学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

初中数学

三年级（上）

主编／于秋生 王瑛 胡耀华

东北师范大学出版社

学第一 考第一 永远争第一

学考第1

教材同步点拨

·人教大纲版·

初中数学

三年级(上)

主编/于秋生 王瑛 胡耀华

东北师范大学出版社·长春

□本册主编：于秋生　王　瑛　胡耀华
□编　　者：于秋生　王　瑛　胡耀华　宫明义　孙春红　于军生　于培冰
李　红　柳国光　衣美青　任　喆　蒋声华　于建春　刘翠霞
孙奎波　常宗杰　孙景晓　陈莲红　周维波

图书在版编目（CIP）数据

学考第一．教材同步点拨．初三数学．上：人教大纲版／于秋生，王瑛，胡耀华主编．—长春：东北师范大学出版社，2005.4
ISBN　7-5602-4076-3

Ⅰ．学…　Ⅱ．①于…②王…③胡…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 019598 号

□总策划：第二编辑室
□责任编辑：才广林　□封面设计：魏国强
□责任校对：张志荣　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号（130024）
电话：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
广告许可证：吉工商广字 2200004001001 号
东北师范大学出版社激光照排中心制版
延边新华印刷有限公司印装
吉林省延吉市河南街 818 号（133001）
2005 年 5 月第 1 版　2005 年 5 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：13　字数：405 千
印数：00 001—20 000 册

定价：15.60 元

第十二章 一元二次方程

代数部分

一 一元二次方程

12.1 用公式解一元二次方程

基础知识归纳

1. 整式方程

方程两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫作整式方程.

2. 一元二次方程及一般形式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫作一元二次方程.

一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，其中：ax^2 叫作二次项，a 叫作二次项系数；bx 叫作一次项，b 叫作一次项系数；c 叫作常数项.

3. 一元二次方程的求根公式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4a(\geqslant 0)$.

重点知识讲解

1. 对一元二次方程的理解

如果方程是一元二次方程，它必须满足三个条件：①是整式方程；②只含一个未知数；③未知数的最高次数为2. 三个条件缺一不可. 其一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中的 $a\neq 0$ 是一元二次方程一般形式的重要组成部分，不可丢掉，不然就不一定是一元二次方程.

一元二次方程的一般形式是判定一个整式方程是不是一元二次方程的重要依据. 为此要将整式方程进行去分母、去括号、移项、合并同类项等变形，如果能化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的形式，那么它就是一元二次方程，否则就不是一元二次方程. 应特别注意，必须根据整理后的一般形式(二次项必须有，一次项和常数项可有可无)来判定是否为一元二次方程.

2. 一元二次方程的三种解法

(1)直接开平方法：利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法叫作直接开平方法. 直接开平方法适用于方程左边是含未知数的完全平方式，右边是非负常数的方程，形如 $(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$. 注意 b 开方为 $\pm\sqrt{b}$.

(2)配方法：配方法是一种很重要的数学方法，其理论根据为完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$. 配方法解一元二次方程是以配方为手段，以直接开平方法为基础的，适合于任何形式一元二次方程. 它的一般步骤：

① 移项：使方程的左边为二次项和一次项，右边为常数项；

② 二次项系数化为1：方程两边都除以二次项的系数；

③ 配方:方程两边都加上一次项系数一半的平方,把原方程化为$(x+m)^2=n$的形式;

④ 开方:当$n\geqslant0$时,用直接开平方法解.

注意:步骤可简记为“一移,二化,三配,四开”.①②可以互换,④必须有$n\geqslant0$这个条件.

(3)公式法:是用求根公式求出一元二次方程的解的方法.它是解一元二次方程的一般方法,适合于任何形式的一元二次方程.用公式法解一元二次方程时,应首先将所给的方程化为一般形式$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,再确定a,b,c的值,然后计算b^2-4ac是否大于等于0,如果$b^2-4ac\geqslant0$,最后再代入求根公式$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$求解,否则方程无解.应特别注意的是,求根公式是在$b^2-4a\geqslant0$的的前提下才使用.

典型例题

例 1 下列关于x的方程是一元二次方程的是( ).

A. $(x-1)x=x^2$

B. $ax^2+bx+c=0$ $a\neq0$

C. $2x^2+\frac{1}{x}+1=0$

D. $x^2=1$

解析 本题应根据一元二次方程的定义或一般形式来判断.选项A经过整理为$-x=0$不含二次项,不是一元二次方程;选项B中未注明$a\neq0$,所以$ax^2+bx+c=0$不一定为一元二次方程.选项C中含有$\frac{1}{x}$,此方程不是整式方程;只有选项D具备一元二次方程的各项要求.

答案 D

评注 判断所给的方程是否为一元二次方程有两种方法.一是根据定义判定,要满足三个条件:①整式方程;②只含一个未知数;③未知数的最高次数为2.三者缺一不可.二是根据一元二次方程的一般形式,将所给的整式方程经过去分母、移项、合并同类项等变形后,符合$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$(二次项必须有)的是一元二次方程,否则不是一元二次方程.

例 2 用适当的方法解下列方程:

(1)$9x^2-25=0$;

(2)$x^2=4x+21$;

(3)$4x=1-\frac{3}{2}x^2$;

(4)$(3x-1)(x+5)=-5$.

解析 (1)移项得$9x^2=25$,

两边开方,得$3x=\pm5$,

$\therefore x=\pm\frac{5}{3}$.

$\therefore x_1=\frac{5}{3},x_2=-\frac{5}{3}$.

(2)移项得$x^2-4x=21$,

配方得$x^2-4x+4=21+4$,

即$(x-2)^2=25$,$\therefore x-2=\pm5$.

$\therefore x_1=7,x_2=-3$.

(3)原方程整理,得$3x^2+8x-2=0$,

$\therefore a=3,b=8,c=-2$,

$\therefore b^2-4ac=8^2-4\times3\times(-2)=88>0$,

$\therefore x=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{11}}{3}$.

$\therefore x_1=\frac{-4+\sqrt{11}}{3},x_2=\frac{-4-\sqrt{11}}{3}$.

(4)原方程整理,得$3x^2+14x=0$,

$\therefore a=3,b=14,c=0$.

$\therefore b^2-4ac=14^2=196>0$,

$\therefore x=\frac{-14\pm\sqrt{196}}{2\times3}=\frac{-14\pm14}{6}$,

$\therefore x_1=0,x_2=-\frac{14}{3}$.

评注 根据方程特点选取解法.用开平方法解形如$(x+a)^2=b(b\geqslant0)$的一元二次方程,开方时要取“$\pm$”,切莫失根;配方法和公式法可解任何形式的一元二次方程,配方法解时,“配方”这步易出错;公式法解时,应准确确定各项符号.

例 3 用适当方法解下列方程:

(1)$1+2x+x^2=n^2\left(1+\frac{2x}{n^2}+\frac{x^2}{n^4}\right)$;

D (2)$x^2-(p^2+q^2)x+pq(p^2-q^2)=0$;

(3)$m^2(x^2-x+1)-m(x^2-1)=(m^2-1)x$;

(4)$(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$.

解析 (1)原方程变形为$\left[n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right]^2=(1+x)^2$,

$\therefore n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=1+x$ 或 $n\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=-(1+x)$.

一方面,由于$\left(\frac{1}{n}-1\right)x=1-n$.故当$n\neq1$时$x=n$;当$n=1$时,该方程的根为任意实数.另

一方面，由于$\left(\frac{1}{n}+1\right)x=-(n+1)$，因此当$n\neq -1$时，$x=-n$；当$n=-1$时，该方程的根为任意实数.

综上所述，当$n\neq 1$时，$x=n$；当$n\neq -1$时，$x=-n$；当$n^2=1$时，x为任意实数.

(2)原方程变形为$[x-q(p+q)][x-p(p-q)]=0$，

解得$x_1=pq+q^2$，$x_2=p^2-pq$.

(3)原方程整理变形为$m(m-1)x^2-(2m^2-1)x+m(m+1)=0$，

∴ $[mx-(m+1)][(m-1)x-m]=0$.

因此有$mx=m+1$或$(m-1)x=m$，

故当$m\neq 0$且$m\neq 1$时，$x_1=\frac{m+1}{m}$，$x_2=\frac{m}{m-1}$.

当$m=0$时$x=0$；当$m=1$时$x=2$.

(4)当$m=1$时，方程变为一元一次方程$x-2=0$，∴ $x=2$.

当$m\neq 1$时，原方程为关于x的一元二次方程.

$$\because \Delta=(2m-1)^2-4(m-1)(m-3)=12m-11,$$

故当$m>\frac{11}{12}$且$m\neq 1$时，

$$x_{1,2}=\frac{-2m+1\pm\sqrt{12m-11}}{2m-2};$$

当$m=\frac{11}{12}$时，$x_1=x_2=\frac{-2m+1}{2(m-1)}=5$.

当$m<\frac{11}{12}$时，由于$\Delta<0$，因此原方程没有实数根.

评注 本题的题目特点是含有字母系数，当二次项含有字母系数时应分情况讨论，不要漏解.

教材例题习题的变形题

例1 **(P5例1)**判断关于x的方程$x^2-mx(2x-m+1)=x$是不是一元二次方程.如果是，指出其二次项系数、一次项系数及常数项.

解析 题目所给的方程不是一般形式，所以要化为一元二次方程的一般形式.而方程的各项系数中均含有字母m，所以要特别注意题目的表述："关于x的方程"与"关于x的一元二次方程"是不同的，后者隐含了"二次项系数不为0"这个已知条件，而前者则不受这一条件的限制.

去括号，得$x^2-2mx^2+m^2x-mx=x$.

移项、合并同类项，得

$(1-2m)x^2+(m^2-m-1)x=0$.

当$1-2m=0$，即$m=\frac{1}{2}$时，

原方程为$-\frac{5}{4}x=0$，不是一元二次方程.

当$1-2m\neq 0$，即$m\neq\frac{1}{2}$时，原方程为一元二次方程，此时二次项系数为$1-2m$，一次项系数为m^2-m-1，常数项为0.

评注 当方程未知数的最高次数的项的系数含有字母时，由于字母的变化，所以应对方程进行分类讨论.

例2 **(P15A组第6题)**用不同的方法解方程$2x^2-5x+2=0$.

解法一(配方法) 移项，得$2x^2-5x=-2$，

∴ $x^2-\frac{5}{2}x=-1$，

配方，得$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-1+\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

即$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，∴ $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}$，

∴ $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$.

解法二(公式法) ∵ $a=2$，$b=-5$，$c=2$，

∴ $b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times2=25-16=9>0$，

∴ $x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\times 2}=\frac{5\pm 3}{4}$，

∴ $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$.

评注 直接开平方法只能解形如$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$的一元二次方程.配方法和公式法适用于任何形式的一元二次方程.配方时，只有二次项系数为1时，才能配上"一次项系数一半的平方"，应注意，两边应同时加上.用求根公式应先化成一般形式，找准a,b,c，注意判别式符号，千万要注意求根公式是在$b^2-4ac\geqslant 0$时才能用.

例3 **(P16B组第2题)**用配方法解关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

解析 移项，得$ax^2+bx=-c$，

二次项系数化为1，得$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，

配方，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$，

即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

∵ $a\neq0$，∴ $4a^2>0$.

(1)当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$，

即 $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

∴ $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(2)当 $b^2-4ac<0$ 时，原方程无解.

评注 本题主要考查了用配方法解一元二次方程.特别是对含有字母系数的应采取分类讨论，切忌盲目地两边开方.

学科内综合题

例1 已知关于 x 的方程 $(m+\sqrt{3})x^{m^2-1}+2(m-1)x-1=0$.

(1)m 为何值，它是一元二次方程？求出此方程的解.

(2)m 为何值，它是一元一次方程？

解析 依题意，得 $\begin{cases}m+\sqrt{3}\neq0,\\m^2-1=2;\end{cases}$

∴ $\begin{cases}m\neq-\sqrt{3},\\m=\pm\sqrt{3}.\end{cases}$ ∴ $m=\sqrt{3}$.

∴ $m=\sqrt{3}$时，原方程为一元二次方程，即 $2\sqrt{3}x^2+2(\sqrt{3}-1)x-1=0$.

∵ $a=2\sqrt{3}$，$b=2(\sqrt{3}-1)$，$c=-1$，

∴ $b^2-4ac=[2(\sqrt{3}-1)]^2-4\times2\sqrt{3}\times(-1)$
$=16>0$，

∴ $x=\frac{-2(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{16}}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}+2\pm4}{4\sqrt{3}}$，

∴ $x_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$x_2=-\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

(2)若使方程为一元一次方程，则 m 的情况分以下三种情况讨论.

① $\begin{cases}m+\sqrt{3}=0,\\2(m-1)\neq0;\end{cases}$ 解得 $m=-\sqrt{3}$.

② $\begin{cases}m^2-1=1,\\m+\sqrt{3}+2(m-1)\neq0;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=\pm\sqrt{2},\\m\neq\frac{2-\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

∴ $m=\pm\sqrt{2}$.

③ $\begin{cases}m^2-1=0,\\2(m-1)\neq0;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=\pm1,\\m\neq1.\end{cases}$ ∴ $m=-1$.

∴ 当 $m=-\sqrt{3}$或 $m=\pm\sqrt{2}$或 $m=1$ 时，原方程为一元一次方程.

评注 解决关于 x 的方程是一元二次方程或一元一次方程的问题，关键考虑：一是未知数的最高次数，二是最高次项的系数不能为0.注意运用分类讨论思想，分类讨论时要做到不重不漏，如本题第(2)问后两种情况极容易漏掉，造成答案不完整.

例2 已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根之和为 m，两根的平方和为 n，求 $\frac{1}{2}an+\frac{1}{2}bm+c$ 的值.

解析 设方程的两个根为 x_1，x_2，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$.

依题意得 $x_1+x_2=m$，$x_1^2+x_2^2=n$，

∴ $\frac{1}{2}an+\frac{1}{2}bm+c$

$=\frac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}b(x_1+x_2)+c$

$=\frac{1}{2}ax_1^2+\frac{1}{2}ax_2^2+\frac{1}{2}bx_1+\frac{1}{2}bx_2+c$

$=\frac{1}{2}(ax_1^2+bx_1+c)+\frac{1}{2}(ax_2^2+bx_2+c)$

$=\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times0$

$=0$.

∴ $\frac{1}{2}an+\frac{1}{2}bm+c=0$.

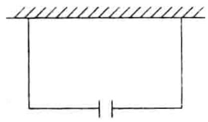
评注 本题通过方程的根将代数式与方程联系在一起，经过整体代换巧妙地求出了代数式的值.

综合应用题

例1 如图12-1-1，要建一个面积为130 m^2的仓库，仓库的一边靠墙(墙长16 m)，并在与墙平行

的边开一道 1 m 宽的门，现有能围成 32 m 长的木板，求仓库的长和宽.

解析 设仓库的宽为 x m，则长为 $(33-2x)$ m.



12 - 1 - 1

根据题意，得

$x(33-2x)=130$，

整理，得 $2x^2-33x+130=0$，

解得 $x_1=10$，$x_2=\frac{13}{2}$.

当 $x=\frac{13}{2}$ 时，$33-2x=20>16$，

∴ $x=\frac{13}{2}$ 不合题意，舍去.

当 $x=10$ 时，$33-2x=13$.

所以仓库的长为 13 m，宽为 10 m.

评注 在列方程时，注意门的宽也在仓库的长当中. 另外，在求出方程的解之后，要检验解是否符合实际，不能忽视“墙长 16 m”这一限制条件.

例 2 一幢 33 层的大楼有一部电梯停在第 1 层，它一次最多容纳 32 人，而且只能在第 2 层至第 33 层中的某一层停一次. 对于每个人来说，他往下走一层楼梯感到 1 分不满意，往上走一层楼梯感到 3 分不满意. 现在有 32 人在第一层，并且他们分别住在第 2 至 33 层的每一层. 问：电梯停在哪一层，使得这 32 个人不满意的总分达到最小？最小值是多少？（有些人可以不乘电梯而直接从楼梯上楼）

解析 易知，这 32 个人恰是第 2 层至 33 层各住 1 人，对于每个乘电梯上下楼的人，他所住的层数一定不小于直接上楼的人所住的层数. 事实上，设住 s 层的人乘电梯，而住在 t 层的人直接上楼，$s<t$，交换两人上楼的方式，其余的人不变，则不满意总分减少.

设电梯停在第 x 层，在第一层有 y 个人没有乘电梯而直接上楼，那么，不满意总分为

$s=3[1+2\cdots+(33-x)]+3(1+2+\cdots+y)+[1+2+\cdots(x-y-2)]$

$=\frac{3\times(33-x)(34-x)}{2}+\frac{3y(1+y)}{2}+\frac{(x-y-2)(x-y-1)}{2}$

$=2x^2-xy-102x+2y^2+3y+1684$

$=2x^2-(y+102)x+2y^2+3y+1684$

$=2\left(x-\frac{y+102}{4}\right)^2+\frac{1}{8}(15y^2-180y+3068)$

$=2\left(x-\frac{y+102}{4}\right)^2+\frac{15}{8}(y-6)^2+316$

$\geqslant 316$.

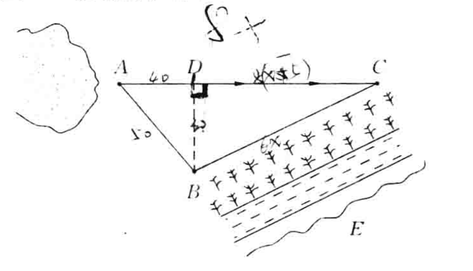
∴ $\begin{cases} y-6=0, \\ x-\frac{y+102}{4}=0; \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=27, \\ y=6. \end{cases}$

又当 $x=27$，$y=6$ 时，$s=316$.

故当电梯停在 27 层时，不满意总分最小，最小值为 316 分.

评注 恰当地设出未知数 x 和 y，根据实际问题建立数学模型是解此题的关键. 另外，题中还利用了配方法求最小(大)值的方法.

例 3 如图 12 - 1 - 2，在一条河流的东岸有一城市 E，河流西岸点 B 处有一林场，点 A 是一移动沙漠的边缘点. 沙漠由点 A 沿直线 AC 方向自西向东移动，将影响 E 市的环境. 现计划自点 B 起沿直线 BC 方向修建一定宽度的一条固沙防护林，已测得 $AB=50$ km，林场 B 到沙漠移动方向 AC 的距离为 30 km. 如果沙漠每年移动 8 km，每年营造防护林 6 km，要想在沙漠边缘移到 C 点时营造好 BC 段的防护林.



12 - 1 - 2

(1)营造 BC 段防护林需要多少年？

(2)如果改为自点 B 起营造与 AC 方向垂直的同样宽度的防护林，由于水源和地质条件的约束，造林速度为每年 3 km，这样造林能否挡住移动沙漠？

解析 (1)作 $BD\perp AC$，则 $BD=30$，$AB=50$.

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40$.

设营造 BC 段防护林需 x 年，则 $DC=8x-40$，$BC=6x$，$BD=30$.

在 Rt△BDC 中，$(8x-40)^2+30^2=(6x)^2$.

整理得 $7x^2-160x+625=0$.

$\Delta=160^2-4\times7\times625=8100$.

∴ $x=\frac{160\pm\sqrt{8100}}{14}=\frac{160\pm90}{14}$.

∴ $x_1=\frac{160+90}{14}=17.86$，$x_2=\frac{160-90}{14}=5$.

检验:当 $x=5$ 时,$BC=6\times5=30=BD$ 不合题意,舍去.

$\therefore$ 营造好 BC 段防护林需 18 年.

(2)如果改为自 B 点起沿与 AC 垂直的 BD 方向营造防护林.

$\because$ $BD=30$ km,造林速度为 3 km/年,

$\therefore$ 造林时间为 $t=\frac{30}{3}=10$.

即完成 BD 段造林需 10 年.

但此沙漠移动距离$=8\times10=80(\text{km})>AD$,

$\therefore$ 这样造林不能挡住移动沙漠.

评注 本题将一元二次方程、勾股定理知识融于以环境保护的背景的问题中.解决问题的关键在于将实际问题转化为数学模型.

创新题

例 1 (信息题)若规定两数 a、b 通过"$*$"运算,得到 $4ab$,即 $a*b=4ab$.

例如 $2*6=4\times2\times6=48$.

(1)求 $3*5$ 的值;

(2)求 $x*x+2*x-2*4=0$ 中 x 的值;

(3)不论 x 是什么数时,总有 $a*x=x$,求 a 的值.

解析 (1)$3*5=4\times3\times5=60$.

(2)$\because$ $x*x=4x^2$,$2*x=8x$,$2*4=4\times2\times4=32$,

$\therefore$ 原方程即为 $4x^2+8x-32=0$,

即 $x^2+2x-8=0$.

$\because$ $a=1$,$b=2$,$c=-8$,

$\therefore$ $b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-8)=36>0$,

$\therefore$ $x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{-2\pm6}{2}$,

$\therefore$ $x_1=-4$,$x_2=2$.

(3)$\because$ $a*x=x$,$\therefore$ $4ax=x$,

$\therefore$ $(4a-1)x=0$.

$\because$ 不论 x 取什么数,等式总成立,

$\therefore$ $4a-1=0$,$\therefore$ $a=\frac{1}{4}$.

评注 这是一道新定义运算题.解题关键在于明确"$a*b$"的含义是"a 与 b 乘积的 4 倍",不要受以前学过的乘法运算影响.

例 2 (开放题)写出一个以 $x=1$ 为根的一元二次方程________.(只需填写满足条件的一个方程即可)

解析 先列一个含"1"的等式:$2\times1^2+3\times1-1=4$,然后用 x 代替"1",得 $2x^2+3x-1=4$,即 $2x^2+3x-5=0$.

答案 不唯一,如 $2x^2+3x-5=0$.

评注 本题是已知方程的解来构造方程,主要培养学生的发散思维.

例 3 (探究题)(1)如表,方程 1、方程 2……是按照一定规律排列的一列方程.解方程并将它的解填在表中空白处:

序号	方　程	方程的解	
1	$x^2-2x-3=0$	$x_1=-1$	$x_2=3$
2	$x^2-4x-12=0$	$x_1=-2$	$x_2=6$
3	$x^2-6x-27=0$	$x_1=$ -3	$x_2=$ 9
…	…	…	…

(2)$x_1=-10$,$x_2=30$ 是不是(1)中所给的一列方程中的一个方程的两个根?

(3)请写出这列方程的第 k 个方程.

(4)用你探究的规律,解答下列两个方程:

①$x^2+102x-36\times18=0$;②$x^2-9x-324=0$.

解析 (1)$x_1=-3$,$x_2=9$.

(2)观察表中一列方程两个根的规律,知 $x_1=-10$,$x_2=30$ 是(1)中所给出的一列方程中的一个方程的两个根.

(3)$x^2-k\cdot2x-k^2\times3=0$.

(4)① $x^2+102x-36\times18=0$ 可写成 $x^2+6x\times17-6^2\times18=0$,

而 $x^2+17x-18=0$ 的两根为 $x_1=1$,$x_2=-18$,

所以方程 $x^2+102x-36\times18=0$ 的两根为 6,-108.

② $x^2-9x+324=0$ 可写成 $x^2-9\times x-9^2\times4=0$,

而方程 $x^2-x-4=0$ 的两根为 $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$,$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$,

所以方程 $x^2-9x-324=0$ 的两根为 $\frac{9+9\sqrt{17}}{2}$,$\frac{9-9\sqrt{17}}{2}$.

评注 通过观察对比可以发现表中一列方程的根的规律为 $x_2=-3x_1$,这一规律的得出是解决本题的关键.

中考题

例 1 (1)**(2003 年甘肃卷)**下列方程中,关于 x 的一元二次方程是(A).

A. $3(x+1)^2=2(x+1)$

B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2=0$

C. $ax^2+bx+c=0$

D. $x^2+2x=x^2-1$

(2)**(2003 年陕西卷)**方程 $(x+1)^2=9$ 的解是(C).

A. $x=2$　　B. $x=-4$

C. $x_1=2,x_2=-4$　　D. $x_1=-2,x_2=4$

解析　(1)选项 A 经过整理,得 $3x^2+4x+1=0$,是一元二次方程;选项 B 不是整式方程;选项 C 没有注明 $a\neq0$,不一定为一元二次方程;选项 D 经过整理,得 $2x+1=0$,是一元一次方程.

(2)用直接开平方法解,$x+1=\pm3$,

$\therefore\ x_1=2,x_2=-4$.

答案　(1)A;(2)C.

评注　一元二次方程的概念、一元二次方程解法中的配方法是中考考查的知识点,以选择、填空居多.

例 2　**(2003 年淄博卷)**已知 $x^2+x-3=0$,则 $\frac{3-x^2-x^3}{x-1}=$________.

解析　由 $x^2+x-3=0$,得 $3=x^2+x$,代入,

得 $\frac{3-x^2-x^3}{x-1}=\frac{x^2+x-x^2-x^3}{x-1}$

$=\frac{x-x^3}{x-1}=\frac{x(1-x^2)}{x-1}=\frac{-x(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=-(x^2+x)=-3$.

答案　-3.

评注　利用整体代换的方法比直接解方程代入求值要简便许多,但要掌握代数式变形的技巧.

例 3　**(2003 年烟台卷)**设 a,b,c 都是实数,且满足 $(2-a)^2+\sqrt{a^2+b+c}+|c+8|=0$,$ax^2+bx+c=0$,求代数式 x^2+x+1 的值.

解析　由题意,得 $\begin{cases}2-a=0,\\a^2+b+c=0,\\c+8=0;\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=2,\\b=4,\\c=-8.\end{cases}$

$\therefore\ ax^2+bx+c=0$,即为 $2x^2+4x-8=0$,

$\therefore\ x^2+2x-4=0$.

解得 $x_1=-1-\sqrt5,x_2=\sqrt5-1$.

$\therefore$ 当 $x=-1-\sqrt5$ 时,

$x^2+x+1=(-1-\sqrt5)^2-1-\sqrt5+1=6+\sqrt5$.

当 $x=\sqrt5-1$ 时,$x^2+x+1=(\sqrt5-1)^2+\sqrt5-1+1=6-\sqrt5$.

评注　本题通过多个非负数之和为 0 的性质求出 a,b,c 的值是解此题的突破口.

12.1 同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题

1. 关于 x 的一元二次方程 $(a-\sqrt2)x^2+x+a^2-2=0$ 的一个根为 0,则 a 的值为(B).

A. $\sqrt2$　　B. $-\sqrt2$　　C. $\pm\sqrt2$　　D. 2

2. 若 $(b-1)^2+a^2=0$,则下列方程中是一元二次方程的只有(C).

A. $ax^2+5x-b=0$

B. $(b^2-1)x^2+(a+3)x-5=0$

C. $(a-1)x^2+(b-1)x-7=0$

D. $(b-1)x^2+ax-1=0$

3. $px^2-3x+p^2-p=0$ 是关于 x 的一元二次方程,则(C).

A. $p=1$　　B. $p>0$

C. $p\neq0$　　D. p 为任意数

4. 方程 $(x-3)^2=8$ 的解是(D).

A. $x=3+2\sqrt2$　　B. $x=3-2\sqrt2$

C. $x=3\pm2\sqrt3$　　D. $x=3\pm2\sqrt2$

5. 已知 x^2+3x+5 的值为 9,则代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为(D).

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

6. 关于 x 的方程 $(m^2-m-2)x^2+mx+m=0$ 是一元二次方程的条件是(B).

A. $m\neq1$ 或 $m=-2$　　B. $m\neq-1$ 且 $m\neq2$

C. $m=-1$ 或 $m\neq2$　　D. $m\neq1$ 且 $m\neq2$

7. 下列方程中,以 $x=\frac{3}{2}$ 为根的是(B).

A. $3x^2-x-2=0$　　B. $2x^2-5x+3=0$

C. $3x^2-5x+2=0$　　D. $2x^2+x+3=0$

8. 已知 2 是关于 x 的方程 $\frac{3}{2}x^2-2a=0$ 的一个解，则 $2a-1$ 的值为(C)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 下面是某同学在一次测验中解答的填空题：

①若 $x^2=a^2$，则 $x=a$；

②方程 $2x(x-1)=x-1$ 的解为 $x=0$；

③若直角三角形的两边长分别为 3 和 4，则第三边长为5.

其中答案完全正确的题目个数是(A)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 若 $ax^2-5x+3=0$ 是一元二次方程，则不等式 $3a+6>0$ 的解是(C).

$a\neq0$

A. $a>-2$　　B. $a<-2$

C. $a>-2$ 且 $a\neq0$　　D. $a>\frac{1}{2}$

二、填空题

1. 一元二次方程 $3x^2-5x+7=0$ 的二次项系数、一次项系数及常数项之和为 5.

2. 若 $kx^2+1=2x^2+3x$ 是一元二次方程，则 k 的取值范围是 $k\neq2$.

3. 方程 $x^2+2x-3=0$ 的解是 $x_1=1,\ x_2=-3$.

4. 若关于 x 的方程 $x^2-3x+m=0$ 的一个解为 $x=1$，则 $m=$ 2，它的另一个解是 $x=2$.

5. 当 $x=$ 6、2 时，代数式 $x^2-8x+12$ 的值为 0.

6. 若 $y^2+y-4=3$，则 $2y^2+2y+1=$ 15.

7. 已知 $x=-1$ 是方程 $x^2-ax+5=0$ 的根，则 $a^2-4=$ 32.

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4kx+k^2=0$ 的一根为 -2，则 $k=$ 4.

9. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，若 $a+b+c=0$，则必有一根为 1. 若有 $b=a+c$ 则必有一根 0 −1. ≠0 =0

10. 关于 x 的方程 $2(m+1)x+1=(|m|-1)x^2$ 只有一个实数根，则 $m=$ 1.

三、解答题

1. 用两种不同的方法解方程：$2x^2-6x+3=0$.

2. 用配方法解方程：$x^2+px+q=0$. $x=\frac{\pm\sqrt{p^2-4q}-p}{2}$

3. 用适当的方法解下列方程：

(1) $(3x+2)^2=4(x-3)^2$； 6　$-\frac{8}{5}$

(2) $y^2+3\sqrt{3}y+3=0$；

(3) $(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})=40$； $\pm4\sqrt{3}$

(4) $2x^2-4x+1=0$. $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

探究应用拓展性训练●●●

一、学科内综合题

$m+1\neq0$

1. 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-3)x-1=0$.

(1) m 为何值时，它是一元二次方程？求出它的解.

(2) m 为何值时，它是一元一次方程？

2. k 为何值时，$(k-3)x^{k^2-2}+x^2+2x+1=0(x\neq0)$ 是一元二次方程？

3. 最简二次根式 $\sqrt{4t-2}$ 与 $\sqrt{2t^2-t}$ 是同类二次根式，求关于 y 的方程 $ty^2+2y-2=0$ 的解.

4. 证明：不论 m 为何实数，方程 $(m^2-2m+2)x^2+2mx+1=0$ 都是一元二次方程.

5. 求证：无论 x 为何实数，代数式 $x^2-2x+1.5$ 的值恒大于 0.

6. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根之比为 2∶3，求证：$6b^2=25ac$.

7. 设 a，b 为任意给定的整数，求证：方程 $x^2+10ax+5b-3=0$ 没有整数根.

8. 如果 $3x^2-5x-2$ 与 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 是同一多项式的不同形式，求 $\frac{c}{a+b}$ 的值.

9. 解关于 x 的方程：$(a-1)x^2-2ax+a=0$.

10. 已知 m 为实数，并且方程 $x^2-3x+m=0$ 的一根的相反数是方程 $x^2+3x-m=0$ 的一个根，求方程 $x^2+3x-m=0$ 的根及 m 的值.

二、探究题

(1) 解下列四个方程：

① $x^2-2x-2=0$；

② $2x^2+3x-1=0$；

③ $2x^2-4x+1=0$；

④ $x^2+6x+3=0$.

(2) 上面的四个方程中，有三个方程的一次项系数有共同特点，请你用代数式表示这个特点，并推导出具有这个特点的一元二次方程的求根公式.

三、信息题

阅读下题的解答过程，请判断其是否有错，请你在其下方写出正确答案.

已知 m 是关于 x 的二次方程 $mx^2-2x+m=0$ 的一个根，求 m 的值.

解：把 $x=m$ 代入原方程，化简，得 $m^3=m$.

∵ $m\neq0$，

∴ 两边除以 m，得 $m^2=1$，则 $m=1$.

答：m 的值是 1.

四、开放题

王老师在课堂上给出了二元方程 $x+y=xy$，让同学们找出它的解，甲写出的解是 $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$ 乙写出的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$ 请找出与甲、乙不同的一组解.

五、与现实生活联系的应用题

1. 要做一个容积为 $4500\ \text{cm}^3$，高为 6 cm，底面的长比宽多 5 cm 的无盖长方体铁盒，应选用多大尺寸的长方形铁片？

2. 有一种特殊材料制成的质量为 30 g 的塑料，现将它切成大小两块，将较大一块放在一架不等臂的天平的左盘中，称得质量为 27 g；又将较小一块放在该天平的右盘中，称得质量为 8 g. 若只考虑天平的臂长不等，其他因素忽略不计，请你依据物理学中的杠杆的原理，求出大块和小块塑料的质量.

六、中考题

1. **(2004 年四省卷)** 解方程：$x^2+2x-3=0$. -3、1

2. **(2004 年沈阳卷)** 方程 $x^2-2x-3=0$ 的根是 2、-1.

3. **(2004 年吉林卷)** 已知 m 是方程 $x^2-x-2=0$ 的一个根，则代数式 m^2-m 的值等于 2.

4. **(2004 年武汉卷)** 一元二次方程 $x^2-4=0$ 的根为 (C).

A. $x=2$　　B. $x=-2$

C. $x_1=2, x_2=-2$　　D. $x=4$

一　一元二次方程

12.2 用因式分解法解一元二次方程

基础知识归纳

1. 因式分解法的理论依据

两个因式的积为 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0.

2. 因式分解法解一元二次方程

对于一边是 0，另一边可以分解成两个一次因式积的形式的一元二次方程，可以用因式分解法解一元二次方程.

重点知识讲解

1. 用因式分解法解一元二次方程的一般步骤

(1)将方程的右边化为 0；

(2)将方程的左边分解成两个一次因式的积；

(3)使每个因式分别为 0，得到两个一元一次方程；

(4)解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

2. 用适当的方法解一元二次方程

一元二次方程的四种解法：直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法.

直接开平方法、因式分解法简便易行，但不是所有的方程都适用；配方法适用于任何形式的一元二次方程，但配方的过程复杂；公式法适用于任何一个一元二次方程. 在对于一元二次方程的解法选择应本着以下原则：先特殊，后一般. 即先考虑能否用直接开平方法和因式分解法，不能解决，再用公式法，没有特殊指明，一般不用配方法.

易混知识辨析

在利用因式分解法解题时，只有化成 $(x-a)(x-b)=0$ 时才有 $x-a=0$ 或 $x-b=0$ 的结论. 即 $(x-a)(x-b)=0$ 与 $x-a=0$ 或 $x-b=0$ 是等价的. 而“若 $a\times b=c\times d$，则 $a=c$ 或 $b=d$”则是一个错误的命题. 例如在解方程 $(x+3)(x-2)=6$ 时不能认为 $(x+3)(x-2)=2\times 3$ 就得出 $x+3=2$ 或 $x-2=3$ 的错误结论. 而是应整理为 $x^2+x-12=0$ 分解为 $(x+4)(x-3)=0$ 得出 $x+4=0$ 或 $x-3=0$ 的结论. 因此要使用因式分解法解方程时，一定要将方

程的右边化为0.

典型例题

例 1 用不同的方法解方程：$3x^2-8x+4=0$.

解法一(配方法) $\because 3x^2-8x=-4$,

$x^2-\frac{8}{3}x=-\frac{4}{3}$,

$x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$,

$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

$\therefore x-\frac{4}{3}=\pm\frac{2}{3}$,解得 $x_1=2$,$x_2=\frac{2}{3}$.

解法二(公式法) $\because a=3,b=-8,c=4$,

$\therefore b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times4=16$,

$\therefore x=\frac{+8\pm\sqrt{16}}{2\times3}=\frac{+8\pm4}{6}$.

$\therefore x_1=2,x_2=\frac{2}{3}$.

解法三(因式分解法) $\because (3x-2)(x-2)=0$,

$\therefore 3x-2=0$ 或 $x-2=0$,

$\therefore x_1=\frac{2}{3},x_2=2$.

评注 通过对上述三种方法的比较可以看出因式分解法是最简便的方法,对于不易因式分解的应考虑公式法,配方法则比较麻烦.

例 2 解方程：$\left(\frac{1}{3}-x\right)^2-3\left(x-\frac{1}{3}\right)-4=0$.

解法一 原方程可化为 $\left(\frac{1}{3}-x\right)^2-3\left(x-\frac{1}{3}\right)-4=0$.

令 $y=x-\frac{1}{3}$,则方程可变为 $y^2-3y-4=0$,

$\therefore (y-4)(y+1)=0$,$\therefore y_1=4,y_2=-1$.

当 $y=4$ 时,$x-\frac{1}{3}=4$,$\therefore x_1=\frac{13}{3}$;

当 $y=-1$ 时,$x-\frac{1}{3}=-1$,$\therefore x_2=-\frac{2}{3}$.

所以方程的根为 $x_1=\frac{13}{3},x_2=-\frac{2}{3}$.

解法二 原方程可化为

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{3}\right)-4=0$,

$\therefore \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)-4\right]\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)+1\right]=0$,

$\therefore \left(x-\frac{1}{3}\right)-4=0$ 或 $\left(x-\frac{1}{3}\right)+1=0$,

$\therefore x_1=\frac{13}{3},x_2=-\frac{2}{3}$.

答案 $x_1=\frac{13}{3},x_2=-\frac{2}{3}$.

评注 解法一运用了换元法,把关于 x 的较复杂的方程转化为较简单的关于 y 的方程.解法二是将 $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 作为一个整体,将方程转化成关于 $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的方程.

教材例题习题的变形题

例 1 **(P19 例 2)**解下列方程：

(1)$3(x-\sqrt{2})^2=2(\sqrt{2}-x)$;

(2)$9(2x-3)^2-16(2x+3)^2=0$.

解析 (1)原方程可变形为

$3(x-\sqrt{2})^2+2(x-\sqrt{2})=0$,

$\therefore (x-\sqrt{2})[3(x-\sqrt{2})+2]=0$,

$\therefore x-\sqrt{2}=0$ 或 $3x-3\sqrt{2}+2=0$,

$\therefore x_1=\sqrt{2},x_2=\cancel{\frac{2-3\sqrt{2}}{3}}$. $\frac{3\sqrt{2}-2}{3}$

(2)原方程可化为$(6x-9)^2-16(2x+3)^2=0$,

$\therefore [(6x-9)+(8x+12)][(6x+9)-(8x+12)]=0$,

$\therefore (14x+3)(-2x-21)=0$,

$\therefore 14x+3=0$ 或 $-2x-21=0$,

$\therefore x_1=-\frac{3}{14},x_2=-\frac{21}{2}$.

评注 因式分解法解一元二次方程时,常用十字相乘法.但有时可根据方程的特点采用提取公因式法或公式法.

例 2 **(P21B 组第 1 题)**解下列关于 x 的方程：

(1)$x^2-x=2ax-a^2-a$;

(2)$(a^2-1)x^2-2ax=a^2-4(a\neq\pm1)$.

解析 (1)原方程可化为

$x^2-(2a+1)x+(a^2+a)=0$,

$(x-a)[x-(a+1)]=0$,

$\therefore x-a=0$ 或 $x-(a+1)=0$,

$\therefore x_1=a,x_2=a+1$.

(2)原方程可化为

$(a^2-1)x^2-2ax-(a^2-4)=0$,

$\therefore$ $[(a+1)x-(a+2)][(a-1)x-(a-2)]=0$,

$\therefore$ $(a+1)x-(a+2)=0$ 或 $(a-1)x-(a-2)=0$.

$\because$ $a\neq\pm1$, $\therefore$ $a+1\neq0$, $a-1=0$,

$\therefore$ $x_1=\dfrac{a+2}{a+1}$, $x_2=\dfrac{a-2}{a-1}$.

评注 在解字母系数的一元二次方程时,尽可能采用因式分解法,将含有字母的系数进行分解.

学科内综合题

例 1 方程 $(m-2)x^{m^2-5m+8}+(m-3)x+5=0$,当 m 取何值时是一元二次方程?求出此方程的根.

解析 依题意,得 $\begin{cases} m-2\neq0, & ① \\ m^2-5m+8=2. & ② \end{cases}$

由①得 $m\neq2$;

由②得 $m^2-5m+6=0$,解得 $m_1=2$, $m_2=3$.

$\therefore$ $m=3$ 时,原方程为一元二次方程.

把 $m=3$ 代入原方程,得 $x^2+5=0$,此方程无解.

当 $m=3$,此一元二次方程无解.

评注 解题时,不要忽略“$m-2\neq0$”这一题中隐含条件.

例 2 若一个三角形的边长满足方程 $x^2-6x+8=0$,求此三角形的周长.

解析 $\because$ $x^2-6x+8=0$,

$\therefore$ $(x-2)(x-4)=0$,

$\therefore$ $x-2=0$ 或 $x-4=0$,

$\therefore$ $x_1=2$, $x_2=4$.

当三角形三边长都为 2 时,三角形周长为 6;

当三角形三边长都为 4 时,三角形周长为 12;

当三角形两边是 4,一边为 2 时,三角形周长为 10;

当三角形两边是 2,一边为 4 时,此时三角形不存在.

所以三角形的周长为 6,12,10.

评注 先解方程,再根据三角形的边长为方程的根分情况讨论.讨论时要全面,同时要注意结合三角形的三边关系.

综合应用题

例 题 在高尔夫球比赛中,某运动员打出的球在空中飞行的高度 h (m)与打出后飞行的时间 t (s)之间的关系为 $h=-t(t-7)$.求:

(1)经过多少秒钟,球飞行的高度为10 m;

(2)经过多少秒钟,球又落到地面?

解析 (1)依题意,得 $10=-t(t-7)$,

整理,得 $t^2-7t+10=0$,

$\therefore$ $(t-2)(t-5)=0$,

$\therefore$ $t_1=2$, $t_2=5$.

$\therefore$ 经过 2 s 或 5 s,球飞行的高度为 7 m.

(2)当 $h=0$ 时,有 $-t(t-7)=0$,

$\therefore$ $t(t-7)=0$,

$\therefore$ $t_1=0$, $t_2=7$.

当 $t=0$ 时不合题意,舍去.

所以经过 7 s,球又落到地面.

评注 本题是一道用数学知识解决实际的应用问题.首先应从实际问题中获取必要的信息,然后对信息进行分析,处理,弄清数学知识与实际问题的结合点,恰当地建立数学模型.从实际中获取、分析、处理信息是十分重要的一步,正确地建立数学模型是一个关键.

创新题

例 题 **(信息题)**阅读材料,回答后面问题:

为了解方程 $(x^2-1)-5(x^2-1)+4=0$,我们可以将 x^2-1 视为一个整体,然后设 $x^2-1=y$,则 $(x^2-1)^2=y^2$,原方程可化为 $y^2-5y+4=0$. ①

解①得 $y_1=1$, $y_2=4$,

当 $y_1=1$ 时,$x^2-1=1$, $\therefore$ $x^2=2$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{2}$;

当 $y_2=4$ 时 $x^2-1=4$, $\therefore$ $x^2=5$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{5}$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{5}$, $x_1=-\sqrt{5}$.

(1)填空:在由原方程得到①的过程中,利用________法达到了降次的目的,体现了________的数学思想.

(2)解方程:$x^4-x^2-6=0$.

解析 (1)换元;转化.

(2)设 $x^2=y$,则 $x^4=y^2$,

原方程变为 $y^2-y-6=0$,

即 $(y-3)(y+2)=0$, $\therefore$ $y-3=0$ 或 $y+2=0$,

$\therefore$ $y_1=3$, $y_2=-2$.

当 $y=3$ 时,$x^2=3$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}$;

当 $y=-2$ 时,$x^2=-2$,此方程无解.

∴ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}$.

评注 解答本题应先认真阅读材料,弄懂、理解解题过程中的每一步变化,然后再分析所运用的数学思想和数学方法.

中考题

例 1 (1)(**2003 年兰州卷**)方程 $x^2=x$ 的解是(C).

A. 1　　B. 0　　C. 1 或 0　　D. 无解

(2)(**2003 年陕西卷**)方程 $(x+1)^2=9$ 的解是(C).

A. $x=2$　　B. $x=-4$

C. $x_1=2, x_2=-4$　　D. $x_1=-2, x_2=4$

解析 (1)移项得 $x^2-x=0$, ∴ $x(x-1)=0$.

∴ $x=0$ 或 $x-1=0$, ∴ $x=0$ 或 $x=1$. 故应选 C.

(2)方法一:∵ $(x+1)^2=9$, ∴ $x+1=\pm\sqrt{9}$,

∴ $x+1=\pm 3$, ∴ $x_1=2, x_2=-4$.

方法二:∵ $(x+1)^2=9$, ∴ $(x+1)^2-3^2=0$,

∴ $(x+1+3)(x+1-3)=0$,

即 $(x+4)(x-2)=0$.

∴ $x_1=2, x_2=-4$. 故应选 C.

答案 (1)C;(2)C.

评注 一元二次方程化为一边是 0,另一边是两个一次因式的积时,就可以用因式分解法来解一元二次方程. 但要特别注意,$ax^2=bx(a\neq 0, b\neq 0)$ 的方程,千万不能直接约分,而应移项后用因式分解法求解,否则易造成漏解.

例 2 (**2003 年厦门卷**)阅读下面的问题:

解方程 $x^2-|x|-2=0$.

解:(1)当 $x\geq 0$,原方程化为 $x^2-x-2=0$.

解得 $x_1=2, x_2=-1$(不合题意,舍去).

(2)当 $x<0$ 时,原方程化为 $x^2+x-2=0$.

解得 $x_1=1$(不合题意,舍去),$x_2=-2$.

∴ 原方程的根是 $x_1=2, x_2=-2$.

请参照例题解方程 $x^2-|x-1|-1=0$,则此方程的根是________.

解析 (1)当 $x-1\geq 0$,即 $x\geq 1$ 时,原方程化为 $x^2-x=0$.

解得 $x_1=1, x_2=0$(不合题意,舍去).

(2)当 $x-1<0$,即 $x<1$ 时,原方程化为 $x^2+x-2=0$.

解得 $x_1=-2, x_2=1$(不合题意,舍去).

∴ 原方程的根是 $x_1=1, x_2=-2$.

答案 $x_1=1, x_2=-2$.

评注 本题是一道阅读理解题,通过材料展示了含绝对值的一元二次方程的解法,根据情况讨论去掉绝对值求解. 只要抓住了这个本质,所给的题目就迎刃而解了.

12.2 同步测试

教材基础知识针对性训练●●●

一、选择题

1. 方程 $x^2-3x=0$ 的根是(A).

A. $x_1=0, x_2=3$　　B. $x_1=0, x_2=-3$

C. $x=0$　　D. $x=3$

2. 方程 $x(x+1)(x-2)=0$ 的根是(C).

A. $-1, 2$　　B. $1, -2$

C. $0, -1, 2$　　D. $0, 1, -2$

3. 方程 $2x(x-3)=5(x-3)$ 的根是(C).

A. $x=\frac{5}{2}$　　B. $x=3$

C. $x_1=3, x_2=\frac{5}{2}$　　D. $x=-\frac{5}{2}$

4. 方程 $y^3-5y^2+6y=0$ 的根是(B).

A. $0, -2, -3$　　B. $0, 2, 3$

C. $0, 1, -6$　　D. $0, -1, -6$

5. 方程 $x^2-a^2=(x-a)^2(a\neq 0)$ 的根是(A).

A. a　　B. 1 或 a

C. 0　　D. 0 或 a

6. 如果 a 是关于 x 的方程 $x^2+bx+a=0$ 的根. 并且 $a\neq 0$,则可求出(C)的值.

A. ab　　B. $\frac{b}{a}$　　C. $a+b$　　D. $a-b$

7. 多项式 $m^2+4m-10$ 的值等于 11,则 m 的值为(C).

A. 3 或 7　　B. -3 或 7

C. 3 或 -7　　D. -3 或 -7

8. 若 $2x^2+1$ 与 $4x^2-2x-5$ 互为相反数,则 x 为(B).

A. -1 或 $\frac{2}{3}$　　B. 1 或 $-\frac{2}{3}$

C. 1 或 $-\frac{3}{2}$　　D. 1 或 $\frac{3}{2}$

二、填空题

1. 方程 $(x-2)^2=(x-2)$ 的根是 2, 3.

2. 若代数式 $(x-2)(x+1)$ 的值等于 0，则 $x=$ 2，-1.

3. 已知 y 的二次方程 $4y^2+4ay+a^2=0$ 的一个根是 -2，那么 $a=$ 4.

4. 方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_2>x_1$，则 x_1-2x_2 的值为 0 -3.

5. 方程 $(x+1)(x+3)=15$ 的两根为 x_1, x_2，则 x_1+2x_2 的值为 -2，-10.

6. 如果分式 $\frac{x^2-x-6}{x+2}$ 的值为 0，则 $x=$ 3.

7. 已知方程 $(x+a)(x+1)=0$ 和方程 $x^2-5x-6=0$ 是同解方程，则 $a=$ -6.

8. 两个连续偶数的积是 168，则这两个偶数是 12、14；-12、-14

三、用适当的方法解下列方程

1. $25(x-3)^2=16(x+4)^2$；

2. $(3-2x)(x+1)=(2x-3)(1-5x)$；

3. $x^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+4\sqrt{6}=0$；

4. $(2x+1)^2-7=0$.

四、解下列关于 x 的方程

1. $x^2-m(3x-2m+n)-n^2=0$；

2. $(m-n)x^2+mx+n=0(m\neq n)$；

3. $(m^2-n^2)x^2-4mnx-(m^2-n^2)=0(m^2-n^2\neq 0)$；

4. $a^2-4x^2+4bx-b^2=0$.

探究应用拓展性训练

一、学科内综合题

1. 已知 $x^2-7xy+12y^2=0$，求证：$x=3y$ 或 $x=4y$.

2. 已知方程 $(2004x)^2-2003\times 2005x-1=0$ 的较大根为 α，方程 $x^2+2003x-2004=0$ 的较小根为 β，求 $\alpha-\beta$ 的值.

3. 已知 $(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)-6=0$，求 x^2+y^2 值.

4. 若 m 为整数，且 $4<m<40$，方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ 有两个整数根，求 m 的值及方程的根.

5. 已知方程 $x^2-mx+m+5=0$ 有两实数根 α,β，方程 $x^2-(8m+1)x+15m+7=0$ 有两实数根 α,γ. 求 $\alpha^2\beta\gamma$ 的值.

二、信息题

阅读下列材料，并解答问题：

解方程 $x^4-6x^2+5=0$.

设 $x^2=y$，那么 $x^4=y^2$，于是方程变形为 $y^2-6y+5=0$. ①

解这个方程，得 $y_1=1, y_2=5$，

当 $y=1$ 时，$x^2=1$，∴ $x=\pm 1$；

当 $y=5$ 时，$x^2=5$，∴ $x=\pm\sqrt{5}$.

∴ 原方程的根有四个，分别是 $x_1=1, x_2=-1, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$.

(1)填空：在由原方程得到的方程①的过程中，利用______法达到降次的目的，体现了______的数学思想；

(2)解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$.

三、与现实生活联系的应用题

在一块正方形的铁板正中间，挖去一小块正方形铁板，使剩余部分的面积为 28 cm²，已知小正方形的边长比大正方形的边长的一半还少 2 cm，求大正方形铁板的边长.

4016016x² - 4016015x - 1 = 0

一 一元二次方程

12.3 一元二次方程的根的判别式

基础知识归纳

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况由 b^2-4ac 来判定，我们把 b^2-4ac 叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用“Δ”来表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

2. 判别式定理及其逆定理

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，

$\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

$\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根；

$\Delta\geqslant 0\Leftrightarrow$ 方程有实数根.

重点知识讲解

1. 一元二次方程的根的判别式

在应用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 应注意：

(1)"Δ"专指一元二次方程的根的判别式，只有确认方程为一元二次方程时，才能确定 a,b,c，求出 Δ.

(2)要使用根的判别式，必须先将一元二次方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$，以便确定 a,b,c.

(3)注意正确区别根的判别式与求根公式．根的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，而不是 $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$，同时不要受求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的影响.

2. 一元二次方程的根的判别式的应用

(1)不解方程，判定方程根的情况；(2)根据方程根的情况，确定方程中字母系数的取值范围；(3)证明某一方程的根的情况(如有实数根，无实数根，有两个相等实数根，有两个不相等的实数根)；(4)解决代数中判定三角形形状的问题.

典型例题

例 1 不解方程，判断下列关于 x 的一元二次方程的根的情况.

(1) $(2x-1)^2+x(x+2)=0$；

(2) $(m+n)x^2-2mx+(m-n)=0(m+n\neq 0)$.

解析 (1)整理方程，得 $5x^2-2x+1=0$，

$\because a=5,b=-2,c=1$.

$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times5\times1=-16<0$.

∴原方程没有实数根.

(2) $\because a=m+n,b=-2m,c=m-n$，

$$\therefore \Delta=(-2m)^2-4(m+n)(m-n)$$
$$=4m^2-4(m^2-n^2)$$
$$=4n^2.$$

当 $n\neq 0$ 时，$\Delta=4n^2>0$，方程有两个不相等实数根；

当 $n=0$ 时，$\Delta=4n^2=0$，方程有两个相等的实数根.

评注 运用根的判别式判定一元二次方程的根的情况时，必须先把方程化为一元二次方程的一般形式，正确地确定各项系数，对于字母系数应分情况讨论.

例 2 关于 x 的方程 $x^2-(2k-5)x+k^2=0$.

(1)当 k 取何值时，有两个不相等的实数根？

(2)当 k 取何值时，有两个相等的实数根？

(3)当 k 取何值时，没有实数根？

解析 $\Delta=[-(2k-5)]^2-4k^2=4k^2-20k+25-4k^2=-20k+25$.

(1)当 $-20k+25>0$，即 $k<\dfrac{5}{4}$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

(2)当 $-20k+25=0$，即 $k=\dfrac{5}{4}$ 时，原方程有两个相等的实数根.

(3)当 $-20k+25<0$，即 $k>\dfrac{5}{4}$ 时，原方程没有实数根.

评注：已知方程的根的情况，确定方程中字母系数的取值范围是判别式定理的逆定理的应用，即列出方程或不等式，然后求出方程的解或不等式解集即是.

例 3 求证：不论 m 为何实数，方程 $2x^2-(4m-1)x=m^2+2m$ 都有两个不相等的实数根.

证明：原方程可化为 $2x^2-(4m-1)x-(m^2+2m)=0$，

$$\Delta=[-(4m-1)]^2-4\times2\times[-(m^2+2m)]$$
$$=16m^2-8m+1+8m^2+16m$$
$$=24m^2+8m+1$$
$$=8m^2+(16m^2+8m+1)=8m^2+(4m+1)^2.$$

∵无论 m 为何实数，$8m^2\geqslant 0$，$(4m+1)^2\geqslant 0$，且两者不同时为 0.

$\therefore 8m^2+(4m+1)^2>0$，即 $\Delta>0$.

∴无论 m 为何实数，原方程都有两个不相等的实数根.

评注：解决本题的关键是利用配方法来确定根的判别式的符号．另外，要特别注意"方程有两个不相等的实数根"是要证明的结论，而不是已知条件.

教材例题习题的变形题

例 题 (**P27B 组第 1 题**)是否存在 k 的值，使方程 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$ 有两个相等的正整数根？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

解析 假设方程 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$