

美国MCM/ICM竞赛指导丛书

# 美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第4辑

窦霁虹 王连堂 孟文辉 高晓汎  
苏永利 勾明 许永峰 张博



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

美国MCM/ICM竞赛指导丛书

# 美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

Meiguo Daxuesheng Shuxue Jianmo Jingsaiti Jiexi yu Yanjiu

第 4 辑

窦霁虹 王连堂 孟文辉 高晓沅  
苏永利 勾 明 许永峰 张 博



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本系列丛书是以美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM)赛题为主要研究对象,结合竞赛特等奖的优秀论文,对相关的问题做深入细致的解析与研究。本辑针对2003年及2004年MCM/ICM竞赛的6个题目:特技演员的安全问题、伽马刀治疗方案问题、航空行李扫描策略问题、指纹的唯一性问题、快速通过系统设计问题以及校园网安全措施优化配置问题进行了解析与研究。

本书内容新颖、实用性强,可作为指导学生参加美国大学生数学建模竞赛的主讲教材,也可作为本科生、研究生学习和准备全国大学生、研究生数学建模竞赛的参考书,同时还可供研究相关问题的教师和研究生参考使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

美国大学生数学建模竞赛题解析与研究. 第4辑 / 窦  
霓虹等编著. — 北京: 高等教育出版社, 2014. 1

(美国MCM/ICM竞赛指导丛书 / 王杰主编)

ISBN 978-7-304-03875-1

I. ①美… II. ①窦… III. ①数学模型-竞赛题-研  
究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第270938号

策划编辑 刘 英  
插图绘制 尹 莉

责任编辑 刘 英  
责任校对 张小镝

封面设计 李卫青  
责任印制 韩 刚

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 涿州市星河印刷有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 13.75  
字 数 220千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2014年1月第1版  
印 次 2014年1月第1次印刷  
定 价 39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 38751-00

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”  
编审委员会

顾 问

Sol Garfunkel 美国数学及应用联合会 (COMAP)  
Chris Arney 美国西点军校

主 编

王 杰 美国麻省大学罗威尔分校/COMAP 中国合作部  
朱 旭 西安交通大学

秘 书

王嘉寅 美国圣路易斯华盛顿大学

委 员 (按姓氏拼音排序)

Jay Belanger 美国杜鲁门州立大学  
陈秀珍 美国乔治华盛顿大学  
冯国灿 中山大学  
龚维博 美国麻省大学阿默斯特分校  
韩中庚 解放军信息工程大学  
李向阳 美国伊利诺伊理工大学  
杨新宇 西安交通大学  
叶正麟 西北工业大学  
张存权 美国西弗吉尼亚大学

# COMAP 总裁序

---

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM) 已经举办近 30 年了, 时间真是快得难以置信。在此期间, 竞赛从最初参赛的 90 支美国队逐渐发展成为一个国际大赛, 今年已有来自世界各地的 25 个国家超过 5 000 支队伍参赛。尤其令人感动和鼓舞的是我的中国同事们对竞赛赋予的极大热情以及中国参赛队伍的快速增长。COMAP 张开双臂欢迎你们的参与。

COMAP 每年举办 3 个建模竞赛, 即 MCM, ICM (the Interdisciplinary Contest in Modeling) 和 HiMCM (the High School Mathematical Contest in Modeling) 竞赛。竞赛的目的不仅仅是奖励同学们所作出的努力——无疑这是同样重要的, 我们举办各类数学建模竞赛的目的始终是为了推动在世界各国的各级教育体系中增加应用数学及数学建模的比重。建模是人们为了解世间事物的运作规律所做的尝试, 数学的使用能够帮助我们建立更好的模型。这不是一个国家的任务, 而是所有国家都应该共同关心的问题。COMAP 建模竞赛从孕育到现在已经演变成实现这一宏伟目标的有力工具。

我热切地希望同学们通过阅读这套优秀的丛书, 对 COMAP 竞赛有更多的了解, 并且学习到更多有关数学建模的方法与过程。我希望同学们尝试自己解决丛中讨论的所有建模问题, 这些都是令人兴奋并且具有实用价值的问题。我希望更多的同学参加 MCM/ICM 竞赛, 并参与推广和普及数学建模的活动, 这是很有意义的工作。

萨尔·加芬克尔, 博士

COMAP 总裁

2012 年 11 月

# Forward by Sol Garfunkel

---

While it is hard for me to believe, the Mathematical Contest in Modeling (MCM) is fast approaching its 30<sup>th</sup> year. During this time we have grown from 90 US teams to over 5,000 teams representing 25 countries from all across the globe. We have been especially buoyed by the enthusiasm shown by our Chinese colleagues and the rapid growth in Chinese participation. COMAP welcomes your involvement with open arms.

COMAP runs three contests in mathematical modeling; they are MCM, ICM (the Interdisciplinary Contest in Modeling), and HiMCM (the High School Mathematical Contest in Modeling). The purpose of all of these contests has never been simply to reward student efforts—as important as that is. Rather, our objective from the beginning has been to increase the presence of applied mathematics and modeling in education systems at all levels worldwide. Modeling is an attempt to learn how the world works and the use of mathematics can help us produce better models. This is not a job for one country, but for all. The COMAP modeling contests were conceived and evolved to be strong instruments to help achieve this much larger goal.

It is my supreme hope that through this excellent book series the Chinese students will learn more about COMAP contests and more about the process of mathematical modeling. I hope that you will begin to work on the exciting and important problems you see here, and that you will join the MCM/ICM contests and the rewarding work of increasing the awareness of the importance of mathematical modeling.

Sol Garfunkel, PhD  
Executive Director  
COMAP  
November 2012



# ICM 竞赛主席序

---

数学建模的训练与经验能使同学们在解决问题时更有创意，同时也能帮助同学们成为更为优秀的研究生。“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”的出版，将通过数学建模竞赛题目和概念的解析，帮助同学们掌握数学建模的技能，并为同学们在今后的工作中获得成功打下坚实的基础。

数学建模是一种过程，也是一种理念，或者说是一种哲学。作为过程，学生在理解及使用建模过程或框架时需要指导并积累经验。作为经验，学生需要使用不同的数学方法（离散、连续、线性、非线性、随机、几何及分析）构造数学模型，从中体验不同的细节及复杂程度。作为理念，学生需要发现各种相关的、具有挑战性的及有趣的实际问题，从中培养对数学建模的兴趣，并认识到数学建模在实际生活中的作用。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。尽管在实际中，有些问题或许可以使用已有的算法和公式来求解，但数学建模的方法比简单使用已有算法和公式能解决更多的问题，特别是解决新的、没有固定答案及没有被解决过的问题。

为了积累经验，同学们应尽早地接受数学建模训练，至少应该在大学低年级时就开始，这样可以在以后的课程学习中进一步强化数学建模能力。由于数学建模的综合与交叉特性，所以各个专业的学生都能够从数学建模活动中受益。

本套丛书从将数学模型作为研究工具的角度出发，介绍模型的构造，分析建模过程，这些都是帮助学生更好地掌握数学建模技能的重要因素。数学建模是充满挑战的高级技能，更重要的是能够帮助学生更好地成长。当今世界需要解决的问题往往很复杂，所以建立的数学模型也很复杂，通常需要通过精细的计算和模拟才能获得解答或对模型结果的分析与检验。由于数据可视化技术的普及，解题方法的增加，所以现在的确是培养更多数学建模高手的最佳时期。

我希望同学们在数学建模探索中取得进步，也希望指导教师在使用这套丛书提供的例子及方法指导学生时取得很好的效果。尽管学生的层次可能不同，但我对你们的忠告是同样的：树立你的信心，发展你的技能，用你的才能解决社会中最具挑战及最重要的问题。祝各位建模好运！

克里斯·阿尼，博士  
美国西点军校数学系教授  
ICM 竞赛主席  
2011 年 10 月

# Forward by Chris Arney

---

Undergraduate students who receive instruction and experiences in mathematical modeling become better and more creative problem solvers and graduate students. This book series is being published to prepare and educate students on the topics and concepts of mathematical modeling to help them establish a problem solving foundation for a successful career.

Mathematical modeling is both a process and a mindset or philosophy. As a process, students need instruction and experience in understanding and using the modeling process or framework. As part of their experience, they need to see various levels of sophistication and complexity, along with various types of mathematical structures ( discrete, continuous, linear, nonlinear, deterministic, stochastic, geometric, and analytic ). As a mindset, students need to see problems that are relevant, challenging, and interesting so they build a passion for the process and its utility in their lives. A major goal in modeling is for students to want to model problems and find their solutions. Recipes for structured or prescribed problem solving ( canned algorithms and formulas ) do exist in the real world, but mathematical modelers can do much more than execute recipes or formulas. Modelers are empowered to solve new, open, unsolved problems.

In order to build sufficient experience in modeling, student exposure must begin as early as possible – definitely by the early undergraduate years. Then the modeling process can be reinforced and used throughout their undergraduate program. Since modeling is interdisciplinary, students from all areas of undergraduate study benefit from this experience.



The articles and chapters in this series expose the readers to model construction, model analysis, and modeling as a research tool. All these areas are important and build the students' modeling skills. Modeling is a challenging and advanced skill, but one that is empowering and important in student development. In today's world, models are often complex and require sophisticated computation or simulation to provide solutions or insights into model behavior. Now is an exciting time to be a skilled modeler since methodology to provide visualization and find solutions are more prevalent and more powerful than ever before.

I wish the students well in their adventure into modeling and I likewise wish faculty well as they use the examples and techniques in this book series to teach the modeling process to their students. My advice to all levels of modelers is to build your confidence and skills and use your talents to solve society's most challenging and important problems. Good luck in modeling!

Chris Arney, PhD

United States Military Academy at West Point

Professor of Mathematics

Director of the Interdisciplinary Contest in Modeling

October 2011

# 丛书简介

---

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM/the Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM), 即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”, 是一项国际级的竞赛活动, 为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。

1985年, 在美国教育部的资助下, 在美国针对在校大学生创办了一个名为“数学建模竞赛”的竞赛, 其宗旨是鼓励大学师生对不同领域的各种实际问题进行阐明、分析并提出解决方案。它是一种完全公开的竞赛, 参赛形式为学生三人组成一队, 在3天(72小时)(近年改为4天, 即96小时)内任选一题, 完成数学建模的全过程, 并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解(及软件)、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围与自我评价等内容写出论文。MCM/ICM非常重视解决方案的原创性、团队合作与交流以及结果的合理性。由专家组成的评阅组进行评阅, 评出优秀论文。除了不允许在竞赛期间与团队以外的任何人(包括指导教师)讨论赛题之外, 允许使用图书资料、互联网上的资料、任何类型的软件等各种资料和途径, 从而为参赛学生提供了广阔的创作空间。第一届竞赛时, 只有美国的158个队报名参加, 其中只有90个队提交了解答论文。2012年MCM/ICM共有5026个队参加, 其中MCM有3697个队, ICM有1329个队, 遍及五大洲。MCM/ICM已经成为最著名的国际大学生竞赛之一, 影响极其广泛。

近年来, 已有越来越多的中国学生组队参加美国大学生数学建模竞赛, 其中不乏被评为优胜论文(Outstanding Winners)的佼佼者, 这充分显示了我国大学生参加MCM/ICM的积极性与实力。学生在准备竞赛的时候, 除了在指导教师的帮助下阅读和研究以往竞赛的优胜论文以外, 普遍希望能有一些专门针对美国大学生数学建模竞赛的书籍, 指导和帮助备赛。

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”就是为了满足读者的这一需求而出版的，目的是帮助学生从全局出发，不受固定模式的限制，用建模的手段解决开放性问题的研究方法，并提高写作能力。丛书的读者对象包括参赛学生及对数学建模与算法感兴趣的研究生、专业人员和业余爱好者。

我们邀请到 COMAP 中国合作总监、美国麻省大学罗威尔分校王杰教授担任丛书主编，他曾为 MCM/ICM 命题，对竞赛具有很多独到的认识。丛书作者来自各高校，他们都是有经验的指导教师或参加过竞赛的优秀成员。丛书包括一本《正确写作美国大学生数学建模竞赛论文》和若干辑《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》，前者为一本指导学生如何正确写作 MCM/ICM 论文的工具书，后者中的每一辑将讨论若干赛题，包括问题的背景、分析技巧、建模与测试方法及算法设计，并引导读者列出进一步研究的课题。目标是培养学生多方面的能力，如数学、编程、写作及课题研究等的训练，提高学生分析问题、解决问题的水平。

丛书的出版计划得到了美国数学建模专家的广泛支持，COMAP 总裁 Sol Garfunkel 博士及 ICM 主席、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士受邀担任丛书顾问并为丛书作序。

我们热切希望通过这套丛书的出版，进一步活跃我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性，提高他们的自信心，并最终取得满意的成绩。更为重要的是，提高学生的研究和解决实际问题的能力。

# 前言

---

本书是“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》的第 4 辑，包括 2003 年和 2004 年 MCM/ICM 的 6 个赛题，从问题的提出、问题的背景、解决问题的数学模型、求解方法与结果分析以及进一步可研究的拓展性问题等内容展开讨论。这些赛题所涉及的问题大都来自于社会生活中的实际问题以及人们关注的热点问题，对这些问题的研究有助于为专业技术工作者提供可靠的研究思路和方法。

本辑包括 2003 年和 2004 年 MCM/ICM 的 6 个赛题，分为 6 章，涉及的建模方法有层次分析法、排队论方法、数学规划法和概率论方法，建立的模型有微分方程模型、概率统计模型、线性和非线性规划模型等。

2003 年 MCM 的 A 题“特技演员的安全问题” (The Stunt Person)，是研究特技表演中为了防止特技演员掉落伤害用以缓冲保护所使用纸箱的设计问题；该年的 B 题“伽马刀治疗方案问题” (Gamma Knife Treatment Planning)，研究的主要问题是设计一个伽马刀手术的最佳治疗方案来减少手术靶点个数，并达到成功治疗颅内肿瘤病灶的效果；该年 ICM 的 C 题“航空行李扫描策略问题” (Aviation Baggage Screening Strategies: To Screen or Not to Screen, that is the Question)，研究的是航空安全中爆炸物检测系统的配置以及航班安排的问题。2004 年 MCM 的 A 题“指纹的唯一性问题” (Are Fingerprints Unique?)，研究的是生物特征识别技术领域的指纹唯一性方面的问题；该年的 B 题“快速通过系统设计问题” (A Faster Quick Pass System)，研究的问题是设计一种高效的快速通过系统来减少游客的排队时间提高游客满意度，同时针对系统在实施过程中出现的不公平现象给出合理的解决方案；该年 ICM 的 C 题“校园网安全措施优化配置问题” (Secure or Not to Be?)，研究的是网络安全领域优化

方面的问题。

本书的第1章由孟文辉撰写，第2章由高晓沅撰写，第3章由苏永利撰写，第4章由窦霁虹撰写，第5章由勾明和许永峰撰写，第6章由张博撰写。窦霁虹负责组织联络，王连堂负责统稿。其中高晓沅为上海交通大学电子信息与电气工程学院教师，其余各位作者为西北大学数学系教师。

在本书撰写过程中，丛书主编王杰教授给予了富有启示性的建议，高等教育出版社刘英副编审付出了辛勤的劳动，西北大学数学系徐哲峰副主任做了大量的组织协调工作，韩俊杰等研究生做了认真细致的整理工作，同时西北大学数学系在各方面也给予了大力支持，在此一并表示诚挚的感谢。

书中难免有诸多不妥之处，敬请读者批评指正。

西北大学 王连堂

2013年6月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目录

---

COMAP 总裁序

Forward by Sol Garfunkel

ICM 竞赛主席序

Forward by Chris Arney

丛书简介

前言

<b>第 1 章 特技演员的安全问题</b> .....	1
1.1 问题的综述 .....	1
1.1.1 问题的提出 .....	1
1.1.2 问题的背景资料 .....	3
1.2 问题的数学模型与结果分析 .....	7
1.2.1 问题分析 .....	7
1.2.2 问题假设 .....	8
1.2.3 飞跃轨迹及落点分析 .....	8
1.2.4 模型一 .....	10
1.2.5 模型二 .....	17
1.2.6 堆积方式及计算机仿真 .....	21
1.3 问题的综合分析 with 进一步研究的问题 .....	23
1.3.1 问题的综合分析 .....	23
1.3.2 进一步研究的问题 .....	25
参考文献 .....	25



---

第 2 章 伽马刀治疗方案问题 .....	27
2.1 问题的综述 .....	27
2.1.1 问题的提出 .....	27
2.1.2 参赛状况 .....	29
2.2 问题的背景资料 .....	30
2.2.1 立体定向放射外科手术 .....	30
2.2.2 伽马刀手术设备 .....	31
2.2.3 伽马刀手术的步骤 .....	33
2.3 伽马刀问题的来由与发展 .....	35
2.3.1 MCM 2003 年 B 题的来由 .....	35
2.3.2 伽马刀相关优化问题的国内外学术发展 .....	35
2.3.3 伽马刀相关优化问题的常用建模思路 .....	36
2.4 数学规划模型与结果分析 .....	37
2.4.1 剂量方程 .....	37
2.4.2 目标函数 .....	39
2.4.3 混合型整数规划 .....	40
2.4.4 非线性规划 .....	41
2.4.5 实验测试 .....	42
2.5 贪心算法模型与结果分析 .....	45
2.5.1 焚烧草地技术 .....	45
2.5.2 最少的最大球体填充 .....	46
2.5.3 最速下降法与自适应填充 .....	51
2.6 启发式算法模型与结果分析 .....	55
2.6.1 遗传算法 .....	55
2.6.2 模拟退火算法 .....	60
2.7 问题的综合分析与进一步研究的问题 .....	64
2.7.1 问题的综合分析 .....	64
2.7.2 进一步研究的问题 .....	65
参考文献 .....	66

<b>第 3 章 航空行李扫描策略问题</b> .....	71
3.1 问题的综述 .....	71
3.2 问题的背景资料 .....	78
3.3 问题的数学模型与结果分析 .....	79
3.3.1 模型一：概率模型 .....	79
3.3.2 模型二：队列服务模型 .....	89
3.4 问题的综合分析与进一步研究的问题 .....	103
3.4.1 问题的综合分析 .....	103
3.4.2 进一步研究的问题 .....	105
参考文献 .....	105
<b>第 4 章 指纹的唯一性问题</b> .....	107
4.1 问题的综述 .....	107
4.2 问题的背景资料 .....	108
4.2.1 指纹的意义 .....	108
4.2.2 名词解释 .....	110
4.3 问题的数学模型与结果分析 .....	111
4.3.1 问题分析 .....	111
4.3.2 模型一：由特征点决定的指纹唯一性模型 .....	111
4.3.3 模型二：由指纹纹型和特征点形态决定的指纹唯一性模型 .....	124
4.3.4 模型三：指纹识别的错误匹配模型 .....	133
4.4 问题的综合分析与进一步研究的问题 .....	139
4.4.1 问题的综合分析 .....	139
4.4.2 进一步研究的问题 .....	142
参考文献 .....	142
<b>第 5 章 快速通过系统设计问题</b> .....	144
5.1 问题的综述 .....	144
5.1.1 问题的提出 .....	144
5.1.2 问题的背景资料 .....	146