Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

概率论与数理统计

学习辅导与习题解答

（医药类·第二版）

◎吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

概率论与数理统计

学习辅导与习题解答

（医药类·第二版）

⊙吴赣昌 主编

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

《概率论与数理统计》学习辅导与习题解答（医药类·第二版）/吴赣昌主编. —北京：中国人民大学出版社，2012.11
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-16185-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第270521号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
《概率论与数理统计》学习辅导与习题解答
（医药类·第二版）
吴赣昌　主编
Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　　次**	2012年11月第1版
印　　张	14.75	**印　　次**	2012年11月第1次印刷
字　　数	556 000	**定　　价**	26.00元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所大专院校广泛采用。

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已。事实上，在大学生涯中，就提高学习基础、提升学习能力、培养科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程。

为方便同学们使用“21世纪数学教育信息化精品教材”学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书籍均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的**主要知识归纳**、**典型例题分析**与**习题解答**等内容，而每一章的设计中包括了该章的**教学基本要求**、**知识点网络图**、**题型分析**与**总习题解答**，上述设计有助于学生在课后自主研读时通过这些教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要反复、认真地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队通过数苑网（www.math168.com或者www.sciyard.com）为本系列教材与教辅的用户提供丰富的资源性与交互性的网络学习服务，其中与该系列教辅书籍最为直接相关的是在大学课程教学空间的“大学数学”栏目中，专门建

设了**“大学公共数学教学空间”**。该教学空间的建设旨在为全国大学数学相关课程的教学双方提供一个基于网络进行学习辅导与交流讨论的平台，**其最大的特色**在于该网络教学空间集成了数苑自主研发且国际领先的公式编辑与计算软件 Sciyard MathPlay 以及图形编辑与计算软件 Sciyard GraphPlay，使其支持文字、公式与图形的在线编辑、发布、复制、粘贴与修改，从而全面支持用户基于网络进行数学等科学知识的在线交流与讨论。在该教学空间中，用户不仅可用跟帖方式对各类教学要点、例题与习题进行交流讨论，还可用主动发帖方式将自己学习中遇到的困惑、问题或者获得的经验、心得发布到论坛上进行交流讨论。大学公共数学同步学习论坛的建设有利于汇聚广大师生的智慧，从而对课程教育与学习相关的各类问题进行深入的讨论，而空间中建设与积累的丰富教学资源又能进一步为参与交流讨论的师生创造良好的教学环境。

与“21 世纪数学教育信息化精品教材”配套建设的教辅书籍包含了面向普通本科理工类、经管类、农林类、医药类、医学类与纯文科类的 14 套共 16 本，面向各类三本院校理工类与经管类的 6 套共 7 本，面向高职高专院校的理工类、经管类与综合类的 7 套共 7 本，总计 27 套 30 本。此外，该系列教辅书籍的内容建设与编排具有相对的独立性，它们还可以作为相应大学数学课程教学双方的参考书。

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”（www.math168.com 或者 www.sciyard.com)，你将会获得意想不到的收获。在那里，你不仅能进一步拓展自己的学习空间，下载优秀的学习交流软件，寻找到更多教材教辅之外的学习资源，而且还能与来自全国各地的良师益友建立联系。

吴赣昌

2012 年 4 月 18 日

目　录

第 1 章　随机事件及其概率 …… 1

§1.1　随机事件 …… 1

§1.2　随机事件的概率 …… 6

§1.3　古典概型与几何概型 …… 10

§1.4　条件概率 …… 19

§1.5　事件的独立性 …… 28

本章小结 …… 37

第 2 章　随机变量及其分布 …… 59

§2.1　随机变量 …… 59

§2.2　离散型随机变量及其概率分布 …… 61

§2.3　随机变量的分布函数 …… 68

§2.4　连续型随机变量及其概率密度 …… 74

§2.5　随机变量函数的分布 …… 84

本章小结 …… 91

第 3 章　多维随机变量及其分布 …… 107

§3.1　二维随机变量及其分布 …… 107

§3.2　条件分布与随机变量的独立性 …… 116

*§3.3　二维随机变量函数的分布 …… 126

本章小结 …… 137

第 4 章　随机变量的数字特征 …… 163

§4.1　数学期望 …… 163

§4.2　方差 …… 172

§4.3　协方差与相关系数 …… 180

§4.4　大数定理与中心极限定理 …… 189

本章小结 …… 198

第 5 章　数理统计的基础知识 …… 237

§5.1　数理统计的基本概念 …… 237

§5.2　常用统计分布 …… 246

§5.3　抽样分布 …… 254

本章小结 …… 263

第 6 章　参数估计 …… 278
§6.1　点估计问题概述 …… 278
§6.2　点估计的常用方法 …… 285
§6.3　置信区间 …… 293
§6.4　正态总体的置信区间 …… 299
§6.5　二项分布和泊松分布总体参数的区间估计 …… 308
本章小结 …… 311
第 7 章　假设检验 …… 335
§7.1　假设检验的基本概念 …… 335
§7.2　单正态总体的假设检验 …… 340
§7.3　双正态总体的假设检验 …… 347
* §7.4　关于一般总体数学期望的假设检验 …… 355
* §7.5　分布拟合检验 …… 364
§7.6　非参数检验 …… 374
本章小结 …… 390
第 8 章　方差分析 …… 407
§8.1　单因素试验的方差分析 …… 407
§8.2　两两间多重比较的检验方法 …… 412
* §8.3　双因素试验的方差分析 …… 418
本章小结 …… 425
第 9 章　正交试验设计与分析 …… 437
§9.1　试验设计概论 …… 437
§9.2　正交试验的基本思想与一般步骤 …… 438
§9.3　正交试验的直观分析方法 …… 439
§9.4　考虑交互作用的正交试验分析 …… 440
§9.5　正交试验的方差分析 …… 440
本章小结 …… 441
第 10 章　回归分析 …… 448
§10.1　相关与相关系数 …… 448
§10.2　一元线性回归 …… 449
* §10.3　多元线性回归 …… 454
§10.4　计算半数致死量的概率单位法 …… 454
本章小结 …… 456

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

本章教学基本要求：

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件的关系与运算；
2. 了解概率、条件概率的定义，掌握概率的基本性质，会计算古典概型的概率；
3. 掌握概率的加法公式，乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式；
4. 理解事件独立性的概念，掌握应用事件独立性进行概率计算的方法；
5. 理解独立重复试验的概率，掌握计算有关事件概率的方法.

§1.1　随机事件

一、主要知识归纳

1. 随机试验及其特征（见表 1—1—1）

表 1—1—1　　随机试验及其特征

定义	在一定条件下我们对事先无法准确预知其结果的现象（即随机现象）的观察，称为随机试验. 随机试验的每一种可能的结果（即样本点）组成的集合 S 称为样本空间. 样本空间的子集称为事件. 由样本空间的样本点构成的单元素子集称为基本事件.
特征	（1）可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行； （2）可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果； （3）不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

2. 事件的关系与运算（见表 1—1—2）

表 1—1—2　　事件的关系与运算

事件的关系	表示形式	意义
包含	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 特例：$\varnothing\subset A\subset S$.
相等	$A=B$	$A\subset B$，且 $B\subset A$.

续前表

事件的关系	表示形式	意义
互不相容	$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生.
对立	$A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 有且仅有一个发生. 显然：$\overline{A}=S-A$.
和（或并）	$A\cup B=\{w\mid w\in A$ 或 $w\in B\}$	事件 A 与 B 至少有一个发生.
积（或交）	$A\cap B=\{w\mid w\in A$ 且 $w\in B\}$	事件 A 与事件 B 同时发生.
差	$A-B=\{w\mid w\in A$ 且 $w\notin B\}$	事件 A 发生，但事件 B 不发生.

3. 事件的运算规律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 自反律：$\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$（又称德摩根公式）.

注： 上述运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

二、典型例题分析

例 1　某大学招聘两位心理学教师（一名讲师，一名助教），现有男、女各两名应聘者前来应聘，为此先从 4 人中任选一名担任讲师，然后再从余下的三名中任取一名担任助教.

(1) 写出样本空间 S 的全部元素；

(2) 写出下列事件包含的样本点：

$A=$“两职位均为男应聘者担任”，

$B=$“两职位中恰有一职位由女应聘者担任”，

$C=$“两职位中最多安排一名女应聘者”，

$D=$“两职位中最少安排一名女应聘者”.

解　记男应聘者为 M_1，M_2，女应聘者为 F_1，F_2，则

(1) $S=\{M_1M_2,\ M_1F_1,\ M_1F_2,\ M_2M_1,\ M_2F_1,\ M_2F_2,\ F_1M_1,\ F_1M_2,\ F_1F_2,\ F_2M_1,\ F_2M_2,\ F_2F_1\}$；

(2) $A=\{M_1M_2,\ M_2M_1\}$，

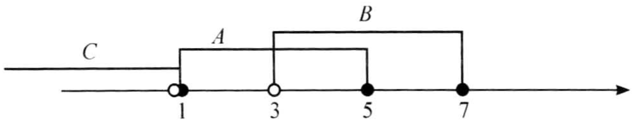
$B=\{M_1F_1,\ M_1F_2,\ M_2F_1,\ M_2F_2,\ F_1M_1,\ F_2M_1,\ F_1M_2,\ F_2M_2\}$，

$C=A\cup B$，$D=\{F_1F_2,\ F_2F_1\}\cup B$.

例 2　设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$，$C=\{x\mid x<1\}$ 都是 $R=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 中的集合，试求下列各集合：

(1) $A\cup B$； (2) $B\cap\overline{C}$； (3) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$； (4) $(A\cup B)\cap C$.

解 首先在坐标轴上标出集合 A, B, C 所包含的区间（见例 2 图），得



例 2 图

(1) $A\cup B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 7\}$；

(2) $B\cap\overline{C}=B=\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$；

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}=\{x\mid x>7\}$；

(4) $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

小结：概率论的任务之一是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律，因此，熟练掌握事件的关系与运算是学习概率论的基础. 对于同一个集合可以有概率论和集合论两种解释，要学会用概率论的语言解释集合间的关系及运算，并能运用它们. 而数形结合是解决这类问题的一种简便方法.

例 3 设 A、B、C 为三个随机事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

(1) D="A、B、C 至少有一个发生"；

(2) E="A 发生，而 B 与 C 都不发生"；

(3) F="A、B、C 中恰有一个发生"；

(4) G="A、B、C 中恰有两个发生"；

(5) H="A、B、C 中不多于一个发生".

解 (1) $D=(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)\cup ABC=A\cup B\cup C$；

(2) $E=A\overline{B}\overline{C}$；

(3) $F=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(4) $G=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(5) $H=(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\cup\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}$.

小结：将复合事件用简单事件通过运算来表示，是计算复合事件概率的关键. 基本的思路是：(1) 弄清楚所给随机试验有哪些基本事件，所求复合事件由哪些简单事件复合而成；(2) 分析该复合事件与这些简单事件间的关系，利用事件间的关系所对应的运算及事件的运算律，将复合事件用简单事件表示出来.

例 4 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立：

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$；

(2) $\overline{A}B=A\cup B$；

(3) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

(4) 若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$；

(6) 若 $A\subset B$，则 $AB=A$；

(7) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}C$.

解　(1) 成立. 由分配律得

$$A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap S=A\cup B.$$

(2) 不成立. 由于 $A\not\subset\overline{A}B$，而 $A\subset A\cup B$.

(3) 成立. 由结合律得 $(AB)(A\overline{B})=AB\overline{B}=A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4) 成立. 由 $C\subset A$ 及 $AB=\varnothing$，显然得 $BC=\varnothing$.

(5) 成立. 由并及包含的定义易证.

(6) 成立. 由交及包含的定义易证.

(7) 不成立. 由对偶律得 $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\,\overline{B}C\neq\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

三、习题 1—1 解答

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.

解 (1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

2. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A，B，C 分别表示“第一次出现正面”，“两次出现同一面”，“至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A，B，C 中的样本点.

解　设试验的样本空间为 S，则 S，A，B，C 可表示为

$S=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$；

$A=\{$(正，正)，(正，反)$\}$；

$B=\{$(正，正)，(反，反)$\}$；

$C=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$.

3. 掷一颗骰子，观察其出现的点数，事件 $A=$“偶数点”，$B=$“奇数点”，$C=$“点数小于 5”，$D=$“点数为小于 5 的偶数”. 讨论上述事件的关系.

解　易知样本空间 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{1, 3, 5\},\ C=\{1, 2, 3, 4\},\ D=\{2, 4\}.$$

从而 $D\subset A$，$D\subset C$，$\overline{A}=B$，$B\cap D=\varnothing$.

4. 设某人向靶子射击 3 次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子”($i=1, 2, 3$)，试用语言描述下列事件：

(1) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

解 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 表示 3 次射击至少有一次没击中靶子.

(2) $\overline{A_1\cup A_2}$.

解 $\overline{A_1\cup A_2}$表示前两次射击都没有击中靶子.

(3) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$.

解 $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$ 表示恰好连续两次击中靶子.

5. 判断下列各式哪个成立，哪个不成立，并说明为什么.

(1) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

解 成立. 否则，B 不发生不导致 A 不发生，换言之，B 不发生导致 A 发生，即 $\overline{B}\subset A$，又因为 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset B$，矛盾.

(2) $(A\cup B)-B=A$.

解 利用事件运算的分配律，有

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B}=A-AB\subset A.$$

显然，$A-AB$ 一般不等于 A，故结论 $(A\cup B)-B=A$ 不一定成立，只有当 A，B 互不相容时，等式成立.

(3) $A(B-C)=AB-AC$.

解 右边$=AB\overline{AC}=AB(\overline{A}\cup\overline{C})=\varnothing\cup AB\overline{C}=A(B\overline{C})=A(B-C)=$左边.

以上等式关系是可逆的，所以又可以证明左边=右边. 因此

$$A(B-C)=AB-AC$$

是正确的.

6. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别? 举例说明.

解 事件 A, B 互不相容，是说事件 A, B 不同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$；事件 A, B 互为对立事件，是说事件 A, B 有且仅有一个发生，即 $A\cap B=\varnothing$且 $A\cup B=S$.

因此，对立事件与互不相容事件的区别与联系是：

(1) 若两事件对立，则必定互不相容，但两事件互不相容未必对立；

(2) 互不相容可用于多个事件，而互为对立事件仅是用于两个事件；

(3) 两个事件互不相容只是说明两个事件不能同时发生，即至多发生其中一个事件，但可以都不发生，而两事件对立说明两事件有且仅有一个发生.

例如，题 3 中，B 与 D 互不相容，但不是对立事件；而 B 与 A 既是互不相容又是对立事件.

若令 $E=\{6\}$，则事件 B、D、E 互不相容，且 $B\cup D\cup E=S$.

7. 设 A、B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系.

解 由对偶律知 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，又已知 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，所以有 $AB=\overline{A\cup B}$，即 A，B 同时发生$\Leftrightarrow A$，B 无一个发生.

又因为 $A\cup B\supset AB$，所以 $AB=\varnothing$，故 $\overline{A\cup B}=\varnothing$，$A\cup B=S$，所以 A 与 B 互为对立事件.

8. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

解　由事件运算的性质，有

$$\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}=\overline{(\overline{AB}\cup C)}\cup AC=\overline{\overline{AB}}\,\overline{C}\cup AC=AB\overline{C}\cup AC$$
$$=A(B\overline{C}\cup C)=A(B\cup C).$$

9. 设 A 和 B 是任意两个事件，化简下列两式：

(1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解　由事件运算的性质，有

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}=A\cup A(\overline{B}\cup B)=A,$$
$$(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}\,\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B}\cup B\overline{A}\cup B\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{A}(B\cup\overline{B})=\overline{A},$$
$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing.$$

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$.

解　由事件运算的性质，有

$$AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}=(A\cup\overline{A})B\cup(A\cup\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}$$
$$=B\cup\overline{B}-\overline{AB}=S-\overline{AB}=AB.$$

10. 证明：$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

证　由定义有 $A-B=A\overline{B}$，

并且　$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B}$，

而　$A-AB=A\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=A\overline{B}$.

所以等式成立.

§1.2　随机事件的概率

一、主要知识归纳

1. 频率及其性质（见表 1—2—1）

表 1—2—1　　**频率及其性质**

定义	若在相同的条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的频率.
性质	(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$； (2) $f_n(S)=1$； (3) 设 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则 $f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$.

2. 概率的定义（见表 1—2—2）

表 1—2—2　　概率的定义

公理化定义	设 E 为随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三个条件： (1) 非负性：对每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$； (2) 完备性：$P(S)=1$； (3) 可列可加性：对任意可数个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$， 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.
统计定义	在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$. 显然，概率与频率有相同的性质： (1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$； (2) $P(S)=1$； (3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

3. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$，反之不成立.

(2) 有限可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 特别地，若 $B\subset A$，则

(a) $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

(b) $P(A)\geqslant P(B)$.

(5) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(6) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

注： 性质 (6) 可推广到任意有限个事件的并的情形.

二、典型例题分析

例 1　设 $AB=\varnothing$，$P(A)=0.6$，$P(A\cup B)=0.8$，求事件 B 的逆事件的概率.

解　由　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$，得

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.6=0.2,$$

故

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.2=0.8.$$

小结： 概率的性质 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 可以推广到 n 个事件的情形：一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

例 2　设 A 和 B 为两随机事件，A 和 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{1}{4}$，A 发生且 B 不发生的概率为 $\frac{1}{12}$，求 $P(B)$.

解　由题意知 $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$，$P(A\overline{B}) = \frac{1}{12}$. 而 $B \cap (A\overline{B}) = \varnothing$，故由概率的有限可加性得

$$P(A \cup B) = P(B \cup A\overline{B}) = P(B) + P(A\overline{B}).$$

从而　$$P(B) = P(A \cup B) - P(A\overline{B}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

小结：要求 $P(B)$，需要根据已知事件的概率利用概率的性质求解. 概率的 6 条性质要熟练掌握，并能够根据需要灵活变形.

例 3　设 A，B，C 是三个随机事件，且 $P(A) = 0.3$，$P(B) = 0.4$，$P(C) = 0.6$，$P(AC) = P(BC) = P(AB) = 0.25$，$P(ABC) = 0.2$. 试求下列各事件的概率：

(1) "三个事件中至少有一个发生"记为 D_1；

(2) "三个事件中至少有两个发生"记为 D_2；

(3) "恰有一个事件发生"记为 D_3.

解　由题意知，可以得到：

(1) $D_1 = A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$ 或 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$.

则 $P(D_1) = P(A \cup B \cup C)$
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
$= 0.3 + 0.4 + 0.6 - 0.25 - 0.25 - 0.25 + 0.2 = 0.75.$

(2) $D_2 = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$ 或 $AB \cup BC \cup CA$.

则 $P(D_2) = P(AB \cup BC \cup CA)$
$= P(AB) + P(BC) + P(CA) - P(ABBC) - P(ABCA) - P(BCCA) + P(ABC)$
$= P(AB) + P(BC) + P(CA) - 2P(ABC) = 0.25 + 0.25 + 0.25 - 0.4 = 0.35.$

(3) $D_3 = A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$. 且 $A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\,\overline{B}C$ 两两互不相容，而

$P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = 0.3 - 0.25 - 0.25 + 0.2 = 0$，

$P(\overline{A}B\overline{C}) = P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) = 0.4 - 0.25 - 0.25 + 0.2 = 0.1$，

$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.6-0.25-0.25+0.2=0.3.$

则 $P(D_3)=P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=0.4.$

小结："至少发生一个"和"恰好发生一个"是有区别的，同时要灵活运用概率的性质 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，并将其推广到多维的情形.

三、习题1—2解答

1. 设 $P(A)=0.1$，$P(A\cup B)=0.3$，且 A 与 B 互不相容，求 $P(B)$.

解 因为 A 与 B 互不相容，利用概率的有限可加性，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

于是 $P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)=0.3+0-0.1=0.2.$

2. 设事件 A、B、C 两两互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，求

$$P[(A\cup B)-C].$$

解 因为 A、B、C 两两互不相容，所以

$$A\subset\overline{C},\ B\subset\overline{C},\ P(AB)=0.$$

因而
$$\begin{aligned}P[(A\cup B)-C]&=P[(A\cup B)\cap\overline{C}]=P[(A\overline{C})\cup(B\overline{C})]\\&=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P[AB\overline{C}]=P(A)+P(B)=0.5.\end{aligned}$$

3. 设 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 利用概率的性质，有

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]=\frac{11}{12}.$$

4. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AB)=0$，求事件 A，B，C 全不发生的概率.

解 事件 A，B，C 全不发生可表示为 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$，则其概率为

$$\begin{aligned}&P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right]=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

5. 设 A，B 是两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问：

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

解　由 A、B 两事件概率可知，A，B 两事件相容．利用加法公式，有

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

(1) 由 $P(B)=0.7$，$P(A)=0.6$，知 $P(B)>P(A)$．

当 $B\supset A$ 时，$AB=A$，$A\cup B=B$，$P(A\cup B)=P(B)$ 为最小，此时 $P(AB)$ 为最大，故

$$P(AB)|_{\max}=P(A)=0.6.$$

(2) 因为 $P(B)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1$，故当 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$ 最小，且

$$P(AB)|_{\min}=P(A)+P(B)-1=0.6+0.7-1=0.3.$$

§1.3　古典概型与几何概型

一、主要知识归纳

表 1—3—1　　**排列与组合**

	定义	是否需考虑顺序
排列	(1) 从 n 个不同元素中任取 $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ 个的不同排列总数为 $$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$ 全排列： $$\mathrm{P}_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!.$$ (2) 在允许重复的条件下，从 n 个不同元素中取 $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ 个的不同排列总数为 $n\cdot n\cdots n=n^k$.	需考虑顺序
组合	从 n 个不同元素中任取 $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的组合总数为 $$\binom{n}{k}=\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{P}_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\;k!}.$$ 二项式及其特例： $$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k},\quad \mathrm{C}_{m+n}^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_m^i\mathrm{C}_n^{k-i},$$ $$2^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k,\qquad 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k$$	不需考虑顺序