中国科学院教材建设专家委员会规划教材

全国高等医药院校规划教材

医用高等数学

刘启贵　顾作林　主编

科学出版社

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

医用高等数学

主　　编　刘启贵　顾作林
副 主 编　吕兴汉　郭淑霞　陈　群　彭继世
编　　者（以姓氏笔画排名）
吕兴汉（首都医科大学）
刘启贵（大连医科大学）
陈　群（宁夏医科大学）
胡志敏（广州医科大学）
闻风霞（包头医学院）
顾作林（河北医科大学）
郭淑霞（辽宁医学院）
唐　晓（大连医科大学）
彭继世（贵阳医学院）
学术秘书　唐　晓（大连医科大学）

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书依据普通高等医学院校高等数学教学要求编写而成,书中讲述了微分学、积分学、常微分方程、概率论及线性代数等方面的基础知识,重点突出了基本概念、基本理论和基本微积分学计算方法。本书从生活中的具体问题入手,给出了一定数量的例题和习题,并用微积分的方法处理医学的实际问题。

本书可供普通高等医药院校作为高等数学教材使用,也可供医学工作者作为相关的参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学 / 刘启贵,顾作林主编. —北京:科学出版社,2013.7
中国科学院教材建设专家委员会规划教材·全国高等医药院校规划教材
ISBN 978-7-03-038148-4

Ⅰ.①医… Ⅱ.①刘… ②顾… Ⅲ.①医用数学-医学院校-教材 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 150858 号

责任编辑:周万灏 / 责任校对:桂伟利
责任印制:肖 兴 / 封面设计:范璧合

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 7 月第 一 版 开本:850×1168 1/16
2013 年 7 月第一次印刷 印张:13
字数:422 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

医用高等数学是基础、临床、预防、口腔等医学专业及药学各专业必修的一门基础课，它包含医学研究中所涉及的大学数学基础和数学方法，以及数学在医学上的应用。它是医学各门学科的基础课，为医学院校学生提供必备的高等数学素质教育；同时为研究医学实际问题和生命现象（或过程）的数量规律提供重要的数学研究方法与思维。但由于医学院校的专业培养目标不尽相同，课程设置也有较大的差别。本书在总结二十余年数学教学经验基础上，根据我国近年高等医药院校对高等数学教学的需求，按照教育部非数学专业数学基础课程教学指导委员会制定的“医科数学教学基本要求”编写的。

本教材面向医学数学教材建设与改革的方向，立足于医学教学与医学实践的需要，在大量调查的基础上，与相关医学院校有多年医学数学教学经验的教师进行了深入、广泛的讨论。在本书编写过程中突出以下特点：精炼教材内容，兼顾数学理论体系，强调“三基”即基本概念、基本理论和基本数学方法，增加用高等数学方法处理常见的医学问题。全书力求做到重点突出，层次分明，例题典型，深入浅出，行文流畅，说理透彻。在内容体系的安排上尽可能科学合理。

全书共分九章，第一章至第六章，按48教学时数编写，属于基础部分。第七章至第九章相对独立。全书总教学时数大约72学时，可满足不同教学层次的需求，各章节的取舍可自行调整。本书的内容包含一元函数微积分、多元函数微积分、线性代数初步与概率论基础等几个部分。一元函数微积分部分以极限、连续、微分、积分为主线展开讨论，（常）微分方程本质上也是一元函数的积分；多元函数微积分部分在简单介绍空间解析几何知识的基础上，以二元函数为对象，介绍极限与连续、偏导数与全微分、极值、二重积分等知识；线性代数部分，主要讲述行列式的性质与运算、矩阵的初等变换、线性方程组的解等内容；概率论基础部分，在介绍事件与概率等基本概念之后，以古典概型为基础，讲述概率的加法与乘法公式，进而讨论常见随机变量的概率分布及其数字特征。

本书在文字表达上力求精练准确，通俗易懂，尽量避免过分数学化的语言。从应用角度出发，对教材中定理、性质的讲述理解重于证明，以求达到数学上的逻辑性与医学上的应用性二者之间的相对平衡。每节之后附有适量、难度稍大的思考与讨论，可以启发读者的思维。每章之后提供大量的习题并附参考答案，方便读者自学。

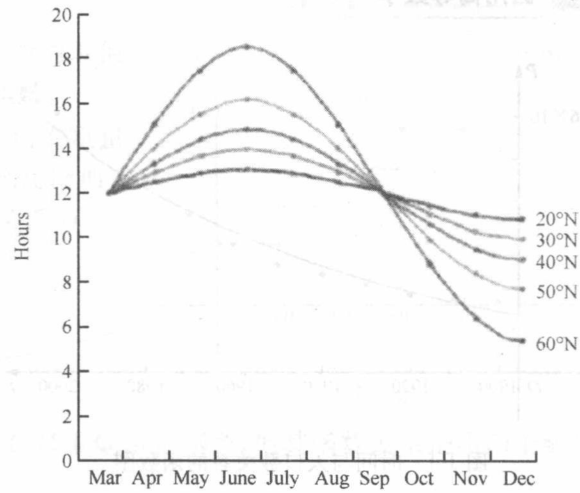
本书在编写与出版过程中得到各参编学校的领导、科学出版社的全力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，难免有不当之处，恳请读者批评指正。

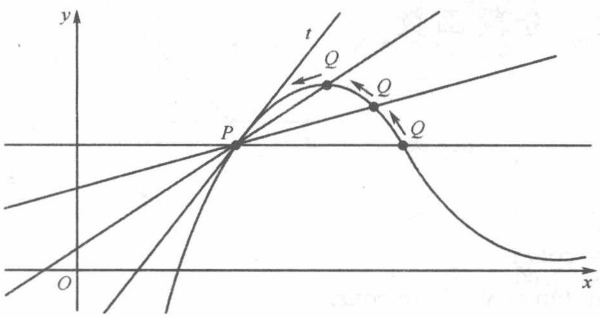
刘启贵　顾作林

2013年5月

目　录



左图给我们展示的是地球上不同纬度的地方,日照时间随季节的变化.由此我们可以非常容易地看到它们的变化规律,这就是函数的表达方式之一.本章将复习最基本的函数,以及介绍函数的图像、转换及复合函数,为下一步学习微积分打下基础.



数学史上有两个最经典的例子,一是通过一点的割线逼近求其切线的正切值(见右图),二是确定物体的瞬时速度(见例题),都需要使用极限来解决问题.我们将从研究极限和极限的性质开始微积分的学习.

第一章 函数与极限

第一节 函 数

一、函数的概念

无论何时,当一个变量依赖于另外一个变量时,就产生了函数.例如,圆的面积 S 依赖于它的半径 r.圆的面积和半径之间的关系可以通过等式 $S=\pi r^2$ 来表达.对于每一个正数 r,都有一个 S 与之对应,我们说 S 是 r 的函数.

又如,全世界的人口数 N 依赖于时间 t,表 1-1 给出世界人口数 P 和确定年份之间的关系.

表 1-1 1900~2000 年全世界人口数(单位:亿)

年	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口数	16.50	17.50	18.60	20.70	23.00	25.60	30.40	37.10	44.50	52.80	60.80

对于某个确定的年份如 1950 年,可以得到相应人口数的近似值 $N(1950)=25.60$ (亿).实际上,对于任意时刻 t,都有一个 N 值与之对应.我们说 N 是时间 t 的函数.

函数的定义:设 x,y 是同一变化过程中的两个变量,如果对于变量 x 的每一个取值,按某一规律,变量 y 总有一个确定的值与之对应,则称 y 为 x 的**函数**.记为

$$y=f(x)$$

变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**.

自变量 x 允许取值的集合称为函数的定义域,如果 x_0 是函数定义域中的一点,把它对应的因变量的值称为函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$,所有函数值的集合称为函数的值域.

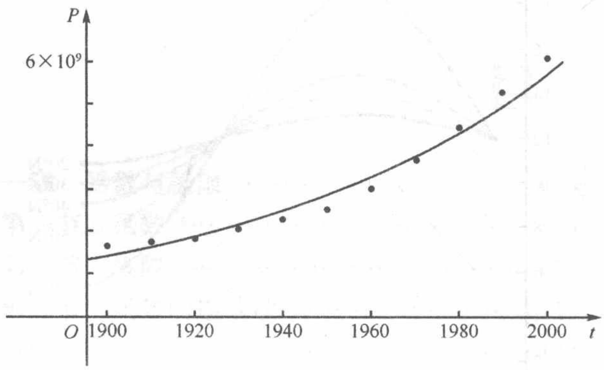


图 1-1　时间与人口数关系的函数图

实际中,根据具体的情况,可使用解析式、图像、表格等表示函数关系.

解析式法是最典型的表示函数的方法,也是我们对函数进行微积分计算时最常采用的函数表达形式.如在全世界人口数 N 和时间 t 关系的例子中,可以用下列表达式给出近似人口数(单位:亿)与时间的关系:

$$N(t)=0.008079266\times1.013731^t$$

也可以用图像法表示全世界人口数 N 和时间 t 的关系,如图 1-1 所示.

表格法表示如表 1-1.

二、初等函数　分段函数

1. 基本初等函数

幂函数　$y=x^a\quad(a\in\mathbf{R})$;

指数函数　$y=a^x\quad(a>0,a\neq1)$;

对数函数　$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$;

三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$;

反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arc}\cot x$.

这五种基本初等函数再加上常函数 $y=C$(C 为常数)统称为**基本初等函数**.

2. 复合函数　设 $y=f(u)$ 是变量 u 的函数,而 $u=\varphi(x)$ 是变量 x 的函数,如果变量 x 取某些值时,相应地 u 使 y 有定义,则称 y 是 x 的**复合函数**,记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为**中间变量**.

例 1-1　设 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{2-x}$,并确定下列复合函数及定义域.

(1) $f[g(x)]$; (2) $g[f(x)]$; (3) $f[f(x)]$; (4) $g[g(x)]$.

解　(1) $f[g(x)]=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x}$,定义域为 $(-\infty,2]$;

(2) $g[f(x)]=\sqrt{2-\sqrt{x}}$,定义域为 $[0,4]$;

(3) $f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$,定义域为 $[0,+\infty)$;

(4) $g[g(x)]=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$,定义域为 $[-2,2]$.

注意　不是任意两个函数都可以复合.例如,$y=\ln u$, $u=-\sqrt{x}$,因任意 x 都使得 $u=-\sqrt{x}\leqslant0$, $\ln u$ 无意义,因此它们不能复合.

在后面的微积分计算中,我们常需要把复合函数分解成若干个基本初等函数或由基本初等函数通过四则运算得到的"简单函数"后,利用基本初等函数的性质与公式进行相应的计算.

例 1-2　将下列复合函数分解为简单函数.

(1) $y=[\cos(x+9)]^2$; (2) $y=\dfrac{(x+3)^{10}}{1+(x+3)^{10}}$.

解　(1) 函数由 $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=x+9$ 复合而成.

(2) 函数由 $y=\dfrac{u}{1+u}$, $u=v^{10}$, $v=x+3$ 复合而成.

3. 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算或复合所得到的仅用一个解析式表达的函数,称为初等函数.

例如,$y=x^3+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,　$y=x\tan x+\sin(e^x+1)$ 等都是初等函数.

4. 分段函数　当自变量 x 在定义域的不同区间段内取值时，函数由不同的解析式来定义，这种函数称为**分段函数**.

例 1-3　中国邮寄特快专递信函的价格准则为，信件重量不超过 200g 需花费 20 元，信件重量每再续重 200g 则需增加 4 元的花费. 价格 $C(w)$（元）和信件重量 w(g) 之间的关系为

$$C(w)=\begin{cases}20, 0<w\leqslant 200\\ 24, 200<w\leqslant 400\\ 28, 400<w\leqslant 600\\ 32, 600<w\leqslant 800\end{cases}$$

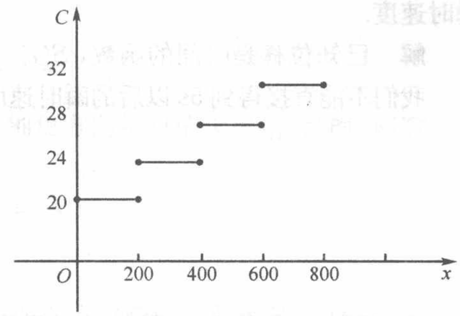


图 1-2

在例 1-3 中，价格 C 是重量 w 的函数，但其函数关系是用四个解析式来表达的(图 1-2).

分段函数是一个函数，而不是多个函数. 在求分段函数的函数值时，要先判断自变量属于哪个定义区间，再代到这个区间相应的函数解析式里进行运算.

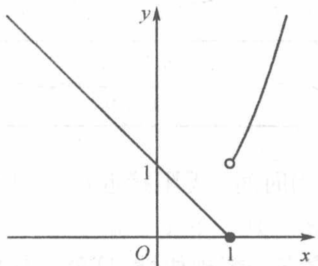


图 1-3

例 1-4　$f(x)=\begin{cases}1-x, x\leqslant 1,\\ x^2, x>1,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(1)$ 和 $f(2)$，并作图.

解　$f(0)=1-0=1$，$f(1)=1-1=0$，$f(2)=2^2=4$，作图 1-3.

三、函数的几种特性

1. 有界性　设 I 是函数 $f(x)$ 的有定义的区间，如果存在一个正数 M，使对所有的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**，否则称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**.

例如，$\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},+\frac{\pi}{4}\right)$ 内有界，但在 $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 内无界. $\sin x$ 在其定义域上是有界的.

2. 单调性　设 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的某个有定义的区间 (a,b) 内的任意两点，且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调递增的**；反之 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调递减的**.

例如，e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；x^2 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的.

3. 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称. 对于定义域内的任意 x，如果 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，x^2，$\cos x$ 都是偶函数；x^3，$\sin x$ 都是奇函数；但 x^3-x^4，$\arccos x$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图像是关于原点对称，偶函数的图像是关于 y 轴对称.

4. 周期性　设 x 是函数 $f(x)$ 定义域内的任意一点，如果存在一个正数 l，使得 $f(x+l)$ 也有定义，且等式 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足这个等式的最小正数 l 称为函数的**最小正周期，简称为周期**.

例如，$\sin x$，$\cos 2x$ 都是周期函数，它们的周期分别为 2π，π.

【思考与讨论】

1. $f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=x$ 是不是相同的函数？
2. 若变量 x，y 满足 $x^2+y^2=4$，y 是否为 x 的函数？

第二节　极　　限

一、极限的概念

引例　从多伦多著名的高达 450m 的加拿大国家电视台的露天平台上滚下一个球，求过 5s 以后球的

瞬时速度.

解 已知位移是时间的函数，$S(t)=4.9t^2$.

我们不能直接得到5s以后的瞬时速度，可以先考虑从 $t=5$ 到 $t=5.1$ s这段很短的时间内的平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{S(5.1)-S(5)}{0.1}\\&=\frac{4.9\times5.1^2-4.9\times5^2}{0.1}\\&=49.49(\text{m/s})\end{aligned}$$

我们不断缩短从第5s开始的时间间隔，得到各段时间的平均速度见表1-2.

表1-2

时间间隔	[5,5.1]	[5,5.05]	[5,5.01]	[5,5.001]
平均速度	49.49	49.245	49.049	49.0049

容易看出，随着时间间隔越来越短，平均速度越来越近与49m/s，这就是当时间 t 无限接近 $t=5$ 时，平均速度的极限，即为 $t=5$ 的瞬时速度.

从求瞬时速度的问题看出，当自变量无限靠近某点时，函数的变化趋势存在一定规律性，这就是极限概念所要描述和解答的问题.

1. $x\to\infty$时函数的极限 当 $x\to\infty$ 时，考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势. 见表1-3.

表1-3

x	±1	±10	±100	±1000	±10000	±100000	…	$\to\infty$
$f(x)$	±1	±0.1	±0.01	±0.001	±0.0001	±0.00001	…	$\to0$

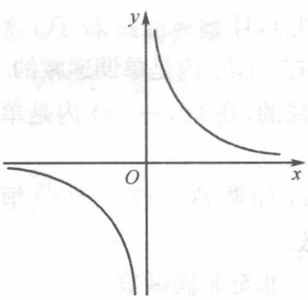


图1-4

可以看出，当 $|x|$ 无限增大(即为 $x\to\pm\infty$)时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限趋向0. 如图1-4所示.

定义1-1 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋向某一常数 A，就称当 x 趋向无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限(或收敛于 A)，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

上例的变化趋势用极限表示就是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋向某个常数，就称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在(或称发散).

例如，函数 $y=\cos x$，当 $x\to\infty$ 时，函数值在 -1 与 $+1$ 之间波动，故 $x\to\infty$ 时，$\cos x$ 的极限不存在.

例如，函数 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时，y 无限增大. 故 $x\to\infty$ 时，x^2 的极限不存在. 但这种情况可以记为

$$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty \text{ 或 } x^2\to\infty\ (x\to\infty)$$

这并不意味着极限存在，而是表示在这一极限过程中函数绝对值不断增大.

例1-5 当 $x\to\infty$ 时，考察 $\arctan x$ 的极限.

解 显然，由图1-5可见，当 x 从正方向趋近于无穷大时，$\arctan x$ 趋近于 $\dfrac{\pi}{2}$；当 x 从负方向趋近于无穷大时，$\arctan x$ 趋近于 $-\dfrac{\pi}{2}$；故 $x\to\infty$ 时，由于 $\arctan x$ 不趋近于同一个常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

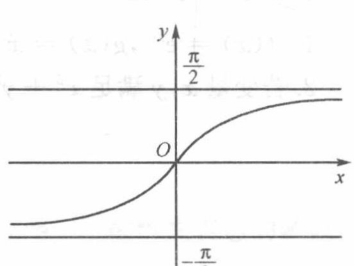


图1-5

在例1-5中若只考虑 $x\to+\infty$ 或只考虑 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x$ 的极

限存在，称为单侧极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

单侧极限 仅当自变量 x 沿 x 轴正方向无限增大(或沿 x 轴负方向绝对值无限增大)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某常数 A，称 A 为函数 $f(x)$ 的单侧极限，即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ (\text{或}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A\ )$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为例，我们观察自变量 x 从 $x=1$ 的左右两个方向趋向 1 但不等于 1(记为 $x\to1$)时，函数的变化趋势. 见表 1-4.

表 1-4

x	0.9	0.99	0.999	…	→	1	←	…	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.11	1.010	1.001	…	→	1	←	…	0.999	0.990	0.909

自变量 x 无论是从 1 的左边还是从 1 的右边趋向 1，其函数值都趋向常数 1.

定义 1-2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义(在这点本身可以没有定义)，当自变量 x 以任何方式无限趋向定点 x_0 但不等于 x_0 时，如果函数无限趋向某常数 A，就称当 x 趋向 x_0 时，函数以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\ \text{或}\ f(x)\to A\ (\ x\to x_0\ )$$

上述变化趋势记为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不趋向一个常数，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$ 或 $\tan x\to\infty\left(x\to\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 1-6 用来描述电流在 $t=0$ 时刻变化的 Heaviside 函数如下，考察 $t\to0$ 时函数的极限.

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant1\end{cases}$$

解 当 t 从 0 的左侧趋近于 0 时，$H(t)$ 趋近于 0；当 t 从 0 的右趋近于 0 时，$H(t)$ 趋近于 1. 由于函数没有趋近于同一个常数，故当 $t\to0$ 时，$H(t)$ 的极限不存在(图 1-6).

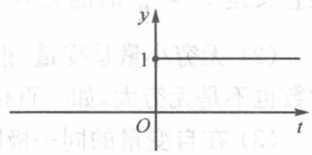


图 1-6

在例 1-6 中，虽然当 $t\to0$ 时，$H(t)$ 极限不存在，但如果只考虑 t 从 0 的左侧或仅从 0 的右侧趋近于 0 时，$H(t)$ 极限存在. 这就是左右极限的概念.

左右极限 自变量 x 仅从 x_0 的左侧 $(x<x_0)$ 趋向 x_0 但不等于 x_0 时，若函数 $f(x)$ 趋向某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**；自变量 x 仅从 x_0 的右侧 $(x>x_0)$ 趋向 x_0 但不等于 x_0 时，若函数 $f(x)$ 趋向某一常数 B，则称 B 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**. 记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\qquad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=B,$$

或

$$f(x_0^-)=A,\qquad f(x_0^+)=B$$

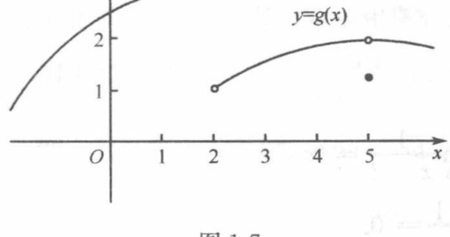


图 1-7

显然，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在并且相等.

例 1-7 请根据图 1-7 确定：

(1) $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)$；(2) $\lim\limits_{x\to2^+}g(x)$；(3) $\lim\limits_{x\to2}g(x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to5^-}g(x)$；(5) $\lim\limits_{x\to5^+}g(x)$；(6) $\lim\limits_{x\to5}g(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=3$；(2) $\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=1$；

(3) $x\to2$ 时 $g(x)$ 左右极限存在但不相等，因此 $\lim\limits_{x\to2}g(x)$

不存在；

(4) $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x) = 2$；(5) $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x) = 2$；

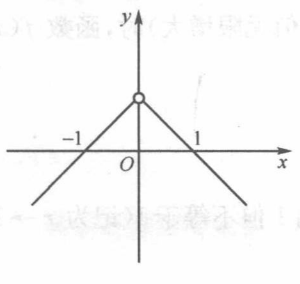


图 1-8

(6) $x\to 5$ 时 $g(x)$ 左、右极限都存在且相等，因此 $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 2$.

例 1-8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, x<0,\\ 1-x, x>0,\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 如图 1-8 所示，

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$

左、右极限都存在且相等，因此当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限存在，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

二、无穷小量及其性质

1. 无穷小量与无穷大量的概念

定义 1-3 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，如果函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以称函数 $\dfrac{1}{x^2}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

定义 1-4 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，如果 $|f(x)|$ 无限增大，就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \ (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

注意 (1) 无穷小(大)量是相对自变量的变化过程而言的. 例如，函数 $\tan x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，但它又是 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时的无穷大量，当 $x\to\dfrac{\pi}{4}$ 时，它既不是无穷小也不是无穷大.

(2) 无穷小量是变量，很小的常数如十亿分之一不是无穷小，但常函数 0 是无穷小量. 同样，很大的常数也不是无穷大，如一百亿.

(3) 在自变量的同一极限过程中，非零无穷小量的倒数为无穷大量. 反之，在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小. 例如，$\dfrac{1}{x^2}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小，它的倒数 x^2 为 $x\to\infty$ 时的无穷大.

2. 无穷小定理与性质

定理 1-1 $\lim f(x)=A$ 成立的充分必要条件是 $\lim[f(x)-A]=0$

定理描述了极限与无穷小的关系. 即：若 $f(x)$ 的极限为 A，则 $f(x)-A$ 是无穷小；反之，若 $f(x)-A$ 是无穷小，则 $f(x)$ 以 A 为极限. 所以，$\lim F(x)=A$ 也可表示为

$$f(x)=A+\alpha \quad (\lim\alpha=0)$$

性质 1-1 有限个无穷小的代数和或乘积仍是无穷小.

即若 $\lim\alpha_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ ，则 $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ ，$\lim\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$.

性质 1-2 有界变量或常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

即若 $|f(x)|\leqslant M$，$\lim\alpha=0$，则 $\lim\alpha f(x)=0$.

例 1-9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (1) $x\to 3$，$x-3$ 是无穷小，则 $\dfrac{1}{x-3}$ 是无穷大，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$；

(2) 对任何 x，$\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，而 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，由性质 2，$\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

三、无穷小的比较

无穷小量是某一过程中趋于零的函数,例如,$x \to 0$ 时,$2x$,x^2,$\sin x$ 都是无穷小,在这一极限过程中考察它们趋于零的速度,表 1-5.

表 1-5

x	0.5	0.1	0.05	0.01	0.001	…
$\sin x$	0.4794255	0.099833417	0.0499792	0.0099998	0.001	…
$2x$	1	0.2	0.1	0.02	0.002	…
x^2	0.25	0.01	0.0025	0.0001	0.000001	…

从上表看出同一极限过程的上述无穷小趋向零的"快慢"程度是不一样的,当 $x \to 0$ 时,x^2 比 x,$2x$ 和 $\sin x$ 趋向零的速度都更快,$2x$ 与 x 趋于零的速度相差常数倍,$\sin x$ 与 x 趋于零的速度相当. 我们用两个常用无穷小量比值的极限来刻画它们趋于零速度的相对快慢. 如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2}=\infty$.

定义 1-5 假设 α 及 β 是同一极限过程中的两个无穷小,且 $\alpha \neq 0$,

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是较 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是较 α 低阶的无穷小,记为 $\beta=O(\alpha)$;

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c$,则称 β 是与 α 同阶的无穷小;特别地,如果 $c=1$,称 β 与 α 为等价无穷小,记为 $\beta\sim\alpha$.

若 β 与 α^k 为同阶无穷小,就说 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例 1-10 证明当 $x\to 0$ 时,$\arcsin x \sim x$.

证明 令 $\arcsin x = t$,则 $x=\sin t$,且 $x\to 0$ 时,$t=\arcsin x\to 0$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

由定义知 $\arcsin x\sim x$.

还可以证明,当 $x\to 0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$,

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

定理 1-2 设 $\alpha_1\sim\alpha_2$,$\beta_1\sim\beta_2$,且 $\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ 存在,则

$$\lim\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

证明 $\alpha_1\sim\alpha_2$,$\beta_1\sim\beta_2$,则 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\lim\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=1$,所以

$$\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\lim\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)==\lim\frac{\beta_1}{\beta_2}\cdot\lim\frac{\beta_2}{\alpha_2}\cdot\lim\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\lim\frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

定理 3 告诉我们在求极限的过程中,等价无穷小可以相互替换. 但注意,被替换的无穷小在表达式中的身份必须是"因子",即运算是相乘的关系. 等价无穷小的相互替换,有时可以简化极限的运算.

例 1-11 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\arctan x}{x^3+2x^2}$.

解 (1) 当 $x\to 0$ 时,$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{1}{2}x^2$,$\sin^3 x\sim x^3$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cdot x^2}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\arctan x}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$.

四、极限的四则运算

定理 1-3 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

证明 这里以(1)中加法为例加以证明,(2)和(3)证法类似.

因为 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 由无穷小量定理 1-1,

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta$$

其中 α,β 均为同一极限过程中的无穷小量. 所以

$$f(x)+g(x)=A+B+\alpha+\beta$$

由无穷小量性质 1 知, $\alpha+\beta$ 为无穷小量,再由定理 1-1,有

$$\lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x)$$

由定理 1-2 中的(2)可得如下推论.

推论 1-1 $\lim cf(x)=c\lim f(x)$ (c 为常数).

推论 1-2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

例 1-12 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 当 $x\to 2$ 时,分母极限不为 0, 直接利用商的法则.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+4)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+4}=\frac{2\times 2-3}{2^2-5\times 2+4}=-\frac{1}{2}$$

例 1-13 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$.

解 当 $x\to 1$ 时,分母极限为 0, 不能直接利用商的法则,需要化简后求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

例 1-14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{4x^3+5x^2+1}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$.

解 当 $x\to\infty$ 时,分母极限不存在,不能直接利用商的法则,利用无穷大与无穷小之间的关系:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3}{4x^3+5x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^3}}{4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

例 1-15 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$.

解 当 $x\to 0$ 时,分母极限为 0, 不能直接利用商的法则,利用分数有理化:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

例 1-16 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 分母的极限为零,利用无穷小与无穷大的关系求极限,因为

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot1+4}{2\cdot1-3}=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$.

例 1-17 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$ ($\infty-\infty$ 型).

解 因为第一个和第二个函数的极限不存在,不能直接用减法法则.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x}{1-x^2}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

例 1-18 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ ($0\cdot\infty$ 型).

解 因为第一个函数的极限不存在,不能直接用乘法法则.

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

五、两个重要极限

1. 极限存在法则(夹逼法则) 如果函数 $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ 存在下列关系:

(1) 在点 x_0 附近, $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A$.

那么函数 $f(x)$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 1-19 证明 (1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

证明 (1) $x>0$ 时, $x>\sin x>0$; $x<0$ 时, $x<\sin x<0$, 由夹逼法则知

$$\lim_{x\to0^+}\sin x=0,\quad \lim_{x\to0^-}\sin x=0$$

则

$$\lim_{x\to0}\sin x=0$$

(2) $0\leqslant|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\leqslant2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{2}$,

$$0\leqslant1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2}$$

$x\to0$ 时, $\dfrac{1}{2}x^2\to0$, 由夹逼法则有 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)=0$, 所以, $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

当 $x\to0$ 时, $\sin x\to0$, 因此函数是 $\dfrac{0}{0}$ 型, 不能直接得出极限. 表 1-6 给出当 $x\to0$ 时, 函数值的变化趋势.

表 1-6

x	±0.2	±0.1	±0.05	±0.01	±0.005	±0.001
$\sin x/x$	0.993347	0.998334	0.999583	0.999983	0.999995	0.999999

证明 在如图 1-9 所示的四分之一单位圆中, 设 $\angle POA=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 点 A 处的切线与 ON 的

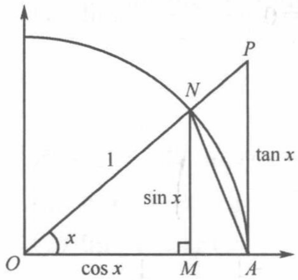


图 1-9

延长线交于 P，$NM \perp OA$，连 NA，则

$$NM = \sin x,\ \overset{\frown}{NA} = x,\ PA = \tan x$$

$\triangle OAN$ 面积 $<$ 扇形 OAN 面积 $< \triangle OAP$ 面积，所以

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

不等式各项除以 $\frac{\sin x}{2}$ 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}，即 \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

由夹逼法则得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

当 $x < 0$ 时，令 $t = -x$，则 $t > 0$，

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{-t\to 0^-}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

综上

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

例 1-20 求(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 (1) 令 $x = \frac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t = \frac{1}{x}\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$

这一极限证明略，e 是一个无理数，取小数点后 5 位数的近似值是 e≈2.71828.

例 1-21 求(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3x-2}$.

解 (1)令 $x = \frac{1}{t}$，则 $x\to 0$，$t\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}$$

(2) 令 $-\frac{4}{x} = \frac{1}{t}$，则 $x = -4t$，当 $x\to\infty$，$t\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-8t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-8} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^8} = \frac{1}{\mathrm{e}^8} = \mathrm{e}^{-8}$$

(3)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-3x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\lim_{x\to\infty}\left[(1-\frac{1}{x})^{-x}\right]^3 = \mathrm{e}^3$$

【思考与讨论】

1. 请判断下面的计算对吗，并说出理由.

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}x+3$.

2. $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x$. 下面的运算过程对吗？为什么？

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

第三节　函数的连续性

一、连续的定义

许多现实中的现象如自由落体的速度、人的身高的变化等都是随时间连续的变化的，数学上用函数的连续性来刻画这种现象. 实际上，数学上的连续和我们平时所说的连续一样，都是指“持续而不间断的”.

我们先从几何图形上认识一下连续性，如图 1-10 中函数在 $x=0$ 处没有定义，图像断开，其他处没有断开，故图 1-10 中函数图像在 $x=0$ 处不连续，其他点连续；图 1-11 中函数尽管在 $x=2$ 处有定义，但显然函数图像在 $x=2$ 处断开、不连续，其他点连续；图 1-12 中函数在 $x=0$ 断开，故函数在 $x=0$ 不连续，其他点都连续.

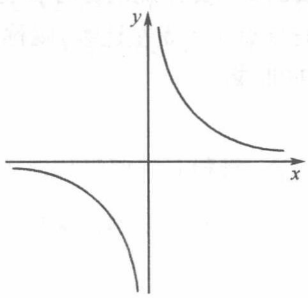


图 1-10

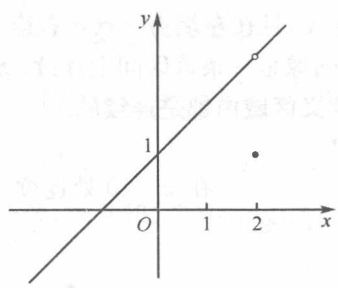


图 1-11

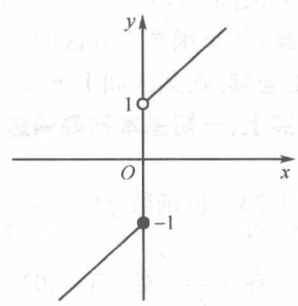


图 1-12

1. 函数的增量　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量由点 x_0 变到 x 时，$x-x_0$ 就称为**自变量的增量**，记为

$$\Delta x=x-x_0$$

函数值相应的变化称为**函数的增量**，记为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

或

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)$$

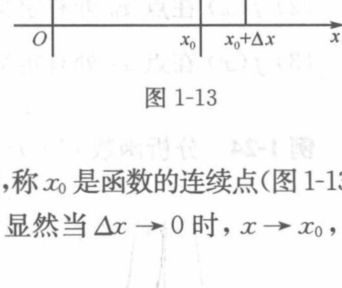


图 1-13

2. 函数连续性的定义

定义 1-6　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是连续，称 x_0 是函数的连续点(图 1-13).

在上述定义中，令 $x=x_0+\Delta x$，显然当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，因此有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,\ \text{即}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

这是连续的等价定义. 如图 1-14 所示，若 $f(x)$ 在 a 点连续，当 $x\to a$ 时，曲线上的点沿着曲线可以到达 $(a,f(a))$. 这个定义告诉我们，若函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则满足三个条件：①若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，不满足上述三个条件之一的点称为 $f(x)$ 的**不连续点**，也叫**间断点**.

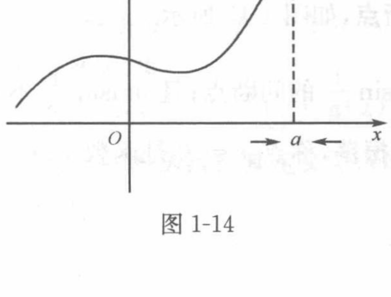


图 1-14

例 1-22 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin4x}{\sin2x},x>0,\\ x+2,x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续.

解 在 $x=0$ 处，有 $f(0)=2$；

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin4x}{\sin2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot2=2$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+2)=2$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2=f(0)$，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

在例 1-22 中，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)$ 极限存在且等于在 $x=0$ 点的函数值即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$；当 $x\to0^-$ 时，也有 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. 我们称 $f(x)$ 在 $x=0$ 点左连续和右连续.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限 $f(x_0^-)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；同样，如果 $f(x_0^+)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**. 显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续，即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$$

在开区间 (a,b) 上每一点都连续的函数，称为**在区间 (a,b) 上的连续函数**，或者说函数**在开区间 (a,b) 上连续**；如果函数在开区间 (a,b) 连续，且在左端点 $x=a$ 右连续，在右端点 $x=b$ 左连续，则称函数**在 $[a,b]$ 上连续**. 在某区间上连续的函数图像是一条该区间上连续、无间断的曲线.

事实上，一切基本初等函数在其定义区域内都是连续的.

例 1-23 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x},x>0,\\ 2x^2+a,x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.

解 在 $x=0$ 处，有 $f(0)=a$；

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2x^2+a)=a;\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此必然在 $x=0$ 处左、右都连续，即

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a$$

求得 $a=0$.

3. 函数的间断点

根据连续点的定义易知若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，有可能是发生了以下三种情况之一：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

(2) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例 1-24 分析函数 (1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2},x\neq0,\\ 1,x=0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

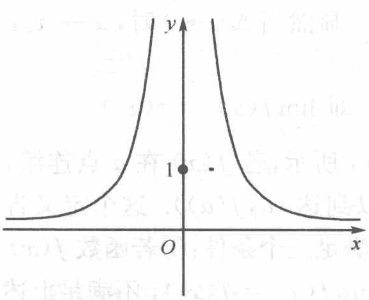


图 1-15

解 (1) $f(0)=1$，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$，所以 $x=0$ 为 $\dfrac{1}{x^2}$ 的间断点；称 $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的**无穷间断点**，如图 1-15 所示.

(2) $f(0)$ 无定义，故 $x=0$ 为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点；且 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，其函数值总是在 -1 与 $+1$ 之间振荡，称点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的**振荡间断点**.