奥赛与数学基础能力训练

AOSAI YU SHUXUE JICHU NENGLI XUNLIAN

初二分册

主　编／谭祖春　卢秀军

东北师范大学出版社

AOSAI YU SHUXUE JICHU NENGLI XUNLIAN

东北师范大学出版社
长　春

奥赛与数学基础能力训练

初二分册

谭祖春　卢秀军　主编

图书在版编目(CIP)数据

奥赛与数学基础能力训练.初二分册/谭祖春,卢秀军主编.—3版.—长春:东北师范大学出版社,2003.5
ISBN 7-5602-3414-3

Ⅰ.奥... Ⅱ.①谭...②卢... Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第041045号

□封面设计:张 然
□总 策 划:三编室 □责任校对:姜 虹
□责任编辑:张志文 □责任印制:张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街5268号(130024)
电话:0431—5695744 5688470
传真:0431—5695744 5695734
网址:http://www.nnup.com
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
磐石印刷有限责任公司印刷
2003年5月第3版 2003年5月第10次印刷
幅面尺寸:148 mm×210 mm 印张:9 字数:276千
印数:41 700 — 48 000册

定价 10.00 元

前　　言

素质教育是教育发展的主流．对学生进行综合素质和能力的培养，是建立新世纪创造型人才队伍的需要，而数学竞赛便是国内外公认的进行数学能力训练的一种有益的智力活动，是早期发现、超前培养青少年优秀分子的极好办法．因此人们愈来愈关注数学竞赛，广大青少年数学爱好者跃跃欲试，准备在各级各类数学竞赛中大显身手．同时，全国不少地区也都进行各种形式的辅导，以帮助青少年崭露头角．几年来，我们在数学竞赛教学与研究的过程中，积累了许多经验，取得一些可喜的成果．在此基础上，我们紧扣初中数学大纲，重新修订了这套《奥赛与数学基础能力训练》丛书．这套书分初一、初二、初三分册，基本上概括了初中数学的重要基础知识、基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳，特别着重对学生数学思维能力、数学思想方法、解题方法和解题能力的训练．

“同步”是这套书的一大特点，即编写时注意了初中数学教学内容与初中数学竞赛大纲的衔接，对于问题的阐述、解释与解答，均以初中学生的学力为基准，做到简捷、清楚、详略得当．

“新”是这套书的另一大特点，体现在：首先是对课堂所学知识的深刻理解、总结提高，从而有利于学生对初中阶段的学习内容进行复习整理、融会贯通和灵活运用．其次是帮助学生扩大视野，激发学习兴趣，提高数学修养，同时加强理论与实际的结合，利用所学知

识解决问题,加强应用意识和发展创造能力.

“广”是这套书的第三大特点,体现在:一取材广,二题型广,三适用范围广.本套书的例题和习题取材于全国各省、市、地区的数学竞赛试题,题型丰富,启发性强.题的难易程度适当,有教材中的基本题,有“*”号题,有思考题,还有各类竞赛题,所以适合大多数学生学习选用.

“**实用**”是这套书的第四大特点,每一分册都分为若干专题,在每一个专题里,又根据需要分成若干小节,且每一个专题都具有相对的独立性和整体上的统一性,这样既便于老师根据实际情况备课选用,又便于学生在自学中自由选读.另外,每册书后都附有数学竞赛模拟试题及各章节的参考答案,供读者自我检测和评价.

总之,修订后,本丛书内容更新,题型更丰富,实战性更强,既是同学们参加全国初中数学竞赛的辅导材料,也是同学们初中数学总复习的良师益友,尤其对提高同学们中考 B 卷最后几题的得分能力大有裨益.我们深信这一点.

编　者

目　　录

第一讲　因式分解

多项式的因式分解是代数式恒等变形的基本形式之一，是中学数学的一个重要的基础知识. 因式分解方法灵活，技巧性强，在代数、几何、三角等的解题、证明中起着重要的作用.

一、基础知识精讲

1. 因式分解的基本思路

(1)先看各项有没有公因式，若有公因式，则先提取公因式.

(2)再看能否使用公式法，对于二次三项式看能否利用十字相乘法.

(3)四项或四项以上的多项式，用分组分解法，即适当分组后提取公因式或用公式法达到因式分解的目的. 如果运用以上方法难以解决，就考虑用拆项、添项方法，再利用分组分解法来分解.

(4)以上方法均感困难，可考虑使用换元法、双十字相乘法、待定系数法、求根法、轮换对称法等来因式分解.

2. 因式分解的注意事项

要在指定数(有理数、实数)的范围内分解到不能再分解为止.

3. 因式分解常用的方法

多项式的因式分解方法是多种多样的，应根据题目特点，对具体问题作具体分析，灵活运用有关的方法和技巧，正确而迅速地解决问题.

(1)运用公式法

在中学课本里，我们学习了五个基本公式，即

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

我们再补充几个重要公式：

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，(*)

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$，

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$，

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

说明：公式(*)也可以写成下面形式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

当 $a+b+c=0$ 时，公式(*)可写成 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(2)拆项与添项法

由于因式分解是多项式乘法的逆过程，在多项式乘法运算的整理化简中，经常会有几个同类项合并成一项或两个符号相反的同类项相互抵消为零，所以对某些多项式进行因式分解时，常常须要把被合并的项或相互抵消的项恢复原状，这个过程叫拆项与添项.

拆项与添项的目的是使拆项或添项后的多项式能用分组分解的方法进行因式分解. 常见有以下两种情况：

① 为使分组后各组之间有公因式而拆项或添项；

② 为使分组后各组之间能用公式而拆项或添项.

(3)双十字相乘法

在分解二次三项式时，十字相乘法是常用的基本方法. 对于比较复杂的多项式，如二元二次六项式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$. A,B,C,D,E,F 为常数且 A,B,C 不同时为零，用这种方法尤为方便，简捷.

例如，$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$，我们可把它看做关于 x(或 y)的二次三项式，即

$x^2+(2y+2)x-(8y^2-14y+3)$.

先利用十字相乘法，将不含 x 的常数项 $-(8y^2-14y+3)$ 因式分解

$$\begin{array}{ccc} 2y & & -3 \\ & \times & \\ 4y & & -1 \end{array}$$

所以，$-(8y^2-14y+3)=-(2y-3)(4y-1)$.

所以 $x^2+(2y+2)x-(8y^2-14y+3)=x^2+(2y+2)x-(2y-3)(4y-1)$.

再利用十字相乘法对关于 x 的二次三项式进行因式分解

$$\begin{array}{ccc} x & & -(2y-3) \\ & \times & \\ x & & (4y-1) \end{array}$$

所以，原式 $=[x-(2y-3)]\cdot[x+(4y-1)]$

$\qquad\qquad=(x-2y+3)(x+4y-1)$.

上题在分解因式的过程中，两次运用十字相乘法，如果把这两个步骤合并成一次完成，就是我们所要介绍的双十字相乘法：

$$\begin{array}{ccccc} x & & -2y & & +3 \\ & \times & & \times & \\ x & & 4y & & -1 \end{array}$$

大家可以从这个例子中体会到用双十字相乘法的一般步骤.

如 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 的分解过程是：

$$\begin{array}{ccccc} x & & -2y & & +3 \\ & \times & & \times & \\ x & & 4y & & -1 \end{array}$$

$\therefore x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x-2y+3)(x+4y-1)$.

(4)换元法

换元法是根据式子的特征，把其中的某些部分看做一个整体，并用一个新的字母变量替换，从而将式子化简，利用这种方法，对于某些特殊的多项式的因式分解可以起到简化作用.

(5)待定系数法

用待定系数法分解因式，其解题步骤如下：

第一步，将原多项式分解为含待定系数的因式的积；第二步，采用系数比较法列出含待定系数的方程或方程组. 解方程或方程组求出待定系数的值，使问题得到解决，或者采用数值代入法，列出含待定系数的方程或方程组，解这个方程或方程组，求出待定系数的值，使问题获得解决.

(6)求根法

多项式可用符号 $f(x)$，$g(x)$ 等表示：如代数式 $2x^2+7x-1$ 可表示为 f

$(x)=2x^2+7x-1$，显然 $f(1)=2\times1^2+7\times1-1=8$，$f(0)=2\times0^2+7\times0-1=-1$……

用求根法分解因式，常有如下几个定理：

① 余数定理：多项式 $f(x)$除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$.

例如，求 $f(x)=-2x^2+7x-1$ 除以 $x+2$ 所得的余数.

$\because x+2=x-(-2)$，

$\therefore f(-2)=-2\times(-2)^2+7\times(-2)-1=-23$.

② 因式定理：如果 $f(a)=0$，那么 $x-a$ 是 $f(x)$的因式. 反之，如果 $x-a$ 是 $f(x)$的因式，那么 $f(a)=0$.

因式定理给出了求多项式 $f(x)$一次因式的办法，但是，怎样去寻找使 $f(x)=0$ 的值仍是一个难题，下面的定理帮助我们解决了这个问题.

定理：如果整数系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,(a_n\neq0)$ 有因式 $px+q$（p,q 是互质的整数），那么 $p\,|\,a_n$，$q\,|\,a_0$.

例如，$6x^2-x-15$ 的因式是 $2x+3$ 与 $3x-5$，这两个一次因式的一次项系数 2 和 3 都是首项系数 6 的约数，3 和 -5 是常数项 -15 的约数.

(7)对称多项式的因式分解(轮换对称法)

如果把代数式中任意两个字母对换后，代数式保持不变，这样的代数式为对称代数式，简称对称式. 例如，$x+y+z$，$x^2+2xy+y^2$，$\dfrac{1}{ab}$，$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 等都是对称式，但 $a-b-c$，$\dfrac{1}{x-y}$，$a+3b+2c$ 就不是对称式.

在一个代数式中，如果把含字母项顺序轮换后代数式保持不变，这样的代数式为轮换对称式，简称轮换式. 例如，$x^2y+y^2z+z^2x$，$x^2+y^2+z^2$，$(x+2y)(y+2z)(z+2x)$，$\dfrac{1}{abc}$等都是轮换式.

如果一个多项式，它所有的项有相同的次数，称这样的多项式为齐次多项式，如 $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 称为三次齐次对称式.

1)对称式、轮换式的性质

① 对称式一定是轮换式，而轮换式不一定是对称式. 例如，$x^2y+y^2z+z^2x$ 是轮换式，但不是对称式；② 关于相同字母的对称式或轮换式的和、差、积、商(除式不为零)仍是对称式或轮换式；③ 若对称式或轮换式中含有某种

形式的式子，则必定有这种形式的同型式．例如，关于 x,y,z 的三次齐次式中若含有 ax^2 项，则它必定含有 ay^2,az^2 项．若含有 bxy 项，则它一定含有 byz,bzx 项，所以 x,y,z 的二次齐次对称式的一般形式是

$$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx).$$

其中 a,b 是常系数．

由此可知，关于 x,y 的齐次对称式(a,b 是系数)可以写成

一次：$a(x+y)$；二次：$a(x^2+y^2)+bxy$；

三次：$a(x^3+y^3)+b(x^2y+xy^2)$．

关于 x,y,z 的齐次轮换式(a,b,c 是系数)可以写成

一次：$a(x+y+z)$；二次：$a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$；

三次：$a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y)$．

2)对称多项式的因式分解

对于轮换式的因式分解，常用的方法是选定一个字母做主元，将其余字母看成常数，把原式看成关于主元的多项式，然后利用因式定理确定它的因式．

比如关于 x,y,z 的轮换式，若确定 $x-y$ 是它的因式，则 $y-z,z-x$ 也都是它的因式，可结合待定系数法求出其余的因式．

对于三个字母 x,y,z 的轮换式，最常见的因式有 xyz，$x+y+z$，$(x+y)(y+z)(z+x)$，$(x-y)(y-z)(z-x)$，$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$等．因此，首先用因式定理确定是否有因式 x，$x+y$，$x-y$，$x+y-z$ 等，若有，可用轮换法写出类似的因式，再利用待定系数法求出其他的因式．

二、例题解析

例 1　分解因式

(1)$64x^6-y^6$；　(2)$8x^3-12x^2+6x-1$；

(3)$a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$；　(4)x^3+3x^2+3x+2；

(5)$x^3+8y^3-z^3+6xyz$．

解：(1)解法一　原式$=(8x^3-y^3)(8x^3+y^3)$

$$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(2x+y)(4x^2-2xy+y^2).$$

解法二　原式$=[(2x)^2-y^2][(2x)^4+(2x)^2y^2+y^4]$

$=(2x+y)(2x-y)[(2x)^4+2(2x)^2y^2+y^4-(2x)^2y^2]$

$=(2x+y)(2x-y)\{[(2x)^2+y^2]^2-(2x)^2y^2\}$

$=(2x+y)(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$.

(2)解法一　原式$=(2x)^3-3(2x)^2\cdot1+3\cdot(2x)\cdot1^2-1^3$

$=(2x-1)^3$.

解法二　原式$=(8x^3-1)-(12x^2-6x)$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1)-6x(2x-1)$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1-6x)$

$=(2x-1)(4x^2-4x+1)$

$=(2x-1)(2x-1)^2=(2x-1)^3$.

(3)解法　原式$=(a^7-a^5b^2)+(a^2b^5-b^7)$

$=a^5(a^2-b^2)+b^5(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^5+b^5)$

$=(a-b)(a+b)^2(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

(4)解法一　原式$=(x^3+3x^2+3x+1)+1$

$=(x+1)^3+1=(x+2)[(x+1)^2-(x+1)+1]$

$=(x+2)(x^2+x+1)$.

解法二　原式$=(x^3+x^2+x)+(2x^2+2x+2)$

$=x(x^2+x+1)+2(x^2+x+1)$

$=(x+2)(x^2+x+1)$.

(5)解法一　原式$=x^3+(2y)^3+(-z)^3-3x\cdot(2y)\cdot(-z)$

$=(x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+xz)$.

解法二　原式$=(x+2y)^3-3(x+2y)\cdot x\cdot 2y-z^3+6xyz$

$=[(x+2y)^3-z^3]-[6xy(x+2y)-6xyz]$

$=(x+2y-z)^3-3(x+2y)\cdot(-z)(x+2y-z)-6xy(x+2y-z)$

$=(x+2y-z)[(x+2y-z)^2+3(x+2y)\cdot z-6xy]$

$=(x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+3xz+6yz-6xy)$

$$=(x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2xy+xz+2yz).$$

注:用公式分解因式时,有时须反复应用公式,有时须与其他方法结合使用.

例 2　分解因式

(1)a^5+a+1;　　(2)x^3-3x^2+4.

解:(1)解法一　原式$=(a^5-a^2)+(a^2+a+1)$

$$=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$$

$$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1).$$

解法二　原式$=(a^5+a^4+a^3)-(a^4+a^3)+(a+1)$

$$=a^3(a^2+a+1)-a^3(a+1)+(a+1)$$

$$=a^3(a^2+a+1)-(a+1)(a^3-1)$$

$$=a^3(a^2+a+1)-(a+1)(a-1)(a^2+a+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1).$$

解法三　原式$=(a^5+a^4+a^3)+(a^2+a+1)-(a^4+a^3+a^2)$

$$=a^3(a^2+a+1)+(a^2+a+1)-a^2(a^2+a+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1).$$

(2)解法一　原式$=(x^3+x^2)-(4x^2-4)$

$$=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)$$

$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

解法二　原式$=(x^3-2x^2)-(x^2-4)$

$$=x^2(x-2)-(x+2)(x-2)$$

$$=(x-2)(x^2-x-2)=(x+1)(x-2)^2.$$

解法三　原式$=(x^3+1)-(3x^2-3)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)$$

$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

解法四　原式$=x^3-3x^2-8+12$

$$=(x^3-8)-(3x^2-12)$$

$$=(x-2)(x^2+2x+4)-3(x+2)(x-2)$$

$$=(x-2)(x^2-x-2)=(x+1)(x-2)^2.$$

解法五　原式$=(x^3-4x^2+4x)+(x^2-4x+4)$

$=x(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$

解法六　原式$=(x^4+x^3)-(x^4+3x^2-4)$

$=x^3(x+1)-(x^2-1)(x^2+4)$

$=x^3(x+1)-(x+1)(x-1)(x^2+4)$

$=(x+1)[x^3-(x-1)(x^2+4)]$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$

解法七　原式$=(x^3-3x^2-4x)+(4x+4)$

$=x(x^2-3x-4)+4(x+1)$

$=x(x+1)(x-4)+4(x+1)$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$

解法八　原式$=(4x^3+4)-(3x^3+3x^2)$

$=4(x^3+1)-3x^2(x+1)$

$=4(x+1)(x^2-x+1)-3x^2(x+1)$

$=(x+1)[4(x^2-x+1)-3x^2]$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$

注：由本例可知，关于拆项与添项有许多不同的途径，所以，在因式分解时，对题目一定要具体分析，结合题目的特点，选择简捷的方法．同学们可模仿上例分解因式 x^3+3x^2-4.

例 3　分解因式 $2x^3-13x^2+25x-14$.

分析：原式不缺项，直接分组分解难以进行，可考虑拆项分解，把中间的两项各拆成两项，原式变成六项，再按每组系数对应成比例的原则分成三组，每组两项，使三组系数的比分别为$2:(-2)=11:(-11)=14:(-14)$或 $2:(-4)=(-9):18=7:(-14)$或 $2:(-7)=(-6):21=4:(-14)$，得到不同的拆项办法.

解法一　原式$=(2x^3-2x^2)-(11x^2-11x)+(14x-14)$

$=2x^2(x-1)-11x(x-1)+14(x-1)$

$=(x-1)(2x^2-11x+14)=(x-1)(2x-7)(x-2).$

解法二　原式$=(2x^3-4x^2)-(9x^2-18x)+(7x-14)$

$=2x^2(x-2)-9x(x-2)+7(x-2)$

$$=(x-2)(2x^2-9x+7)=(x-2)(2x-7)(x-1).$$

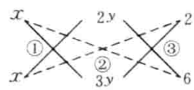
解法三　原式 $=(2x^3-7x^2)-(6x^2-21x)+(4x-14)$

$$=x^2(2x-7)-3x(2x-7)+2(2x-7)$$

$$=(2x-7)(x^2-3x+2)=(2x-7)(x-1)(x-2).$$

例 4　分解因式 $x^2+5xy+6y^2+8x+18y+12$.

分析：这是一个二次六项式，可考虑使用双十字方法进行因式分解.



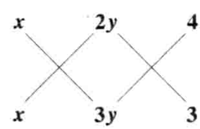
解：原式 $=(x+2y+2)(x+3y+6)$.

注：双十字相乘法必须按这样的步骤进行.

(1)先用十字相乘法分解二次项，如第一个十字相乘图，$x^2+5xy+6y^2=(x+2y)(x+3y)$.

(2)先依一个字母(如 y)的一次系数分解常数项，如第二个十字相乘图，$6y^2+18y+12=(2y+2)(3y+6)$.

(3)再按另一个字母(如 x)的一次项系数进行检验，如第三个十字相乘图，这一步不能省略，否则容易出错. 如



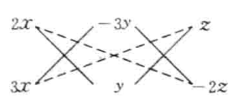
而 $x^2+5xy+6y^2+8x+18y+12\neq(x+2y+4)(x+3y+3)$.

例 5　分解因式

(1)$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$；　(2)$xy+y^2+x-y-2$；

(3)$4x^2+4xy-3y^2-8x+3$；　(4)$4x^2-9y^2+6x+3y+2$.

解：(1)

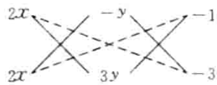


$\therefore$ 原式 $=(2x-3y+z)(3x+y-2z)$.

注：把 z 看做常数.

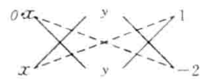
(2)

$\therefore$ 原式 $=(2x-y-1)(2x+3y-3)$.



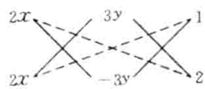
注:有缺项的情况，只要把所缺的项的系数看做零，仍可用双十字相乘法.

(3)



∴原式$=(y+1)(x+y-2)$.

(4)



∴原式$=(2x+3y+1)(2x-3y+2)$.

例 6 分解因式$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

分析:若将此式展开后分解因式显然十分繁琐.观察此题特征，可令$x^2+x=y$，通过换元，将x的四次多项式转化为关于y的二次多项式，化繁为简.

解:令$x^2+x=y$，则

$$\begin{aligned}原式&=(y+1)(y+2)-12=y^2+3y-10\\&=(y+5)(y-2)=(x^2+x+5)(x^2+x-2)\\&=(x^2+x+5)(x+2)(x-1).\end{aligned}$$

注:亦可采用其他的换元，如设$x^2+x+1=y$或$x^2+x+2=y$等，可自己酌情处理换元.

例 7 分解因式$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$.

分析:可将第一项的四个因式重新分解组合，转化为上例的情形再因式分解.

解:原式$=[(x-1)(x-4)]\cdot[(x-2)(x-3)]-120$

$\qquad=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$.

令$x^2-5x+4=y$,

$$\begin{aligned}则原式&=y(y+2)-120=y^2+2y-120\\&=(y+12)(y-10)=(x^2-5x+16)(x^2-5x-6)\\&=(x^2-5x+16)(x-6)(x+1).\end{aligned}$$

例 8 分解因式$(x^2-x-6)(x^2+3x-4)+24$.