“以学生为中心”高等教育工程数学创新系列教材

工程数学

线性代数

主　编　杨素娟　余品能　徐　为

南京大学出版社

“以学生为中心”高等教育工程数学创新系列教材

工程数学
线性代数

主　编　杨素娟　余品能　徐　为
副主编　王琛玮　毛自森　马凤丽
审　校　王在华　戴　华　汤华中　徐代忠
编　委（以汉语拼音为序）
刘海峰　刘守生　马凤丽　毛自森
庞秀梅　王琛玮　王在华　徐代忠
徐　为　余品能　杨素娟　姚泽清
张　瑰　郑　琴　赵　颖

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学线性代数 / 杨素娟，余品能，徐为主编
.— 南京 ：南京大学出版社，2014.1
“以学生为中心”高等教育工程数学创新系列教材
ISBN 978 - 7 - 305 - 12857 - 8

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨… ②余… ③徐… Ⅲ. ①工程数学—线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB11②0151

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 002786 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 “以学生为中心”高等教育工程数学创新系列教材
书　　名 工程数学线性代数
主　　编 杨素娟　余品能　徐为
责任编辑 陈亚明　吴　华　编辑热线 025 - 83596997

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 787×960 1/16 印张 15.75 字数 300 千
版　　次 2014 年 1 月第 1 版　　2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 12857 - 8
定　　价 30.80 元

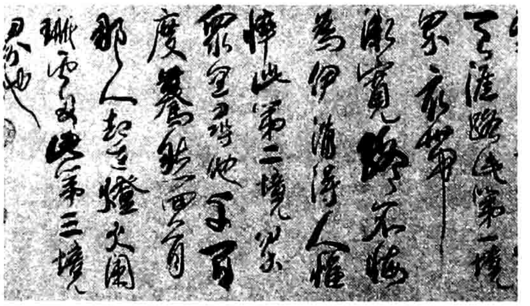
发行热线 025 - 83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有，侵权必究
* 凡购买南大版图书，如有印装质量问题，请与所购图书销售部门联系调换

致莘莘学子

莫言下岭便无难，
赚得行人空喜欢；
正入万山圈子里，
一山放过一山拦.

这首杨万里的《过松源晨炊漆公店》，简单而深刻地描述了人生、求学之路的漫漫征程. 无论是谁，正是在这一次次地面对困难、努力充实自己、克服困难的过程中，人生变得丰富而多彩. 线性代数课程是继高等数学之后，又一门公共数学基础课程. 高等数学研究的是变化问题，而线性代数是研究自然界的结构问题，即当时间固定时事物之间的关系. 学习一门学科并深入掌握、熟练应用之，不是一蹴而就的事情. 王国维先生在《人间词话》中谈到古今之成大事业、大学问者，必经过三种境界：



"昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路."

此第一境也.

"衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴."

此第二境也.

"众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处."

此第三境也.

如果能在学习中戒骄戒躁，按照做学问的这三种境界来实践，学好线性代数这门课程自然是水到渠成的事情.

致 教 师

您可能正准备给学生讲授线性代数课程. 线性代数相对于其他课程而言，课时不长，如何在有限的课时内将抽象的代数理论传授给学生，对任何一位教师都是一种挑战. 传统同济版的《工程数学——线性代数》教材，根据知识建立的顺序，将行列式先于矩阵作为课程学习的首要内容，而从逻辑上，行列式只是矩阵的一种运算. 加之行列式定义与运算的抽象性，给初学线性代数的学生制造了一个大大的拦路虎，同时也容易对线性代数的核心内容产生误解. 随着现代计算机技术的发展，向量、矩阵、线性变换等概念在线性代数中占据了越来越重要的地位，因此本教材将向量与矩阵作为学习的第一部分内容. 同时考虑到学生在考学中的实际需求，在知识体系上依然保留了行列式的地位，没有采用激进的改革方式.

以学生为中心是现代高等教育(乃至整个现代教育)的基本理念，提高学生理解和熟练运用线性代数的知识能力，要比以教师为主体，讲授完整的理论定理更加重要. 演绎式的理论体系，再结合演绎式的教学理念，违背了知识认知的规律，让学生主动发现与探索，在解决问题中学习，是更加有效的教学方式.

本教材配备了基础练习、口述练习、提高练习和计算机实践练习题，其中前两项所有学生必须完成，以培养学生线性代数的基本素养，提高练习给学有余力的学生进一步钻研，有计算机条件的院校应该落实计算机实践题目的练习.

如果您能告知本书中的错误，哪怕是很小的错误，我们都会十分感激. 如果您为本教材的改进提出建议，哪怕是细微的改进，我们都真诚欢迎.

祝您教学愉快!

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

致　谢

在《工程数学——线性代数》编写组同事们的一致努力下，书稿终于编写完成. 期间得到数学中心领导和同事们的关心和支持. 王在华教授、南京航空航天大学的戴华教授以及北京大学的汤华中教授在审订过程中给予了很多中肯的改进意见，对于教材内容的深化和提升有很大帮助，在此深表感谢！

无论是在教材编写的启动阶段、编写过程中，还是教材的正式出版，理学院教研办徐代忠主任均给予了充分的支持与鼓励，勉励大家在“以学生为中心”的教育理念下，积极开拓创新，为高等教育事业贡献力量. 可以说没有徐主任就没有本教材的诞生. 由于编写组水平有限，谬误之处在所难免，本教材仅是高等工程教育改革的一次探索，抛砖引玉为目的. 同时感谢为教材编写、出版事宜付出辛勤劳动的教研办、出版社等工作人员.

序 言

一、“以学生为中心”的教育理念呼唤本土化的线性代数教材

18 世纪法国著名启蒙思想家、教育家卢梭说过：教育即生长，生长就是目的，在生长之外别无目的.


Jean-Jacques Rousseau
(1712—1778)

这与建构主义(constructivism)所提倡的“以学生为中心”的教育理念不谋而合，即强调学生自身对知识的主动探索、主动发现和对所学知识意义的主动建构. 由于建构主义所要求的学习环境得到了当代最新信息技术成果的强有力支持，这就使建构主义理论日益与广大教师的教学实践普遍地结合起来，从而成为国内外学校深化教学改革的指导思想.

线性代数作为高等院校理、工、经、管类各专业的一门数学基础课程，在大学数学中占有重要地位. 瑞典的 L. 戈丁说过，没有掌握线性代数的人简直就是文盲. 他在自己的名著《数学概观》中说：要是没有线性代数，任何数学和初等教程都讲不下去. 按照现行的国际标准，线性代数是通过公理化来表述的. 它是第二代数学模型，其根源来自于欧几里得几何、解析几何以及线性方程组理论. 如果不熟悉线性代数的概念，如初等变换、线性空间、矩阵表示等，要去学习自然科学，现在看来就和文盲差不多，甚至学习社会科学也是如此.

因此，线性代数的教学内容和方法是国内外数学工作者十分关心的问题. 传统的线性代数教学追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，注重“基本知识的传授”和“基本技能的练习”，重理论、轻实践，导致内容过于抽象. 教师讲授很多纯代数的概念、原理、范例，但是这些知识点其原本的几何背景，在工程实践、经济社会中有什么现实意义，几乎不涉及. 学生为学习而学习，为读书而读书，缺乏“学为用、学为战”的活力. 这样不利于线性代数与其他课程及学生自身专业的衔

接，普遍存在"学不会，用不了"的尴尬局面. 在我国，数学工具在科技实践中的严重缺失，是导致我国科技创新能力低下的原因和普遍现象，数学教育对这种状况不能视而不见.

随着计算机的快速发展，用线性代数方法解决实际问题已渗透到现代科学、技术、经济、管理的各个领域，极大改变了科学技术和社会生活，对新的数字化时代的前进起到开创性的决定作用.

如何在线性代数的逻辑严密性、理论体系的完整性与学员学习的趣味性、易懂性、主动性、实用性、创新性之间取得一个平衡点，是对线性代数教材提出的紧迫任务.

二、本教材的三大特色

为了顺应线性代数课程改革的世界潮流和方向，满足我校教学改革的需求，在理学院"以学生为中心"研究课题的引领下，启动了本教材的编写工作.

要编写好本教材，不仅要遵循数学学科的发展规律，更要考虑学生的认知发展规律. 因此需要从自然、社会和思维三大领域中去探寻，这就上升到了哲学的高度.

人们在探寻未知的时候，会追问三个问题：

是什么，从哪里来，向哪里去.

佛学禅宗式的回答是：

我是我，从来处来，向去处去.

回归本质，遵循规律，结合历史发展，把握时代前景，是做好线性代数课程教学改革的原则和指导方针. 与传统教材相比，本教材具有以下三大特色：

1. 呈现内容的几何直观

虽然文字更能激发人的想象力，"一千个读者就有一千个哈姆雷特". 但是毋庸置疑的是，我们已经进入了"读图时代"，这是科技进步带来的必然结果. 为了增添可读性、趣味性、史料性，同时也为了降低数学教材的严肃与呆板，本书配备了一些必要的图片.

法国哲学家、数学家、解析几何的创始人笛卡尔说：没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有意义的. 笛卡尔将代数方法应用于几何，创立的解析几何将数与形真正统一起来，极大地推动了数学的进展.

代数的英文是 Algebra，源于阿拉伯语，其本意是"结合在一起"的意思. 也就是说代数的功能是把许多看似不相关的事物"结合在一起"，即进行抽象. 抽象

的目的是为了解决问题的方便,把许多看似不相关的问题化归为一类问题.

要具备这种"结合"能力,抽象能力,须先从几何意义入手,轻松而迅速地理解、把握线性代数的基本概念、定理的几何本质,建立对线性代数的感性认识,再培养对复杂代数问题的抽象数学的能力,就会事半功倍.直观和抽象是一切科学的两面,只是近年来我国的数学教学过分强调了抽象思维的能力训练.当然,也不能只强调了几何意义而丢掉了计算和推导,那又丢掉了代数的精华,同样不可取.

线性代数以向量、空间等作为研究对象,本身就是几何学的内容,因此呈现其几何特征,既符合认知规律,也与学科发展的基础相一致.

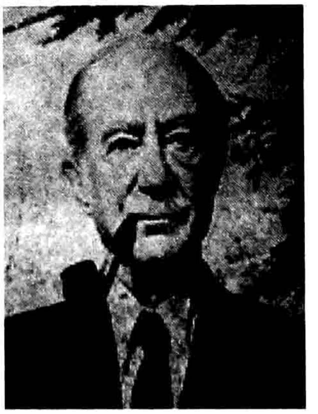
2. 融入数学应用案例

线性代数以矩阵、向量、空间等作为研究对象,由于这些内容高度抽象,按照传统的内容进行讲授晦涩难懂,为了易学易懂以及培养学生实际应用的能力,本书加入了精心设计的应用案例,鲜活有趣地将抽象的数学与生活、工程应用相联系,使学习变得趣味盎然.正如美国教育家 David C. Lay 所说:"线性代数是最有趣、最有价值的大学数学课程."

另外,数学本身就具有工具特性,美国学者道恩斯(Douenss)教授从文艺复兴时期到 20 世纪中叶所出版的浩瀚书海中精选了 16 部名著,并称其为"改变世界的书".在这 16 部著作中,直接运用了数学工具的著作就有 10 部,如牛顿的《自然哲学之数学原理》(1729 年),爱因斯坦的《相对论原理》(1916 年),史密斯的《国富论》(1776 年),马克思的《资本论》(1867 年)等,间接运用数学工具的则无一例外.

因此由数学的这种广泛工具性便知,数学从应用中来,须到应用中去.当数学应用于一个领域时,数学方法、数学本身都会发生变革,因此今日数学的教学,不结合其广泛的应用性是脱离时代的,也是不符合数学本身的发展规律的.

3. 体现数学文化元素



Morris · Kline(1908—1992)

美国数学史家、数学教育家莫里斯·克莱因深受哥廷根大学数学传统的影响,注意研究数学史和数学教育,是著名的应用数学家和数学教育家,对数学有很深的理解.他感受到"在人类文明中,数学如果脱离了其丰富的文化基础,就会简化成一系列的技巧,它的形象也就被完全歪曲了".千锤百炼的数学教科书早已割断了数学与历史、数学与文化的血脉联系.

数学文化包含数学的历史、数学家的数学思想及思维方法等多方面内容.由于受我国高考选拔机制的

左右，学生在长期的学习中，精力集中于大量做题，对于所学知识的历史文化、发展历程知之甚少，更无从把握数学学科的各种思想，即数学的文化品格长期以来已被逐渐淡忘. 这里提出融数学文化于教学中的思想，只是古识重提罢了.

Plato（公元前 427—前 347）

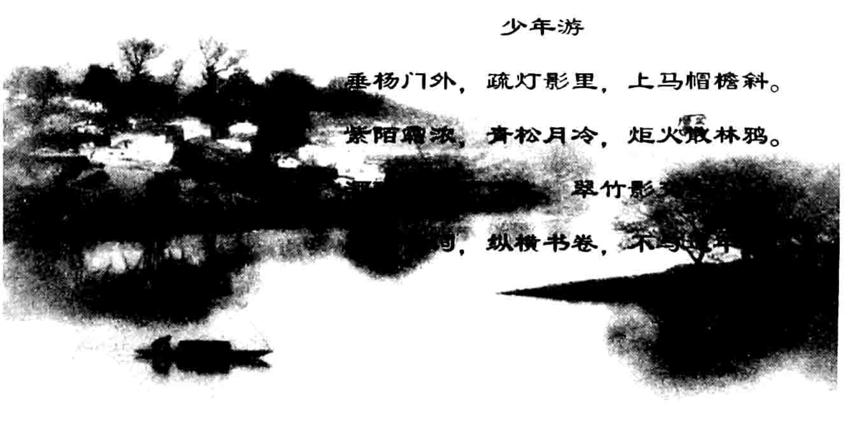
古希腊大哲学家柏拉图（Plato）创办的哲学学校，规定不懂几何学的人不得就读. 柏拉图认为，立足于数学之文化品格的数学训练，对于陶冶一个人的情操，锻炼一个人的思维能力，直至提升一个人的综合素质水平，都有非凡的功效.

闻名世界的美国西点军校，规定学员要必修多门高深的数学课. 因为基于数学文化品格的严格数学训练，使学员形成严谨精确的思维习惯，能把特殊的活力与高度的灵活性结合起来，从而具有把握军事行动的能力和适应性，为驰骋于疆场打下坚实的基础.

立足数学文化的数学教育，既保留了数学的严谨性与体系完整性，又远高于传统数学教育注重解题的教育模式.

建构主义理论认为，学习的过程，就是将新的知识与头脑中原有的知识结构之间建立联系，即通过同化与顺应两种过程逐步建立起认知结构. 这与笛卡尔的观点也是不谋而合的，笛卡尔说：所有人们能够知道的东西，都是互相联系着的. 而我们教育者需要做的，就是帮助学生建立起这种联系，形成他们自己特有的知识结构.

最后，基于中国传统文化的深厚底蕴，适当采撷之，融合于数学课程，是将科学与艺术相结合的尝试，因为学习虽然是一种理性行为，心灵与精神的抚慰却是必不可少的.



三、学习与思考、知识与思想

春秋大教育家孔子云:“学而不思则罔,思而不学则殆.”十二个字清楚明白地阐述了学习与思考的重要性,二者缺一不可.学习可以拓展视野,思考使人明辨是非.是非观、价值观、人生观的形成,就在于“学与思”之间.代表着法国理性精神的17世纪博学大师笛卡尔更是宣称:“我思故我在”.对于任何一个国家和民族而言,理性的思辨精神与学习的质疑精神,都是不可或缺的.

数学家无疑是热爱思考与创新的一个群体,提出新概念、新理论、新方法,汇集成波澜壮阔的数学思想:牛顿、莱布尼茨的微积分思想;欧几里得几何公理;高斯等的非欧几何;笛卡尔的解析几何;伽罗瓦“群”的代数概念,等等.大家在学习他们所创立的数学知识与理论体系的同时,更应该看到的,是他们思考与创新的精神.

数学从知识体系上,是自然科学、技术科学与人文科学的基础,而更为重要的是数学对人类社会的“文化功能”:培养发展人的思维能力.一个人无论从事什么职业,思维能力都是无形的资本,数学恰是锻炼思维能力的体操.古往今来在社会上有卓越贡献的大家:纳什的均衡论、冯·诺依曼的计算机理论、将“优选法”应用于生产实践的华罗庚等,无不有着深厚的数学功底与数学思维能力.

关于数学及其应用,不同时代不同的数学家,观点也不尽相同.英国数学家哈代将数学与绘画和诗歌作类比,认为数学是美的艺术.对于哈代来说,最美的数学应当没有一点在现实世界的应用,也就是他所说的纯数学,尤其是他所钟情的数论.不过,随着相对论的运用成为核武器发展的一部分,数论在公钥加密中起到的显著作用,使得数学的纯粹性观点,也就不是那么不可动摇的了.

冯·诺依曼作为二十世纪最杰出的数学家之一,兼纯粹与应用于一身,并在两方面都卓有建树.与哈代不同,他在“纯粹”与“应用”之间采取了平衡的态度.一方面,他相信“现代数学中一些最好的灵感,很明显地起源于自然科学”,认为“数学来源于经验是比较接近真理的看法”.另一方面,他也赞同数学具有艺术的特征,认为“数学家无论选择题材还是判断成功的标准主要都是美学的”.

我国著名数学家华罗庚,既是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论与多复变函数论等很多方面研究的创始人与开拓者,又努力尝试寻找一条数学和工农业实践相结合的道路.在理论研究的同时,带领学生到工农业实践中去推广优选法、统筹法,以提高工作效率,改变工作管理面貌.在人才培养方面,他用自己在抗日战争中运用数论知识破解日军密码的经历,勉励学生不能放弃理论研究,走理论与实践相结合之路.

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

创立了解析几何，推动了数学的发展进程，并被恩格斯高度评价的法国数学家笛卡尔，也是一个关心科学的用途的人. 他的科学工作的一个重要方面，就是把科学成果付之应用，为了人类的幸福而去掌握自然.

运用自己的聪明才智，去掌握和应用世界上以美学为标准建立起来的数学学科，这本身就是一件无比美好的事情. 因此以美学大师朱光潜先生“谈美”的一句话作为本书序言的结束是极为恰当的：“慢慢走，欣赏啊！”

杨素娟

2013 年 5 月南京

雅典学院　意大利　拉斐尔(Raffaello Sanzio, 1483—1520)

雅典学院是古希腊唯心主义哲学家柏拉图兴办的. 拉斐尔(与达·芬奇和米开朗基罗合称“文艺复兴三杰”)在这幅巨型壁画中，描绘了当时这个学院里的哲学家、科学家以及艺术家们进行学术探讨的热烈场面. 画面中央边走边议的是柏拉图和他的弟子亚里士多德，左边的一组人物中有柏拉图的老师苏格拉底，而右边的则是天文学家托勒密，弯着腰在画几何图形的则是阿基米德，在他们的后面，戴着暗色无檐帽的是画家本人. 左边的下方是以数学家毕达哥拉斯为核心的一组人物，还有一个伊斯兰教学者叫阿维洛依. 在台阶上坐着沉思的是赫拉克利特，离他不远躺着第奥根.

目 录

第 1 章　向量、矩阵及其代数运算

客观世界中任何事物都是质与量的统一，而数学就是从量的侧面去探索和研究客观世界的一门学问. 当研究的关联因素不止一个时，就有了向量的概念. 向量是空间结构最基本的构成元素，是线性代数研究的基本对象. 如果从向量的角度来研究矩阵，则矩阵就是由若干列向量或行向量所构成，而不仅是一个个元素，这种观念更加现代，相关论证也更加简洁. 若从向量线性组合的角度考虑，则容易将向量空间与线性方程组建立联系. 基于向量的重要性，本教材将向量作为学习的第一个概念.

矩阵是线性代数的另一个重要概念，矩阵方法是线性代数的一个重要方法.

1.1　n 维向量及其运算

1.1.1　向量的定义

向量(vector)是物理和几何上的概念，如力、位移、梯度等，通常用有向线段 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示，是既有大小、又有方向的量.

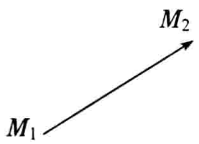


图 1-1-1　自由向量

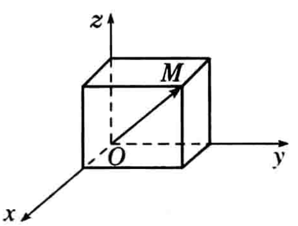


图 1-1-2　空间直角坐标系　向量与点一一对应

线性代数起源于对二维和三维笛卡尔直角坐标系的研究，将向量的起点置于坐标原点，则向量由其终点唯一决定，再由点与坐标的一一对应性，就建立了向量与三元有序数组(x,y,z)的一一对应关系，从而可以实现几何的代数化.

将代数方法应用于几何，即用数量的方法研究几何，是 17 世纪的法国数学家笛卡尔首先提出来的. 笛卡尔主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短，创立了坐标几何. 他说："所有人们能够知道的东西，也同样是互相联系着的."

坐标几何创立以前，几何与代数是彼此独立的两个分支. 坐标几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使形与数统一起来. 因此，坐标几何把数学造成一个双面的工具. 几何概念可用代数表示，几何的目标，可通过代数达到；反过来，给代数语言以几何解释，可以直观地掌握那些语言的意义.

运用坐标法(点与有序数组、点的轨迹与方程的对应)，不仅可以把几何问题通过代数的方法解决，而且还把变量、函数，以及数和形等重要概念密切联系了起来，特别是将变量引入数学，使数学进入了一个新的发展时期，这就是变量数学的时期.

因此，作为变量数学发展的第一个决定性步骤，坐标几何的建立对于微积分的诞生有着不可估量的作用. 恩格斯对此曾经作过评价："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了."


René Descartes(1596 - 1650)

唐代陈子昂有一首《登幽州台歌》：

前不见古人，后不见来者.
念天地之悠悠，独怆然而涕下.

用来描述笛卡尔对数学所做的贡献也许有争议，不过倒颇能体现笛卡尔直角坐标系的时、空意境.

一条坐标轴与实数域 **R** 相对应，平面直角坐标系中的点(向量)对应二元数组(x,y)，空间直角坐标系中的点(向量)与三元数组(x,y,z)对应，那么四元数组(x,y,z,w)应该对应于四维空间坐标系中的点，即存在第四条坐标轴垂直于三维立体空间，四个坐标轴构成一个超多面体空间.

四维空间的物理解释就是爱因斯坦的时空理论，三维物理空间之外增加了一个与之垂直的时间轴. 人类作为有生命周期的高级动物，身体所在的是三维立体空间，同时还有另外一维的时间轴来度量生命的长度.

许多实际问题中，研究对象往往需要用更多个数构成的有序数组来描述，例如：

1) 确定飞机的状态，需要 6 个参数：飞机重心所在空间的位置需要 3 个参数，机身的水平转角，机身的仰角以及机翼的转角；

2) 衡量一个部队的战斗力，要根据其拥有的各种武器装备、操控这些装备的人员素质、运筹帷幄，决胜千里的优秀指挥官等多方面因素；

3) 经济系统的部门之间存在着投入产出关系，而这些部分多达数百个；

4）商品的条形码包含的信息：生产国、生产厂家、生产日期等；

5）药品所包含的各种成分及其用量；

6）次数不超过 n 的多项式的系数.

因此，有必要将几何向量推广至更一般情况，引入 n 维向量的概念.

定义 1.1.1　由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组，称作 n **维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量.

分量全为实数的向量称为**实向量**，分量为复数的向量称为**复向量**，常用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量的全体. 本书除特别指明外，一般只讨论实向量.

n 维向量可写成一行，也可写成一列. 分别称为**行向量**(row vector)和**列向量**(column vector)，从几何的角度来说，它们是同一个向量，都是 n 维坐标系中的一个点. 但是从运算的角度来说，n 维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

与 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \tag{1.1.2}$$

看做是两个不同的向量，二者是**转置**(transpose)的关系. 在本书中，用黑斜体小写希腊或英文字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$ 表示列向量，用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}},\cdots$ 表示行向量. 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，默认为是列向量.

向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维**单位坐标向量**.

定义 1.1.2　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是两个 n 维向量.

(1) **向量相等**　若 $a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$，称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

(2) **零向量**　所有分量都为 0 的向量，记作 $\mathbf{0}=(0,\cdots,0)^T$.

(3) **负向量**　称向量 $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com