_z 的弹簧上振动。现选择静止时质点的位置 o 作为坐标原点，坚直方向为 z 轴，向下为正。从原点 o 开始作为竖向振动时间 t 的起点。在任一时刻 t ，质点离 o 点的距离为 Z ，显然位移 Z 是时间 t 的函数。作用于质点的弹性恢复力为 $K_z \cdot Z$ ，方向指向原点。质点（或刚体）的自重已与弹簧的静位移弹性反力相平衡了，故可不计入。质点运动的惯性力为 $m \cdot \ddot{Z}$ ，其方向与加速度 \ddot{Z} 方向相反。由此得出竖向无阻尼自由振动方程。

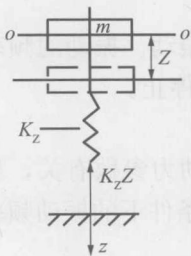


图 2-6 无阻尼自由振动

$$m\ddot{Z} + K_z Z = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{Z} + \frac{K_z}{m} Z = 0 \quad (2-7)$$

设解

$$Z = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t \quad (2-8)$$

利用边界条件求待定系数 A , B 。因 $t=0$ 时，得 $B=0$ 。于是

$$Z = A \sin \lambda t \quad (2-9)$$

将式 (2-9) 代入式 (2-7) 得

$$-m\lambda^2 A \sin \lambda t + K_z A \sin \lambda t = 0$$

其中令

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_z}{m}} \quad (2-10)$$

λ 称无阻尼自振圆频率，或固有圆频率（对于竖向振动 λ 写成 λ_z ）。固有圆频率取决于振动体系的动力参数——弹簧常数 K_z 和质量 m 。

振幅 A_z 由初始条件确定：

a. 若振动由初位移 Z_0 引起，则振幅 A_z 等于初位移 Z_0 ，即 $A_z = Z_0$ ；

b. 若振动由初速度 v_0 引起，则

$$v_0 = \dot{Z} \Big|_{t=0} = A_z \lambda \cos \lambda t \Big|_{t=0} = A_z \lambda$$

于是得

$$A_z = \frac{v_0}{\lambda_z} \quad (2-11)$$

式 (2-10) 和式 (2-11) 是锻锤基础动力计算的基本公式。

至此，可得无阻尼竖向振动质点的位移

$$Z = Z_0 \sin \lambda_z t \quad (2-12)$$

或

$$Z = \frac{v_0}{\lambda_z} \sin \lambda_z t$$

若以时间 t 为横坐标, 位移 Z 为纵坐标, 可绘出无阻尼振动 $Z-t$ 曲线 (或动力反应), 如图 2-7 所示。该曲线为等幅正弦曲线。

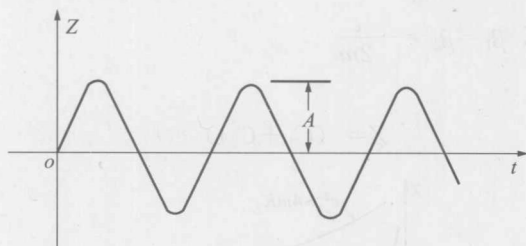


图 2-7 无阻尼自由振动时程曲线

由于无阻尼振动不耗失能量, 所以一经激发将无休止地振动下去。但实际情况并非如此, 因为自然界的各种振动现象总是有阻尼存在的, 自由振动总会逐渐衰竭而停止。无阻尼振动只是理论上的。相应的无阻尼自振圆频率 (λ) 可看成是振动体系的一个几何物理常数而不赋予物理意义, 为此称“固有圆频率”比较合适。

②有阻尼自由振动

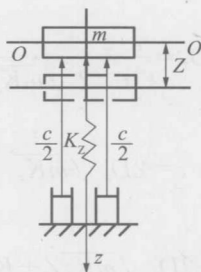


图 2-8 有阻尼自由振动

图 2-8 是有阻尼竖向自由振动计算模式。除了惯性力 $m\ddot{Z}$ 和弹性恢复力 $K_z Z$ 外, 再加上一个阻尼力 $c\dot{Z}$ 。该阻尼力视为黏滞体中质点移动的阻力, 故与质点运动速度 \dot{Z} 成正比, 方向与速度反向。用 c 表示单位速度时的阻尼力, 称阻尼系数。于是可写出振动方程

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + K_z Z = 0 \quad (2-13)$$

设解

$$Z = A_z e^{\beta t} \quad (2-14)$$

则式 (2-13) 得特征方程为

$$m\beta^2 + c\beta + K_z = 0 \quad (2-15)$$

解得

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2m} [-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK_z}] \quad (2-16)$$

讨论:

a. 当 $c^2 > 4mK_z$ 时, β_1 、 β_2 均为实数, 于是有

$$Z = C_1 e^{\beta_1 t} + C_2 e^{\beta_2 t} \quad (2-17)$$

式中 C_1 、 C_2 为常数, 位移 Z 按时间 t 的指数函数衰减, 最后为零, 如图 2-9 中 a 线。此时体系停止振动, 称“过阻尼体系”。

b. 当 $c^2 = 4mK_z$ 时, $\beta_1 = \beta_2 = -\frac{c}{2m}$ (2-18)

于是

$$Z = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t} \quad (2-19)$$

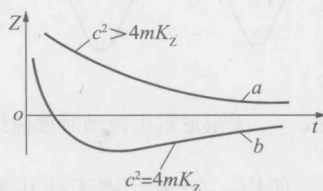


图 2-9 过阻尼和临界阻尼振动

此时体系不产生振动, 但面临即将发生振动的状态, 如图 2-9 中 b 线, 称“临界阻尼体系”, 其临界阻尼系数为 $c_{cr} = 2\sqrt{mK_z}$, 为了计算方便, 引用一个阻尼比即阻尼系数与临界阻尼系数之比

$$D_z = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mK_z}} \quad (2-20)$$

或

$$c = 2D_z \sqrt{mK_z}$$

于是振动方程可写成

$$m\ddot{Z} + 2D_z \sqrt{mK_z} \dot{Z} + K_z Z = 0 \quad (2-21)$$

或

$$\ddot{Z} + 2D_z \lambda_z \dot{Z} + \lambda_z^2 Z = 0$$

c. 当 $c^2 < 4mK_z$ 时, β_1 、 β_2 为共轭复数, 引入阻尼比 D_z 和固有圆频率 λ_z 后有

$$\beta_1 = \lambda_z (-D_z + i\sqrt{1-D_z^2}) \quad (2-22)$$

$$\beta_2 = \lambda_z (-D_z - i\sqrt{1-D_z^2})$$

于是振动位移

$$Z = e^{-D_z^2 t} (C_3 \sin \sqrt{1-D_z^2} \lambda_z t + C_4 \cos \sqrt{1-D_z^2} \lambda_z t) \quad (2-23)$$

振动曲线如图 2-10 所示。式中常数 C_3 、 C_4 由初始条件确定。当阻尼系数小于临界阻尼系数 (即 $D_z < 1$) 时, 振动是衰减的周期性运动, 而且有阻尼自振圆频率为

$$\lambda'_z = \sqrt{1-D_z^2} \cdot \lambda_z \quad (2-24)$$

λ'_z 称为有阻尼自振圆频率, 为了与固有圆频率 λ_z 有区别, 又称 λ'_z 为“自振圆频率”。

$\lambda'_z < \lambda_z$ 正像久未擦洗的机械式钟表每天都要走慢一些。

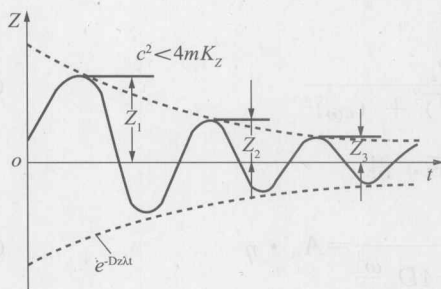


图 2-10 正常阻尼振动

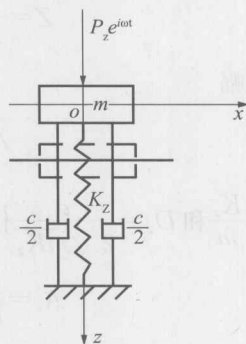


图 2-11 竖向强迫振动

机器基础竖向振动的阻尼比一般为 0.1~0.3, 若以 0.3 计, $\lambda'_z = 0.954\lambda_z$, 经过 3 个周期的振幅约为初始振幅的 0.3%。可见, 阻尼对振幅的衰减作用是很明显的。锻锤基础振动就是如此。

2) 强迫振动

质点(或刚体)在竖向扰力作用下, 引起体系竖向强迫振动, 如图 2-11 所示。其振动方程

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + K_z Z = P_z e^{i\omega t} \quad (2-25)$$

设解

$$Z = A_z e^{i(\omega t - \theta)} \quad (2-26)$$

则速度

$$\dot{Z} = iA_z \omega Z \quad (2-27)$$

加速度

$$\ddot{Z} = -A_z \omega^2 Z \quad (2-28)$$

代入方程(2-25)得

$$[(K_z - m\omega^2) + ic\omega] = P_z e^{i\omega t}$$

所以

$$Z = \frac{P_z e^{i\omega t}}{(K_z - m\omega^2) + ic\omega} = P_0 \left[\frac{K_z - m\omega^2}{(K_z - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} - i \frac{c\omega}{(K_z - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right] e^{i\omega t} \quad (2-29)$$

由于

$$\cos\theta = \frac{K_z - m\omega^2}{(K_z - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$\sin\theta = \frac{c\omega}{(K_z - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

位移滞后于扰力的相位角

$$\theta = \arctg \frac{c\omega}{K_z - m\omega^2} \quad (2-30)$$