普通高等学校“十一五”规划教材

YIYAO GAODENG SHUXUE

医药高等数学

（第2版）

秦 侠 主编

中国科学技术大学出版社

普通高等学校“十一五”规划教材

YIYAO GAODENG SHUXUE

医药高等数学

（第2版）

主　编　秦　侠
副主编　吴学森　陈　涛
编　者　（以姓氏笔画为序）
朱文婕　刘国旗　孙　侠　吴学森
宋国强　陈　涛　周　睿　赵　妍
秦　侠　魏　杰

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是在安徽省高等学校“十一五”省级规划教材的基础上修订而成的，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、概率论基础和线性代数基础. 每章后附有适量的习题供学生练习. 全书既注意了数学学科本身的科学性与系统性，同时又注意了它在医药学科里的应用. 为便于学生学习，增强教材的实用性，本书还配套编写了《医药高等数学学习指导》.

本书可作为高等医学院校基础医学、临床医学、药理、预防医学及其他各专业本科生和七年制学生的教材，也可供研究生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学/秦侠主编. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.6
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材
ISBN 978-7-312-03196-0

Ⅰ.医…　Ⅱ.秦…　Ⅲ.医用数学—高等数学—医学院校—教材　Ⅳ.①R311 ②O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 054369 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　20.75
字数　404 千
版次　2008 年 8 月第 1 版　2013 年 6 月第 2 版
印次　2013 年 6 月第 5 次印刷
定价　35.00 元

再版前言

“医药高等数学”是高等医学院校本科生的一门必修的基础课，它不仅是学习物理、卫生统计学、药物动力学等课程的必要基础，而且是提高学生素质、促进学生智力发展和培养具有创新能力医药卫生人才的重要保证.

本书是在安徽省高等学校“十一五”省级规划教材的基础上修订而成的. 为了能更加适应医学院校大多数专业的需要，本次修订在内容上进行了调整，增加了无穷级数的内容. 同时考虑到与中学数学的衔接，以及数学知识的完整性和实用性，还在原来的章节中增加了反函数、最小二乘法和二阶常系数线性非齐次微分方程解法等内容. 在选材上仍注重数学向医药科学领域的渗透，用简单的实例说明数学基础知识在医学、药学中的应用. 在写作上，保留了第 1 版教材的结构简明、逻辑清晰、深入浅出等优点，同时更加注意前后知识点的衔接，通俗易懂且叙述详细. 本书可作为高等医学院校基础医学、临床医学、药学、预防医学及其他各专业本科生和七年制学生的教材，也可供研究生学习使用.

为便于学生学习，增强教材的实用性，修订版仍配套编写《医药高等数学学习指导》，其各章内容包括：本章学习目的与要求，重点与难点，典型例题，教材中习题的参考答案，补充习题及参考答案，100 分的自测题及参考答案. 其中典型例题和补充习题在难度上有所提高，题型灵活，解法多样，可满足部分学生考研的需要.

本书编写分工如下：第 1 章由孙侠编写，第 2 章由朱文婕和魏杰编写，第 3 章由陈涛编写，第 4 章由刘国旗编写，第 5 章由宋国强编写，第 6 章由周睿和秦侠编写，第 7 章由吴学森编写，第 8 章由赵妍编写.

本书在编写时参考了其他学者的成果，在此向他们致以谢意.在再版过程中，得到了安徽医科大学和中国科学技术大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢.

虽为再版，但书中仍难免存在少量错漏之处，欢迎同行和读者继续给予批评指正.

秦 侠

2013年1月

前　　言

“医药高等数学”是高等医学院校本科生的一门必修的基础课，它不仅是学习物理、卫生统计学、药物动力学等课程的必要基础，而且是提高学生素质、培养具有创新能力的医药人才的重要保证.

本书是根据安徽省教育厅启动的《安徽省高等学校“十一五”省级规划教材选题的通知》，申报并经过教育厅组织专家评审后批准的省级规划教材.本书的编者来自安徽省四所高等医学院校，他们长期在医学院校从事高等数学的教学与科研工作，有着丰富的经验，本书是他们总结多年来高等数学的教学经验，并联系医药学教学的实际需要编写的.

为适应安徽省高等医学院校“医药高等数学”教学的实际需要，本书编写时充分考虑了近几年安徽省高等医学院校“医药高等数学”教学的实际情况：(1) 学时少，内容多；大班上课；没有充足数学实验工具和设备，尚不具备进行数学实验教学的条件.(2) 都在大学一年级第一学期讲授，而一年级新生还缺乏医药学基础知识.针对以上情况，本书编写的指导思想是：提供重要的数学基础知识，加强学生理性思维训练，培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力以及分析问题和解决问题的能力.

本书在内容上根据医药本科学生知识结构的需要，以医药学基础和科学研究中常用的数学知识为主，内容包括：函数、极限与连续、一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论基础和线性代数基础.在选材上注重数学向医药科学领域的渗透，用简单的实例说明数学基础知识在医学、药学中的应用.在写作上，力求结构简明，深入浅出，运用直观方法和简洁通俗的语言来阐述基本概念和基本方法，对一些定理、性质的繁琐证明和较为复杂的推导适当淡化.每章后附有适量的习题供学

生练习.本书可作为高等医学院校临床医学、药学及其他各专业本科生和七年制学生的教材,也可供研究生学习使用.

为便于学生学习,增强教材的实用性,我们还配套编写了《医药高等数学学习指导》,其各章内容包括:本章学习目的与要求,重点与难点,典型例题,教材中习题的参考答案,补充习题及参考答案,100分的自测题及参考答案.其中典型例题和补充习题在难度上有所提高,题型灵活,解法多样,可满足部分学生考研的需要.

本书编写分工如下:第1章由孙侠编写,第2章由魏杰和朱文婕编写,第3章由陈涛编写,第4章由刘国旗编写,第5章由周睿和秦侠编写,第6章由吴学森编写,第7章由赵妍编写.

本书在编写时参考了其他学者的成果,在此向他们致以谢意.本书在编写过程中,得到安徽医科大学和中国科学技术大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢.

新教材整体应用还有待于教学实践的检验,我们诚挚地希望读者对本书中存在的错误和不妥之处提出批评与建议,并表示衷心的感谢.

秦　侠

2008年7月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

函数概念是高等数学中重要的概念之一，微积分的主要研究对象就是函数；极限概念是研究函数的理论基础，极限方法是微积分学的基本分析方法，掌握极限方法是学好高等数学的关键；连续则是函数的一种性态，函数的连续性可以用极限来描述. 本章将介绍函数、极限和连续的基本概念及基本方法，为后续章节的学习奠定基础.

1.1　函　　数

函数是微积分的主要研究对象，本节将在中学代数关于函数知识的基础上进一步讨论函数. 由于函数是描述变量间相互依赖关系的，而微积分研究的函数主要是在实数集上定义的函数，因此，本节首先复习与函数概念密切相关的基本概念：实数、区间、常量和变量，然后在此基础上介绍函数的概念.

1.1.1　实数、区间与邻域

在中学代数里介绍过，实数由有理数和无理数两部分组成，全体实数构成的集合称为实数集. 实数可以用数轴上点的坐标来表示，每一个实数必是数轴上某一点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数. 这就是说实数集与数轴上的全体点形成一一对应关系. 为了简单起见，常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示，如点 x 和实数 x 是相同的意思. 有时也把实数 x 称为有限数，与之对应的用“∞”（称为无穷大）表示无限数，“∞”分为“$+\infty$”（称为正无穷）和“$-\infty$”（称为负无穷）.

在实数集中，今后用得较多的是各种各样的区间. 所谓区间是指介于某两个数之间的全体实数，而这两个数叫作区间的端点. 区间可以分成以下几类：

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫作开区间，用记号 (a,b) 表示；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫作闭区间，用

记号$[a,b]$表示;满足不等式$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的一切实数x的全体叫作半开区间,用记号$(a,b]$或$[a,b)$表示.

在数轴上,区间是介于某两个点之间的一条线段上点的全体,这两个点就是区间的端点,两点间的距离也就是线段的长度,称为区间的长度.例如,上述各个区间的端点是点a和点b,区间的长度都是$b-a$.

在以上区间中,由于a,b是两个实数(有限数),因此上述区间都称为有限区间.如果区间的两个端点中至少有一个是∞(无限数),则称该区间为无限区间.例如$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$和$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$都是无限区间.全体实数构成的集合$\mathbf{R}$可记作$(-\infty,+\infty)$,也是无限区间.

在后面的章节中经常会用到一种特殊的开区间,称之为邻域.把以点x_0为中心,某一很小的正数δ为半径的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为x_0的δ邻域,记为$U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

其中点x_0称为该邻域的中心,正数δ称为该邻域的半径.邻域$U(x_0,\delta)$表示与点x_0距离小于δ的一切点x的全体,即$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$.

将点x_0的δ邻域中去掉中心点x_0所得到的实数全体,称为点x_0的去心δ邻域,记为$U_0(x_0,\delta)$,即

$$U_0(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

其中$(x_0-\delta,x_0)$称为x_0的左δ邻域,$(x_0,x_0+\delta)$称为x_0的右δ邻域.

1.1.2 常量与变量

在医药学中,常会遇到各种不同的量,例如身高、体重、药量、感染人数、出生率、死亡率、患病率和发病率等.而在观察某种自然现象或某个研究的过程中,发现这种种不同的量有着不同的状态.其中有的量在某一现象或过程中始终保持同一数值不变,这种量称为**常量**(constant quantity);而另外一些量在某一现象或过程中有变化,可以取不同的数值,这种量称为**变量**(variable).例如,生物学中,在一定容积的培养基中成批培养细胞,在培养过程中,容积是常量,细胞的数目、培养基中的营养物质等是变量.

仔细分析上述常量和变量的概念可以看出,一个量是常量还是变量不是绝对的,而是要依赖于研究这个现象所在的场合,同一个量,在某一现象或过程中可以认为是常量,而在另一现象或过程中就可能是变量.例如,在研究少儿生长发育的过程中身高视为变量,而在研究成年人的生理状况时身高视为常量.

在同一现象或过程中，往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的，并遵循着一定的规律在变化. 函数反映的就是变量之间的这种依赖关系. 下面先讨论两个变量的依赖关系，多于两个变量的情形将在第 4 章讨论.

1.1.3　函数的定义

两个变量之间可能有各种各样的关系，如"大于"关系、"小于"关系等. 那么什么是两个变量之间的函数关系呢？下面用集合的语言给出函数关系的定义.

1. 函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空的数集，如果变量 x 在 D 内任取一个值，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之相对应，则称变量 y 与变量 x 满足函数关系，并称 y 是 x 的**函数**(function)，记作 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependant variable)，D 称为**定义域**(domain of definition). 当自变量 x 取一定值 x_0 时，因变量 y 的相应值 y_0 称为函数值，即 $y_0=f(x_0)$，所有函数值的全体 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**(domain of functional value).

由定义 1.1 可知，定义域和对应法则是确定一个函数的两大要素，如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那它们是相同的函数，否则就是不同的函数. 下面讨论函数定义域的确定和对应法则的表达方式.

(1) 函数定义域的确定.

函数的定义域 D 通常按以下两种情形来确定：① 当函数用抽象的算式(解析式)表达时，其定义域是使算式有意义的一切实数构成的集合. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-1,1]$. ② 当函数在实际中应用时，其定义域不仅要使函数的表达式有意义，还要参考实际意义才能确定. 例如某细胞繁殖的生长率函数为 $r=36t-t^2$，其定义域是$[0,+\infty)$.

(2) 函数对应法则的表达形式.

在实际中，函数的对应法则 f 的表达形式通常有三种：解析法、图像法和列表法. 由于中学里已介绍过，这里不再一一举例. 在后面的学习中，函数的表达主要用解析法. 下面列举几个用解析法表达的函数.

例 1.1　自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果开始下落的时刻记为 $t=0$，落地时刻是 $t=T$，那么 s 与 t 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T] \tag{1.1}$$

例 1.2　假设 16 岁以上的成年人每天服用某药物的剂量 Q 是 2 mg，而 16 岁以

下的未成年人每天服用该药物的剂量 Q 与年龄 t 成正比，比例系数为 0.125 mg/岁，则剂量 Q 与年龄 t 的函数关系为

$$Q=\begin{cases}0.125t, & 0<t<16\\ 2, & t\geqslant 16\end{cases}\tag{1.2}$$

该函数的定义域是 $0<t<+\infty$，但在定义域的不同区间上，函数关系是用两个解析式表示的.

2. 单值函数和多值函数

在定义 1.1 中，如果自变量 x 在 D 内任取一个值，对应的函数值 y 总是唯一的，这样的函数又称为单值函数，否则称为多值函数. 例如在方程 $x^2+y^2=4$ 中，对于每一个 $x\in(-2,2)$，都有两个 y 值与之对应，因此，方程 $x^2+y^2=4$ 确定了一个以 x 为自变量，y 为因变量的多值函数. 如果附加一些条件，将多值函数化为单值函数，这样得到的单值函数称为原来多值函数的单值分支. 例如限定 $y\geqslant 0$，则由方程 $x^2+y^2=4$ 确定的单值函数 $y=\sqrt{4-x^2}$，是原来多值函数的一个单值分支；同样的，$y=-\sqrt{4-x^2}$ 是另一个单值分支. 本书中，若无特别说明时，所称的函数都是指单值函数.

3. 隐函数

由定义 1.1 可知，函数表示的是两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以有不同的表达形式. 如果因变量 y 是用自变量 x 的明显表达式表示出来的，称这种方式表达的函数为显函数. 例如 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，$y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\dfrac{1}{x}$ 都是显函数. 而有些函数的表达方式却不是这样，它的因变量与自变量的对应关系是由一个方程确定的，函数关系隐含在这个方程中，这样的函数称为隐函数. 例如，方程 $x^2+y^2=4$，$x+y^3-1=0$ 都是隐函数.

一般地，如果变量 y 与 x 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当变量 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足此方程的 y 值与之对应，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了以 x 为自变量、y 为因变量的隐函数.

有些隐函数可以化成显函数. 例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，这样就把隐函数化成了显函数，简称为隐函数的显化. 隐函数的显化有时是很困难的，甚至是不可能的. 例如由方程 $e^y+xy-e=0$ 确定了 y 是 x 的隐函数，要将这个隐函数化为显函数非常困难.