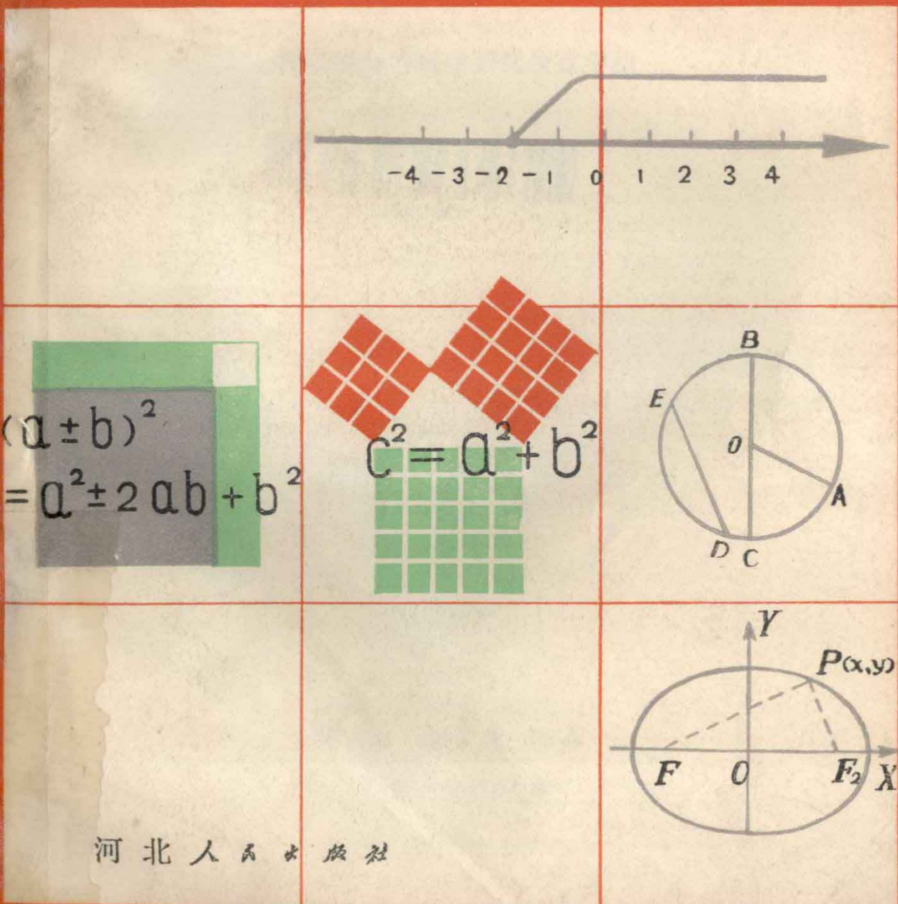
中学数学复习资料

下册

河北省教育科学研究所数学组



河北人民出版社

中学数学复习资料

下　　册

河北省教育科学研究所数学组

河北人民出版社
一九八一年·石家庄

责任编辑：杨士蕙
封面设计：董瑞成

中学数学复习资料
下 册
河北省教育科学研究所数学组

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）
石家庄地区印刷厂印刷　　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 10 5/8 印张 227,000字 印数：159,001—186,300
1980年4月第1版 1981年4月第2版
1981年4月第2次印刷　　统一书号：7086·1009　　定价0.75元

目　　录

立 体 几 何

I. 直线与平面

一、前　　言

1. 在日常生活中，我们经常接触到的物体，都可以抽象地当作各种不同的几何体。学习立体几何的目的，就是要研究这些几何体的共同性质。例如，多面体的共同性质就是它们的表面都是平面，顶角都是多面角，而旋转体就没有这些性质。平面几何是学习立体几何的基础，往往根据立体图形的截面的性质，解决立体图形的计算、证明、作图等问题。

2. 两条直线的位置关系，在空间和在同一平面内是有区别的。如果两条直线在同一平面内，就只有重合、相交、平行三种关系；但如果是空间的两条直线，除以上三种关系外，还有一种既不相交也不平行的关系，这样的两条直线叫异面直线，这个概念在空间图形里存在。

3. 直线与平面以及平面与平面都只有三种位置关系，就是重合、相交和平行。至于直线与平面垂直，平面与平面垂直，只不过是相交的特殊情况。在分析空间图形的时候，首先要确定它们的位置关系并加以讨论，否则会引出错误的结果，这一点要注意。

4. 关于直线与平面平行或垂直的判定问题

（1）一条直线与平面是否平行，在于在这个平面内是否可以找到一条直线与已知直线平行．如果找到，就有无数条直线与已知直线平行．因为两条平行直线可以决定一个平面，过已知直线的一切平面，与已知平面的交线一定与这直线平行．根据空间平行直线的传递性，这些交线都是相互平行的．反过来，如果直线与平面不平行(重合除外)，在这平面内就找不到任何一条直线与已知直线平行，因为这时直线与平面相交于一点，所以过这直线的一切平面必与已知平面相交，而且它们的交线必过它们的交点，显然，在已知平面内就作不出已知直线的平行线．如果直线与平面不平行，在平面内就不能找到任何一条直线平行于已知直线．

（2）一条直线与平面是否垂直，决定于这直线是否能与平面内的一切直线垂直．如果能够证得这条直线与平面内的两条相交直线都垂直，就能导出与这平面内的一切直线垂直，也就能判定这直线与平面垂直．但是，如果一条直线与平面内的一条直线或两条平行直线垂直，我们就不能错误地认为这条直线和平面互相垂直．因为，这条直线不可能与这平面内的一切直线都垂直．

5．三垂线定理和它的逆定理的应用很广泛．我们应用三垂线定理可以判定不相交两直线的垂直．例如，平面 M 内的一条直线 a 垂直斜线 PA 在平面 M 内的射影 AO（图1），那末 $a\perp PA$（a 与 PA 并不相交)

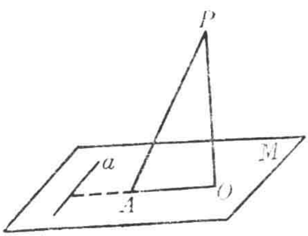


图 1

另外，我们还应用三垂线定理

判定图形的形状，特别是判定直角三角形。例如，长方体 BD_1（图 2），其中 BD_1 和 BC_1 分别是它的对角线和侧面 BB_1C_1C 的对角线。

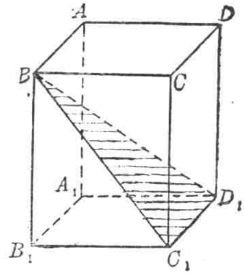


图 2

因为，$C_1D_1 \perp B_1C_1$，而 BB_1 垂直于平面 B_1D_1，所以 $BC_1 \perp C_1D_1$。就是 $\angle BC_1D_1$ 是直角（这里也可以应用直线垂直于平面的性质）。

又如，VA 垂直于平面 M（图 3），$ABCD$ 是平面 M 内的正方形，根据三垂线定理就可以判定

$$\angle VBC = \angle VDC = d$$

就是 $\triangle VBC$ 及 $\triangle VDC$ 都是直角三角形。

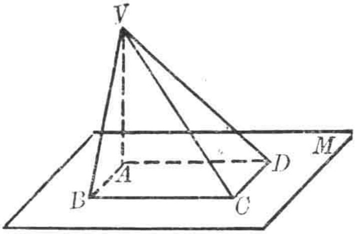


图 3

6．判定两个平面平行，必须是一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面；如果仅仅是一个平面内的两条直线都平行于另一平面，这两个平面就不一定平行。

如果两个平面平行，在一个平面内的一切直线都与另一个平面平行。但是如果在这两个平面内分别任意取一条直线，这两条直线就不一定相互平行。如果在同一平面内，它们就平行；如果是异面直线，就不平行。

如果两个平面垂直于一条直线，那么它们必相互平行。当两个平面平行于一条直线的时候，这两个平面可能相交，

也可能平行.

同样地，如果两条直线同平行于一个平面，这两条直线就不一定平行. 但如果两条直线同垂直于一个平面，那么它们必相互平行.

7. 关于两个平面相互垂直，应当同二面角的概念联系起来. 因为两个垂直平面所构成的二面角是直二面角.

如果知道一个平面内含有一条直线垂直于另一个平面，那么就可以判定这两个平面相互垂直. 关于两个平面垂直的性质应用很广泛，因此对这一性质的应用必须熟练；特别在两个以上的平面间存在着相互垂直的关系时，就往往会给复杂的图形所迷惑，对此必须通过多作图多联系实际物件，以逐步加强空间想象力而加以克服.

二、内 容 提 要

本单元主要是叙述直线与直线、直线与平面、平面与平面等各种位置关系和它们的性质；在平面内表示平面图形的绘图方法；以及点、线、面之间的距离计算.

（一）平面的确定

具有下列条件之一的平面是唯一的

1. 过不在同一直线上的三点；
2. 过二相交直线；
3. 过二平行直线.

（二）直线与直线的位置关系

1．重合——有无数个公共点；

2．相交——有一个公共点；

3．平行——在同一平面内，没有公共点；

4．异面直线——不在同一平面内的两条直线（也就是它们既不平行，也不相交）。

重合、相交、平行都是同一个平面内的两直线，要确定它们的位置，只要知道它们的交角或距离就可以了。要确定异面直线的位置关系，不仅要知道它们的交角的度数，而且还要知道它们之间的距离。至于两条重合的直线，可以看成是交角等于零度，或者看成它们的距离等于零。

（三）直线和平面的位置关系

1．直线在平面内

一条直线和平面有两个公共点，那么这条直线在平面内。

2．直线和平面平行

（1）定义　如果一条直线和一个平面没有公共点，那么这条直线和这个平面平行。

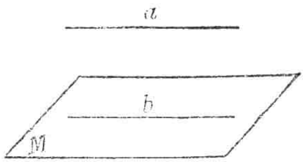


图 4

（2）判定　平面 M 外的一条直线 a 如果和这个平面内的一条直线 b 平行，那么这条直线 a 就和这个平面平行。

（3）性质　如果一条直线 a 和一个平面 M 平行，经过这条直线 a 的一个平面 N 和这个平面 M 相交，那么这条直线 a 就和交线 b 平行（图5）。

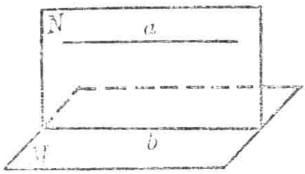


图 5

3．直线和平面相交

（1）直线和平面垂直

1）定义　如果一条直线和一个平面相交，并且与这个平面内过交点的每条直线都垂直，就叫做这条直线和这个平面互相垂直．这直线叫做平面的垂线，交点叫做垂足．

2）判定　如果一条直线 a 与平面 M 内的两条相交直线 c、b 都垂直，那么这条直线 a 和这个平面 M 垂直(图6)。

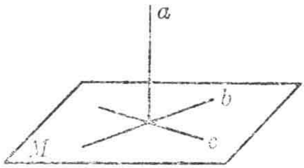


图 6

3）性质　如果两条直线 a 和 b 同垂直于一个平面 M，那么这两条直线 a 和 b 平行（图7）。

（2）直线和平面斜交

直线与平面相交而不与平面垂直叫做直线与平面斜交，这直线叫做平面的斜线，交点叫做斜足。

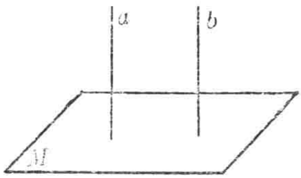


图 7

从平面外一点到这平面引垂线和斜线，垂足和斜足间的线段叫做斜线在平面内的射影。

（3）三垂线定理和它的逆定理

1）三垂线定理　在平面 M 内的一条直线 ED，如果

和这个平面内的一条斜线 AB 的射影 BC 垂直，那么这条直线 ED 也和这条斜线 AB 垂直（图 8）。

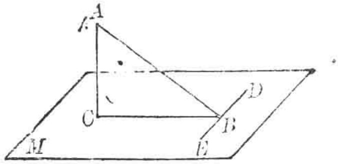


图 8

2）三垂线定理的逆定理

在平面 M 内的一条直线 ED，如果和这个平面的一条斜线 AB 垂直，那么这条直线 ED 也和这条斜线 AB 的射影 BC 垂直。

（4）直线和平面相交所成的角

一个平面的斜线 AB 和它在平面 M 内的射影 BC 所成的锐角 $\angle ABC$，叫做这条直线 AB 和这个平面 M 所成的角。如直线与平面 M 垂直，就说直线与平面成 90° 的角；如果直线与平面平行（或直线在平面内），就说直线与平面成 0° 角。

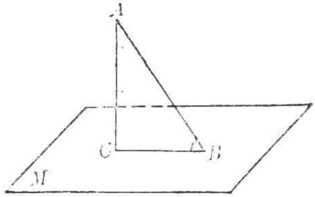


图 9

（四）两平面的位置关系

1．两个平面相交

（1）二面角和它的平面角　从一条直线 EF 出发的两个半平面 M、N 所成的图形 $M—EF—N$ 叫做二面角（图10）。这条直线 EF 叫做二面角的棱；这两个半平面 M、N 叫做二面角的面。

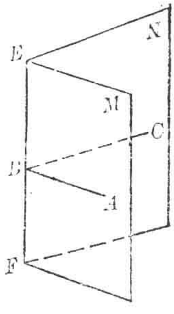


图 10

从二面角的棱 EF 上任意一点 B，在两个平面 M、N 内，分别作垂直于棱 EF

的两条射线，这两条射线所成的角$\angle ABC$，叫做二面角$M—EF—N$的平面角。如果一个二面角的平面角是$n°$的角，那么这个二面角就叫做$n°$的二面角。

（2）两个平面垂直

1）定义　如果两个平面相交所成的二面角是直二面角，就叫做这两个平面互相垂直。

2）判定　如果一个平面M经过另一个平面N的一条垂线a，那么这两个平面M、N垂直（图11）。

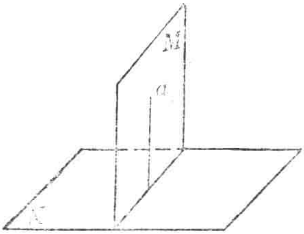


图 11

3）性质　如果两个平面M、N互相垂直，那么在一个平面M内垂直于它们交线b的直线a，垂直于另一个平面N（图12）。

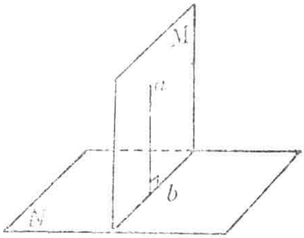


图 12

2．两个平面平行

（1）判定

1）如果在一个平面M内有两条相交直线a，b，平行于另一个平面N，那么这两个平面M、N平行（图13）。

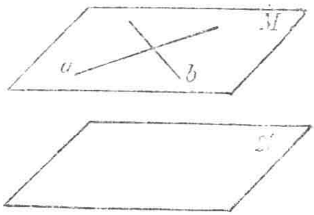


图 13

2）同垂直于一条直线a的两个平面M、N互相平行（图14）。

（2）性质

1）如果两个平行平面 M、N 分别和第三个平面 P 相交，那么它们的交线 a、b 互相平行(图15)。

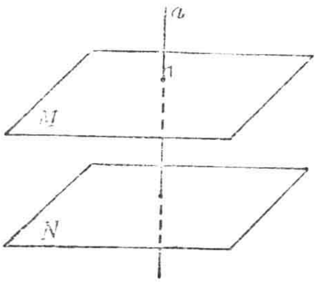


图 14

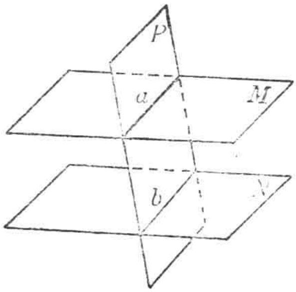


图 15

2）如图 16 所示，夹在两个平行平面 M、N 之间的平行线段 a、b 相等。

3）如果一条直线 a 垂直于两个平行平面 M、N 中的一个平面 M，那么这条直线 a 也垂直另一个平面 N，如图17所示。

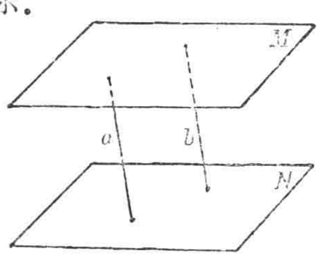


图 16

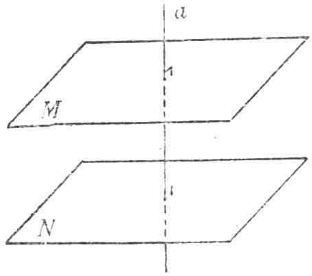


图 17

三、例　　题

例 1　已知 A、B、C、D是空间的四点，AB、CD 是异面直线，求证 AC 和 BD、AD 和 BC 也都是异面直线。

已知　A、B、C、D是空间的四点，AB、CD是异面直线（图18）.

求证　AC和BD、AD和BC都是异面直线.

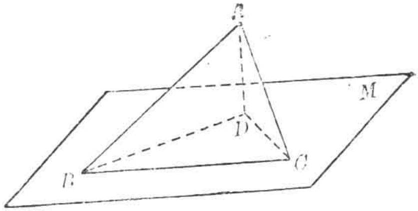


图 18

证明　设AC和BD不是异面直线，即AC、BD在同一平面内，则A、B、C、D在同一平面内，于是AB、CD在同一平面内，但这与假设矛盾.

所以AC和BD是异面直线.

同理可证AD、BC也是异面直线.

例 2　一条直线和一个平面相交，那末这直线被交点分成的两条射线和这平面所成的两个角相等.

分析　根据直线和平面所成的角的定义，知道从AC上任意一点A和BC上任意一点B各作平面P的垂线AD和BE，那末$\angle ACD$和$\angle BCE$就是AC、BC和平面P所成的角，要证$\angle ACD=\angle BCE$，只须证它们是对顶角，即证DCE是一直线就可以了.

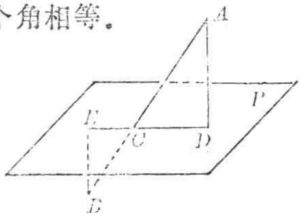


图 19

已知　如图19所示，直线AB交平面P于C点.

求证　AC、BC和平面P所成的两个角相等.

证明　在AC和BC上分别任意取出一点A和B，作$AD\perp$平面P、$BE\perp$平面P，于是$AD\parallel BE$. 因此两条平行线AD

和BE可以确定一个平面，这个平面和P平面的交线是DE。因为AB在AD和BE所确定的平面内，C是AB和平面P的公共点，所以C在两个平面的交线DE上，即$\angle ACD$和$\angle BCE$是对顶角。因此$\angle ACD=\angle BCE$。

例 3　在正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，求异面直线（1）DD_1与BC；（2）A_1B与AC所成的角的度数。

已知　$ABCD—A_1B_1C_1D_1$为正方体。

求　异面直线DD_1与BC、A_1B与AC所成的角的度数。

解　（1）$\because B_1B\parallel D_1D$，$\therefore \angle B_1BC$是$DD_1$与$BC$所成的角。又$\angle B_1BC=90°$，所以$DD_1$与$BC$所成的角是$90°$。

（2）连接A_1C_1、BC_1，则$A_1B=BC_1=A_1C_1$，$\therefore \angle C_1A_1B=60°$。又$A_1C_1\parallel AC$，所以$\angle C_1A_1B$就是$A_1B$与$AC$所成的角。因此$A_1B$与$AC$所成的角是$60°$。

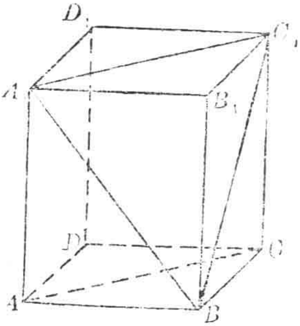


图 20

例 4　由矩形$ABCD$的顶点A引线段AK垂直于这个矩形所在的平面M，点K到B、C、D的距离分别为6cm、9cm、7cm。求AK的长。

已知　矩形$ABCD$在平面M内，$AK\perp$平面M且$BK=6\text{cm}$，$CK=9\text{cm}$，$DK=7\text{cm}$

求　$AK=?$

解　$\because AK\perp$平面

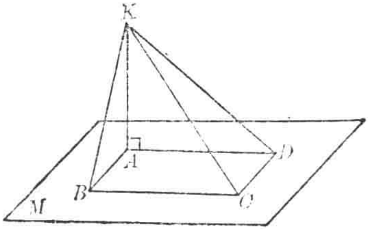


图 21

M，∴AD、AB 分别为 KD、KB 在平面 M 的射影，且 $AK\perp AB$。

又∵$ABCD$ 是矩形，∴$AD\perp CD$，根据三垂线定理 $KD\perp DC$。

在直角$\triangle KDC$ 中

$$DC=\sqrt{CK^2-DK^2}=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2},$$

即 $AB=4\sqrt{2}$。

在直角三角形KAB中，

$$AK=\sqrt{BK^2-AB^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}$$
$$=2\,(\text{cm}),$$

即，AK 的长等于2cm。

例 5　一条线段的一端在一个平面内，过这线段在平面内的射影的中点，作一个平面垂直于这射影，那末这所作的平面必平分原线段。

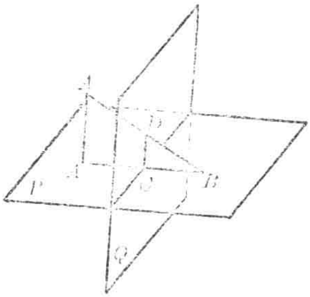


图 22

分析一　要证 $AD=DB$，因为已知 $A'C=CB$，所以只须先证 $DC\parallel AA'$，但 $AA'\perp$ 平面P，因此若能证明 $DC\perp$ 平面 P，问题就可以解决。要证 $DC\perp$平面P，因DC 是平面Q和平面$AA'B$ 的交线，而平面 $AA'B\perp$平面P。所以只须证平面 $Q\perp$平面 P 即可，但题设平面$Q\perp A'B$，而 $A'B$在平面P 内，于是上述的目的就可以达到。

已知　如图22所示，线段AB 的一端B在平面P内，AB 在平面 P 内的射影是 $A'B$，平面 Q 过$A'B$ 的中点C 而垂

直于 $A'B$，且交 AB 于 D。

求证 $AD=DB$。

证明一 ∵平面 $Q\perp A'B$，而 $A'B$ 在平面 P 内，∴平面$Q\perp$平面P；又∵$AA'\perp$平面P，∴平面 $AA'B\perp$平面P。于是知道$DC\perp$平面P。

由上面得 $AA'\parallel DC$。在$\triangle AA'B$中，∵ $A'C=CB$ $AA'\parallel DC$，∴$AD=DB$。

分析二 设法先证$DC\parallel AA'$。因为 $A'A\perp A'B$，所以只须先证$DC\perp A'B$即可，这样的证法比较简单，因此有

证明二 ∵平面 $Q\perp A'B$，∴$DC\perp A'B$。又∵ $A'A\perp$平面P，∴$AA'\perp A'B$。∵DC和 AA'在同一平面内，并且都垂直于$A'B$，∴$DC\parallel AA'$。

在$\triangle AA'B$中，∵$A'C=CB$，$A'A\parallel DC$，∴$AD=DB$。

注意：（1）两条直线都垂直于第三条直线，不能确定这两条直线互相平行，必须这两条直线在同一平面内才可以。

（2）一个问题的证法虽有几种，但我们应尽可能设法寻求比较简单的证明方法。例如在上面的两种证法中，第一种是走了一些弯路，第二种证法简捷。

例 6 直角三角形ABC所在的平面M外有一点P，如果已知 P 点到直角顶点 C 的距离是 24cm，到两直角边的距离都是 $6\sqrt{10}$ cm。求（1）点 P 到平面M 的距离；（2）PC 与平面M的夹角。

已知 $\triangle ABC$为直角三角形，C 为直角顶。$PC=24$cm，$PD\perp CB$，$PE\perp AC$，且

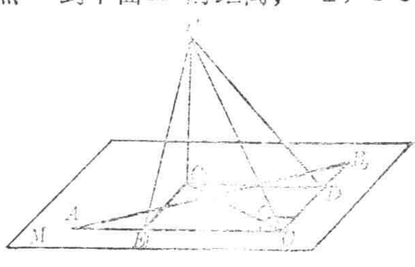


图 23