高等学校教材

高等数学（下册）

主　编　曲　如
副主编　郭新辰　宋代清　赵晓萍　范　姝　谷　晶　武文华

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（下册）

主　编　曲　如
副主编　郭新辰　宋代清　赵晓萍　范　姝　谷　晶　武文华
编　者　邵殿国　朱云峰　张中华

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分为上、下两册。下册共五章，内容包括多元函数微分学、多元数量函数的积分学、向量函数的积分学、无穷级数、常微分方程。本书在编写过程中以“注重应用”为原则，在例题和习题中增加了很多应用实例，涉及电力系统、化学工程、机械工程、生物工程、物理学、医学、经济学等多个领域。

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的高等数学教材或教学参考书，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/曲如主编.--北京:高等教育出版社,2014.1

ISBN 978-7-04-038896-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曲… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 277483 号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 杨 帆　封面设计 李卫青　版式设计 童 丹
插图绘制 尹文军　责任校对 孟 玲　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 三河市骏杰印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 18.5
字 数 340千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2014年1月第1版
印 次 2014年1月第1次印刷
定 价 27.20元

物 料 号 38896-00

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010)82086060
反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn
通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

目录

第八章

多元函数微分学

上册中，我们研究的函数是仅依赖于一个自变量的函数，这种函数称为一元函数. 但在许多实际问题中，会涉及多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情况，由此引入多元函数以及多元函数的微积分问题. 本章将在一元函数基础之上讨论多元函数的微分法及其应用. 从一元函数到二元函数，在内容和方法上都会出现一些实质性的差别，而多元函数之间差异不大，因此讨论多元函数时，将以二元函数为主.

§8.1 多元函数的基本概念

一、平面点集的概念

讨论一元函数时，经常用到邻域和区间的概念，由于讨论多元函数的需要，我们首先把它们加以推广，同时还要引入平面点集的一些其他概念. 记 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

邻域：设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$\delta$ 为一正数，与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上 $U(P_0,\delta)$ 表示一个以 P_0 为圆心、δ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

$U(P_0,\delta)$ 中除去点 P_0 后所剩部分，称为点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

如果不需要强调邻域的半径 δ，则可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域. 点 P_0 的某个去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

设 P 为平面上任一点($P\in\mathbf{R}^2$),E 是一平面点集($E\subset\mathbf{R}^2$),则 P 与 E 有以下三种关系:

(1) **内点**:若存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$,则称 P 是 E 的内点;

(2) **外点**:若存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称 P 为 E 的外点;

(3) **边界点**:若点 P 的任一邻域内,既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点.

E 的边界点的全体称为 E 的**边界**.

如图 8-1-1,P_1 为 E 的内点,P_2 为 E 的外点,P_3 为 E 的边界点.

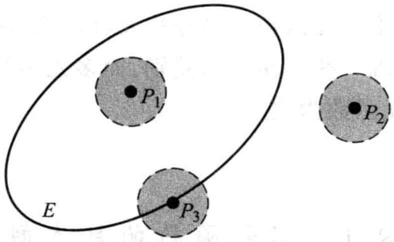

图 8-1-1

从上述定义及图 8-1-1 可知,E 的内点必定属于 E;E 的外点必不属于 E;而 E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E.

聚点:若点 P 的任何邻域中都有无穷多个点属于点集 E,则称 P 为 E 的一个聚点.聚点本身可能属于 E,也可能不属于 E. E 的内点必是聚点.边界点可能是聚点,也可能不是.

例如,点集 $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}$,满足 $1<x^2+y^2<4$ 的点都是 E 的内点;满足 $x^2+y^2=1$ 的点均为 E 的边界点,它们都属于 E;满足 $x^2+y^2=4$ 的点也均为 E 的边界点,但它们都不属于 E. E 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 上的点的全体,点集 E 以及它的边界上的一切点都是 E 的聚点(图 8-1-2).

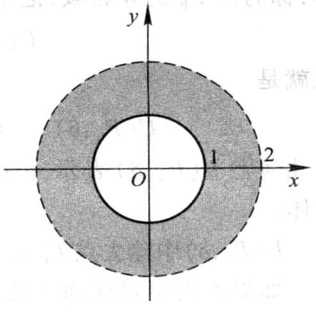

图 8-1-2

开集:若 E 的每一点都是它的内点,则称 E 为开集;

闭集:开集加上它的边界称为闭集;

连通集:若 E 内的任何两点,都可以用 E 中

的折线连结起来，则称 E 为连通集；

开区域：连通的开集称为开区域（或区域）；

闭区域：开区域和它的边界一起所构成的点集称为闭区域；

有界集：如果存在常数 $r>0$，使得 $E\subset U(O,r)$，则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

例如，$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 和 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 均是 xOy 面中的开区域；$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}$ 和 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 均是 xOy 面中的闭区域；$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}$ 为无界闭区域，$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为有界开区域.

二、多元函数的概念

在很多自然现象以及工程实际问题中经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1　一定量的理想气体的压强 p，体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系 $p=\dfrac{RT}{V}$，其中 R 为常数. 当 V,T 在集合 $\{(V,T)\mid V>0,T>T_0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时，p 的对应值就随之确定.

例 2　设 R 是电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

当 R_1,R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

这些例子的具体意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，即都涉及一个变量与其他多个变量之间的依赖关系，抽取其共性，可以得到多元函数的概念. 首先定义二元函数.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的非空子集，如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称变量 z 是变量 x,y 的**二元函数**（或**点 P 的函数**），记为 $z=f(x,y)$（或 $z=f(P)$）. D 称为函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，$R_z=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$，这里的 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，当 $n=1$ 时，就是一元函数，当 $n\geqslant 2$ 时，称为多元函数.

对给定的一个二元函数，则其定义域也相应给定. 如果是从实际问题中建立一

个二元函数,则该函数的自变量有着实际意义,其取值范围要符合实际.如果是用解析式表示的函数,它的定义域就是使解析式中运算有意义的自变量取值的全体.

例 3　在经济学中,常用的 Cobb-Douglas 生产函数为 $z=Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$,这里 z 表示生产量,x,y 分别表示劳动力和资本数量,A 为常数,α 是参数($0<\alpha<1$),函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

例 4　求函数 $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ 的定义域,并作出定义域的示意图.

解　要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases} x^2+y^2-4\geqslant 0, \\ x-\sqrt{y}>0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 4, \\ x^2>y\geqslant 0, \end{cases}$$

故函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 4,x^2>y\geqslant 0\}.$$

D 的图形如图 8-1-3 所示.

例 5　求函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2-1)+\ln(z-x^2-y^2)$ 的定义域.并作出定义域的示意图.

解　要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases} |x^2+y^2+z^2-1|\leqslant 1, \\ z-x^2-y^2>0, \end{cases}$$

故函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2,z>x^2+y^2\}.$$

D 的图形如图 8-1-4 所示.

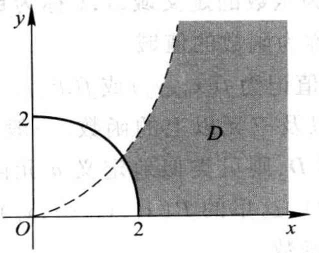

图 8-1-3

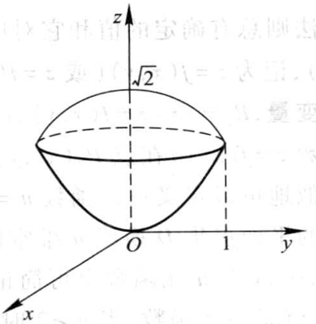

图 8-1-4

设 $z=f(x,y)$ 是定义在区域 $D(\subset \mathbf{R}^2)$ 上的二元函数，点集 $S=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形. 二元函数的图形通常是空间的一张曲面(图 8－1－5). 定义域 D 就是该曲面在 xOy 面上的投影.

例如，二元函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面，它的定义域是整个 xOy 平面. 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为中心，半径为 1 的上半球面，它的定义域是 xOy 平面上的以原点为中心的单位圆. 二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是顶点在原点的圆锥面，它的定义域是整个 xOy 平面.

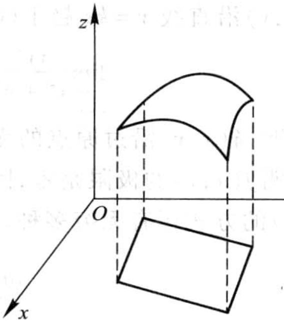

图 8－1－5

三、多元函数的极限

与一元函数类似，二元函数的极限也是反映函数值随自变量变化而变化的趋势.

定义 2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，A 是一个确定的数. 若对任给正数 ε，存在某一正数 δ，使得当 $P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时，恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A，或 \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A，或 \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

也可记为

$$f(P)\to A(P\to P_0)，或 f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

一般地，我们将二元函数的极限叫做**二重极限**. 这里应当注意，按照二重极限的定义，必须当动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都是以常数 A 为极限，才有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

如果仅当 $P(x,y)$ 以某种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于常数 A，那么还不能断定 $f(x,y)$ 存在极限. 但如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的常数，我们便能断定 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 6　讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性.

解　当 (x,y) 沿直线 $x=0$ 趋向于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{0+y^4}=0,$$

当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0,$$

这说明当(x,y)沿过原点的无穷多条直线趋于原点时,$f(x,y)$都趋于零.但也不能说明$f(x,y)$的极限是零,因为无穷多条路径并不代表所有路径,点(x,y)趋于$(0,0)$的方式还有无穷多种,当(x,y)沿抛物线 $x=y^2$ 趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2},$$

因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

二元函数极限的定义与一元函数极限的定义在内涵上是一致的,因此二元函数也有与一元函数类似的极限运算法则.

例 7 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}(a\neq 0)$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\left[\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]=\lim\limits_{xy\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{x\to a}x=a.$

例 8 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$,且$\left|\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例 9 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$.

证 因为$|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$,所以

$$0\leqslant\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{|xy|\cdot|y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|y|,$$

而当 $x\to 0,y\to 0$ 时,$\dfrac{1}{2}|y|\to 0$,由夹逼准则可知,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$$

四、多元函数的连续性

与一元函数一样,仍采用函数在一点的极限值与在该点的函数值是否相等来定义二元函数的连续性.

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,点 $P_0\in D$ 且 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**,否则,称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处**间断**或不连续.

如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,或称 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**.

例 10 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处是否连续?

解 当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,则有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

它的值与常数 k 有关.这说明自变量按不同方式趋于点 $(0,0)$ 时,函数有不同的极限,所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在,因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

例 11 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2y+4}-2}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2y+4}-2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y(\sqrt{x^2y+4}+2)}{x^2y+4-4}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x^2y+4}+2)=4.$$

和一元函数一样,二元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)仍是连续函数,二元连续函数的复合函数也是连续函数.由 x 和 y 的基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次复合运算后能用一个式子表示的二元函数称为**二元初等函数**.一切二元初等函数在其定义区域(包含在定义域内的区域或闭区域)上是连续的.

例如函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ 在 xOy 平面内处处连续;而函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 仅在原点处不连续;函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2-1}$ 在单位圆 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上处处间断,一般地将 $x^2+y^2=1$ 称为该函数的间断曲线.

在空间直角坐标系下,平面区域 D 上的二元连续函数 $z=f(x,y)$ 的图形是在 D 上张开的一张"天衣无缝"的连续曲面.

一元连续函数在闭区间上的性质,也可推广到二元函数上去.

性质 1(有界性定理) 如果二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则它在 D 上有界,即存在常数 $M>0$,使得对任意 $(x,y)\in D$,有

$$|f(x,y)|\leqslant M.$$

性质 2(最值定理) 如果二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则它在 D 上必能取到最大值和最小值,即存在 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,使得对任何 $(x,y)\in D$,都有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2).$$

性质 3(介值定理) 如果二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则它必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值,即对任何 $c\in[m,M]$,至少存在一点 $(x_0,y_0)\in D$,使得

$$f(x_0,y_0)=c.$$

以上关于二元函数的极限、连续性的概念及相关性质可类似地推广到二元以上的函数。

习题 8-1

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、无界集、开区域、闭区域?

(1) $E=\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$;.

(2) $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\leqslant x^2\}$;

(3) $E=\{(x,y)\mid x-y\neq 0\}$;

(4) $E=\{(x,y)\mid 9x^2+4y^2>36\}$.

2. 求下列函数值:

(1) 已知 $f(x,y)=1+x^y-y^x$,求 $f(1,2)$;

(2) 已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$;

(3) 已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$;

(4) 已知 $f(x+y,x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,求 $f(x,y)$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $z=\ln[(x-1)(y+1)]$;

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

（3）$z=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{y-x^2}}$.

4. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{\sin(e^x+y)}{x+y}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to\frac{1}{2}}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$；（4）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；（6）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

5. 证明下列极限不存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}, & x^2+y^2\neq0,\\ \dfrac{1}{2}, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性.

7. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性.

8. 沙石运输问题.

设有体积为 V m³ 的沙石用长方体形状的有底无盖且在底部装有滑行器的木箱运输，这种木箱可以反复使用（假设木箱永不损坏）. 木箱各部分的造价是：箱底和两端的材料费用为 a 元/m²，另两侧面的材料费用为 b 元/m²，箱底两个滑行器与箱子同长，材料费为 c 元/m. 不论箱子大小，每装一箱沙石需支付装运费 d 元. 试建立运输沙石的总费用 u 与箱子的长、宽、高的关系式.

§8.2 偏 导 数

在生产和工程实际中，常常需要了解一个受多种因素制约的量，在其他因素固定不变的情况下，随一种因素变化的变化率问题. 这些实际问题的产生，促使人们研究多元函数在其他自变量固定不变时，函数随一个自变量变化的变化

率——偏导数问题.

一、偏导数的定义及其计算

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0)$ 内有定义,当 y 固定在 y_0,而 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时,且 $(x_0+\Delta x,y_0)\in U(P_0)$,相应的函数的增量为 $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$(称为**偏增量**).如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\tag{8.2.1}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的**偏导数**,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},z_x(x_0,y_0)\text{ 或 }f_x(x_0,y_0).$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数可定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},\tag{8.2.2}$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},z_y(x_0,y_0)\text{或}f_y(x_0,y_0).$$

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处关于 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数是 x,y 的二元函数,称它为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的**偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x\text{ 或 }f_x(x,y).$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y\text{ 或 }f_y(x,y).$$

由偏导函数的定义可知,函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 与偏导函数 $f_x(x,y)$ 有如下关系:

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}.$$

以后在不至于混淆的情况下,将偏导函数也简称为偏导数.

对于二元以上的函数,用同样的方法可以定义偏导数.

从偏导数的定义可以看出,求多元函数对其中一个自变量的偏导数时,实际上只需将其他自变量看成常量,按照一元函数的求导法则进行即可.

例 1 求函数 $z=x^2y+\sin y$ 在点 $(1,0)$ 处的偏导数.

解 将 y 看作常量,对 x 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy;$$

将 x 看作常量,对 y 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+\cos y.$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=(2xy)\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}=0,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=(x^2+\cos y)\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}=2.$$

例 2　设 $z=x^y(x>0,x\neq1)$,求证:$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

证明　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$$

例 3　已知电阻 R_1,R_2,R_3 并联的等效电阻为 $R=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^{-1}$,若 $R_1>R_2>R_3>0$,问变化三个电阻中的哪一个,对等效电阻 R 影响最大.

解　因为

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R^2}{R_1^2},\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R^2}{R_2^2},\frac{\partial R}{\partial R_3}=\frac{R^2}{R_3^2},$$

R_3 最小,所以$\frac{\partial R}{\partial R_3}$最大,故变化 R_3 对 R 影响最大.

例 4　已知理想气体的状态方程 $pV=RT$(R 为常量),求证:

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证明　因为

$$p=\frac{RT}{V},\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$

$$V=\frac{RT}{p},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};$$

$$T=\frac{pV}{R},\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R};$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$