各个击破

ZHUANTI DIANJI

专题点击

- 以专题为编写线索
- 针对性、渗透性强
- 体例新颖、注重能力培养
- 适用区域广泛

高中数学

·立体几何·

主　编　张绍春　刘宇辉

14

东北师范大学出版社

Z 各个击破

ZHUANTI DIANJI

以专题为编写线索

针对性、渗透性强

体例新颖、注重能力培养

专题点击

14

高中数学

·立体几何·

主 编 张绍春 刘宇辉

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

专题点击. 高中数学. 立体几何/张绍春主编. —长春：东北师范大学出版社，2003.5

ISBN 7-5602-3326-0

Ⅰ. 专… Ⅱ. 张… Ⅲ. 立体几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 026518 号

ZHUANTI DIANJI

□策划创意：一编室

□责任编辑：李敬东　□责任校对：沙铁成

□封面设计：张　然　□责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街 5268 号　邮政编码：130024

电话：0431—5695744　5688470　传真：0431—5695734

网址：www.nnup.com　电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

沈阳市新华印刷厂印装

沈阳市铁西区建设中路 30 号（110021）

2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷

幅面尺寸：148 mm × 210 mm　印张：7.75　字数：275 千

印数：00 001 — 10 000 册

定价：9.00 元

CHUBANZHE DE HUA

出版者的话

《专题点击》丛书的创意始于教材改革的进行，教材的不稳定使教辅图书市场异彩纷呈，新旧图书杂糅，读者即使有一双火眼金睛，也难以取舍。但无论各版别的教材如何更新，变革，万变不离其宗的是，删改陈旧与缺乏新意的内容，增加信息含量，增强人文意识，培养创新精神，增添科技内涵，活跃思维，开发学生的创新、理解、综合分析及独立解决问题等诸多能力，而这些目标的实现均是以众多不断调整的知识版块、考查要点串连在一起的。不管教材如何更改，无论教改的步子迈得多大，这些以丰富学生头脑，开拓学生视野，提高其综合素养为宗旨的知识链条始终紧密地联系在一起，不曾有丝毫的断裂，而我们则充分关注形成这一链条的每一环节，这也是“专题”之切入点。

《专题点击》丛书的出版正是基于此种理念，涵盖初高中两个重点学习阶段所学语文、英语、数学、物理、化学等五个学科，各科以可资选取的知识版块作为专题，进行精讲，精解，精练。该丛书主要具有以下特点：

一、以专题为编写线索

语文、英语、数学、物理、化学五主科依据初高中各年级段整体内容及各学科的自身特点，科学、系统地加以归纳、分类及整理，选取各科具有代表性的知识专题独立编写成册，并以透彻的讲解，精辟的分析，科学的练习，准确的答案为编写思路，再度与一线名师携手合作，以名师的教学理念为图书的精髓，以专题为轴心，抓住学科重点、知识要点，以点带面，使学生对所学知识能融会贯通。

二、针对性、渗透性强

“专题”，即专门研究和讨论的题目，这就使其针对性较明显。其中语文、英语两科依据学科试题题型特点分类，数学、物理、化学各科则以知识板块为分类依据，各科分别撷取可供分析讨论的不同板块，紧抓重点难点，参照国家

课程标准及考试说明，于潜移默化中渗透知识技能，以收“润物细无声”之功效。

三、体例新颖，注重能力培养

《专题点击》丛书体例的设计，充分遵循了学生学习的思维规律，环环相扣，逻辑性强。基础知识的讲解，注重精练，循序渐进，以至升华；典型例题，以实例引航，达到举一反三，触类旁通；把知识点融入习题，鼓励实战演练，做到学以致用。本丛书一以贯之、自始至终遵循的是对学生能力的培养。

四、适用区域广泛

《专题点击》丛书采用“专题”这一编写模式，以人教版教材为主，兼顾国内沪版、苏版等地教材，汲取多种版本教材的精华，选取专题，使得本套书在使用上适用于全国的不同区域，可活学活用，不受教材版本的限制。

作为出版者，我们力求以由浅入深、切中肯綮的讲解过程，化解一些枯燥的课堂教学，以重点、典型的例题使学生从盲目的训练中得以解脱，以实用、适量的练习减少学生课下如小山般的试卷。

我们的努力是真诚的，我们的探索是不间断的，希望我们的努力使学生有更多的收获。成功并不属于某一个人，它需要我们共同创造，需要我们携手前行。

东北师范大学出版社

第一编辑室

ZHUANTI DIANJI

目录

专题点击

ZHUANTI DIANJI

专题点击

①斜二测
②三视图
③公理

第一章 平面的基本性质

第一节 平面和它的表示法

1 知识点击 循序渐进

我们在日常生活中看到的物体,形状是千差万别的,表面也各不相同. 有的物体的表面是弯曲的,如图 1 - 1 所示杯子的表面;有的物体的表面是平的,如图 1 - 1 中玻璃的表面、桌子的表面. 平静的水面、玻璃的表面等都给我们以平面的形象.

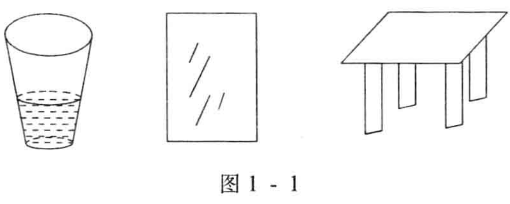


图 1 - 1

人们在实践中是如何检验一个面是平面的呢?木工刨一块木板,为了检验这块木板是否刨平,他们用直尺的边缘紧靠在所刨的木板上,并从一处平行移动到另一处,仔细观察直尺的边缘是否总与木板表面密合,如果是密合的,那就说明木板已经刨平了. 瓦工在用水泥铺砌地砖时,也是用一根直尺在刚铺的水泥地面上来回刮动,如果直尺和水泥地面处处密切接触的话,就说明这块地面已经平了.

平面和点、直线一样,是一个只描述而不定义的原始概念. 在一个面上任取

两点连一条直线,如果这条直线全部在这个面内,就称这个面是平面.

我们在生活中见到的平面是有范围的,但数学中所说的平面则是无限延展的,它是点的集合,在空间,没有大小,没有厚薄,只有位置,广阔而无边缘.举个形象的例子:一个平面把空间分成两个部分,如果想从平面的一侧到达平面的另一侧,则必须穿过这个平面.

尽管平面是无限延展的,但我们不可能画出一个无限的图形,只能用一个有限的平面图形表示某个平面所处的具体位置.通常我们用平行四边形来表示一个平面,所画的平行四边形是表示它所在的整个平面.需要时,可以把它扩展或缩小.这如同画直线一样,直线是无限延伸的,但只能用一条线段来表示一条完整的直线.

如图 1 - 2 中三个平行四边形分别表示水平位置、竖直位置、倾斜位置的平面.

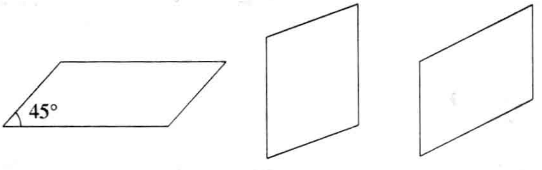


图 1 - 2

通常在画表示水平放置的平面的平行四边形时,要使它的锐角等于 45°,长边画成短边的两倍,这样更形象、直观.平面除了可以用平行四边形来表示外,也可以用三角形、其他四边形、圆或不规则平面图形表示.如图 1 - 3.

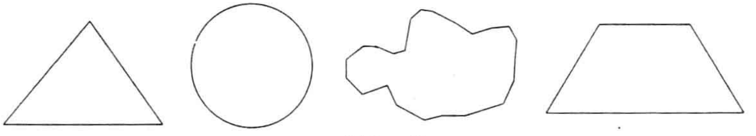


图 1 - 3

三棱锥中的底面是用三角形表示的,圆锥中的底面是用圆表示的.如图 1 - 4.

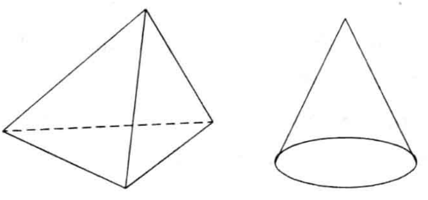


图 1 - 4

如果同时画几个平面，被遮挡的平面应用虚线(或不画)来表示，如图 1 - 5. 在立体几何中，只有被平面遮住部分的线段画成虚线，解题过程中添加的辅助线，如果不是被遮住的，也画成实线. 这是与平面几何画图的不同之处，要予以注意.

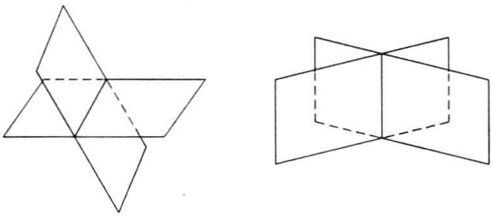


图 1 - 5

表示一个平面的方法，通常用一个字母，如平面 α，平面 M；也可以用平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC.

2 实例引航 举一反三

例 1 观察图 1 - 6 中两个相同的图形，说明它们的位置有什么不同.

解析 根据虚线表示被遮挡的部分，可以判断出平面 $ABCD$ 是离我们较近的面. 因此，这两个图形在面向我们的方向，前后恰好相反.

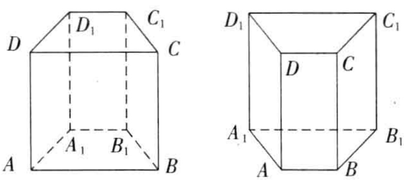


图 1 - 6

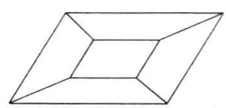


图 1 - 7

例 2 判断图 1 - 7 是平面图形还是空间立体图形.

解析 乍一看，如果认为它一定是平面图形，这是受思维定势的影响. 其实，它既可能是平面图形，也可能是一个空间图形的直观图. 如果它表示一个空间图形，那么小平行四边形是在前面还是在后面呢？一时又无法辨别. 这两种情况都有可能，问题在于图的立体感不强，怎么办？

我们可以想象一下实物模型，再去观察物体. 添加一点辅助元素，以此为衬托，问题就清楚了.

如图 1 - 8(甲)所示，小平行四边形就凸向前面；

如图 1 - 8(乙)所示，小平行四边形就凹向后面.

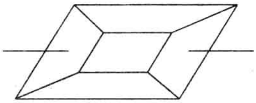


图 1 - 8(甲)

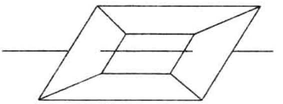


图 1 - 8(乙)

3 实战演练 学以致用

1. 判断下列语句是否正确,为什么?

(1)一个平面的长是 4 m,宽是 2 m.

(2)10 个平面重叠在一起比 5 个平面重叠在一起要厚.

(3)菱形的面积是 4 cm^2.

(4)一个平面把空间分成两部分.

2. 用虚线画出图 1 - 9 中看不到的线.

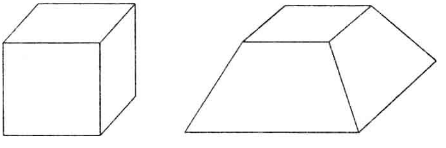


图 1 - 9

参考答案 KEY

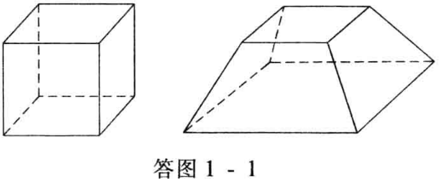
1. (1)不正确. 因为数学中所说的"平面"是无限延展的,没有大小.

(2)不正确. 平面在空间没有厚薄,只有位置.

(3)正确. 菱形是平面图形,可以有面积.

(4)正确. 平面在空间是无限延展的.

2. 如答图 1 - 1.



答图 1 - 1

第二节　平面的基本性质

1 知识点击　循序渐进

一、平面的三条公理

研究空间的性质和研究平面图形的性质一样,也是依据一些公理作为推理的基础,然后由公理和定义推出新的定理,依此推导下去. 平面的基本公理是一组公理,它一方面揭示了平面的基本性质,另一方面也可以用来约定平面的意义,即分别描述了平面的“平、无限、连续”,它们和平面几何中给出的有关直线的公理一起构成立体几何知识的基础.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内(这时说“直线在平面内”或“平面经过直线”).

公理 1 揭示了空间一条直线和一个平面的公共点只可能是 0 个、1 个或无数个,不可能存在直线与平面有且只有两个公共点的情况,除非这条直线“不直”或这个平面“不平”. 如图 1 - 10.

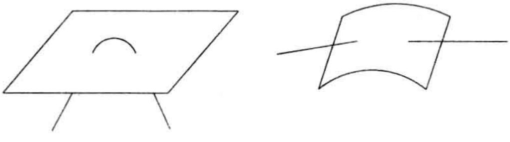


图 1 - 10

公理 1 提供了判定直线在平面内的依据,也就是说不需要也不可能逐一去检查直线上的所有点是否在某个平面内,而只须确定直线上的任意两点是否在这个平面内. 如果是,那么整条直线就全部在这个平面内.

同时,公理 1 告诉我们:“直线在平面内”不应该画成图 1 - 11(甲)所示的直线有一部分露在平面外的图形,而应画成图 1 - 11(乙)的形式.

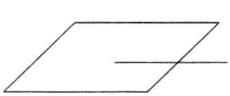


图 1 - 11(甲)

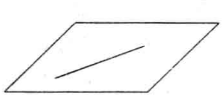


图 1 - 11(乙)

用集合的关系符号表示点、线、面的关系. 点 A 在直线 a 上,记作 $A\in a$;点 A 在直线 a 外,记作 $A\notin a$;点 A 在平面 α 内,记作 $A\in\alpha$;点 A 在平面 α 外,记作 $A\notin\alpha$;直线 a 在平面 α 内,记作 $a\subset\alpha$;直线 a 不在平面 α 内,记作 $a\not\subset\alpha$.

公理 2 如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

公理 2 揭示了平面的无限延展性,也就是说两个平面不可能恰有一个或有限多个公共点. 同时,公理 2 也提供了判定两个平面相交于一条直线以及确定这条直线的位置的依据. 例如:若能判定点 A 和点 B 既在平面 α 内,又在平面 β 内,那么便可以判定直线 AB 就是平面 α 与平面 β 的交线了. 我们经常用公理 2 来确定平面与平面的交线,以及确定一个平面截一个多面体所得截面的形状等.

对于公理 2,还可以这样理解:① 两个平面的公共点必定在公共交线上;② 公共交线上的点一定是公共点;③ 不是公共点一定不在公共交线上;④ 不在公共交线上的点一定不是公共点. 依此可以证明点共线和线共点问题.

如果两个平面 α 和 β 有一条公共交线 a,就说 α 与 β 相交于直线 a,记作 $\alpha\cap\beta=a$. 画两个相交平面时,一般先画交线. 如图 1 - 12.

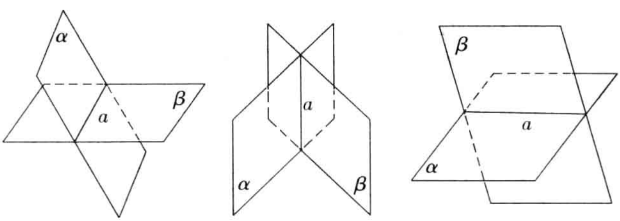


图 1 - 12

由公理 2 可知,如果两个平面除了一条公共直线外,还有一个不在公共直线上的公共点,那么这两个平面就只能重合成一个平面. 于是,有下面公理:

公理 3 经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面.

"有且只有一个"有两层含义:"有"表示存在,"只有一个"表示唯一,即表示存在并且唯一. 这就表示这个图形是确定的,所以也可以说成"确定一个".

公理 3 说明了"不共线的三点"是确定一个平面的恰到好处的条件,它的实际应用也是很广的. 如图 1 - 13 中的小平板仪的撑脚架、商代的铜鼎,都制成三个脚,三个脚与地面接触的一端,就相当于不在一

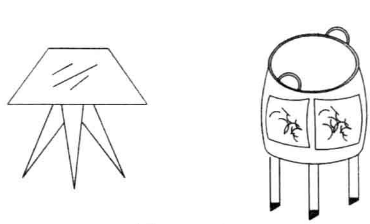


图 1 - 13

条直线上的三个点,可以确定一个平面. 因此,即使地面不平,这些物体也可以被放置得很平稳.

由上述三个公理,我们可以用逻辑推理的方法,推导出确定平面的三条定理.

二、确定平面的三条定理

定理 1　经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

已知:直线 a 和直线 a 外的点 A.

求证:直线 a 和点 A 确定一个平面.

证明:(存在性)　在直线 a 上任取两点 B 和 C,如图 1 - 14.

$\because$ A,B,C 三点不在一直线上,

$\therefore$ A,B,C 确定一个平面 α.

$\therefore$ 直线 a 在平面 α 内.

即过直线 a 和点 A 有一个平面 α.

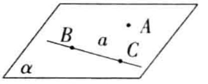


图 1 - 14

(唯一性)　如果过直线 a 和点 A 还可以作另一平面 β,则 A,B,C 三点又都在平面 β 内.

这样,过不共线的三点有两个平面 α 和 β,这与公理 3 矛盾,即假设不成立.

因此,过直线 a 和直线 a 外一点 A 确定一个平面.

定理 2　经过两条相交直线,有且只有一个平面.

已知:直线 a,直线 b,$a\cap b=A$.

求证:直线 a,b 确定一个平面.

证明:(存在性)　分别在直线 a,b 上取异于 A 点的 B,C 两点(如图 1 - 15),则过 A,B,C 三点有一个平面 α.

$\because$ A,B 在平面 α 内,$\therefore$ 直线 a 在平面 α 内.

同理可证,直线 b 也在平面 α 内.

即过直线 a,b 有一个平面 α.

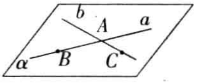


图 1 - 15

(唯一性)　假设过直线 a,b 还有一个平面 β,则 A,B,C 三点又都在平面 β 内.

这样,过 A,B,C 不共线三点有两个平面,与公理 3 矛盾,假设不成立.

因此直线 a,直线 b 确定一个平面.

定理 3　经过两条平行直线,有且只有一个平面.

已知:直线 a,直线 b,$a/\!/b$.

求证:直线 a,b 确定一个平面.

证明:(存在性)　根据平面几何中关于平行线的定义,可以判定过两条平行的直线 a 和 b 有一个平面 α,如图 1 - 16.

(唯一性)　如果过直线 a,b 还有一个平面 β,

设 A 是直线 b 上任一点，则 A 不在直线 a 上，

那么过点 A 和直线 a 有两个平面，与定理 1 矛盾，

假设不成立.

即过直线 a 和直线 b 有且只有一个平面.

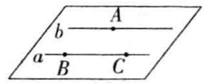


图 1 - 16

公理 3 及三个定理在生产和生活实践中应用是十分广泛的. 例如：要起吊重物，常常把吊装绳放在如图 1 - 17 所示的几种位置，这样起吊就平稳.

公理 3 及三个定理是点线共面或由已知点线确定平面的主要依据，确定平面是将空间问题转化为平面图形问题的重要前提，同时也是证明两个平面重合的依据.

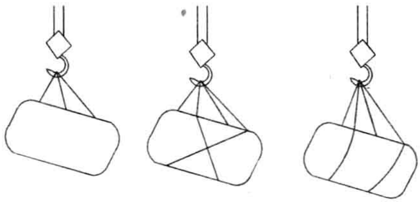


图 1 - 17

2 实例引航 举一反三

例 1 不共面的四点可以确定几个平面？ C_4^3

分析 这个问题中确定平面的个数，是指给出的几何图形所构成的集合及其子集所确定的平面数的总和. 解题根据就是公理 3 及三个定理，解答时要做到全面、合理、不重不漏.

解：设四个点构成集合 $M=\{A,B,C,D\}$，所确定的平面是指集合 M 及其子集所确定的平面.

当 A,B,C,D 四点不共面时，经过四点的平面是不存在的，而 $\{A,B,C\}$，$\{A,B,D\}$，$\{B,C,D\}$，$\{A,C,D\}$ 各可以确定一个平面.

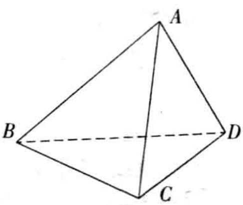


图 1 - 18

所以空间不共面的四点，可以确定四个平面，如图 1 - 18 所示. 由这四个平面围成的几何体，我们称之为四面体.

说明 如果将问题改为：过四点(其中无任何三点共线)能确定几个平面？解决这个问题需要讨论：

(1)当四点共面时，只能确定一个平面；

(2)当四点不共面时,这四个点共确定四个平面.

一般地,如果空间有 n 个点($n\geqslant3$),且其中没有四点或多于四点在同一平面内,问最多可确定多少个平面?对于这个问题可以这样考虑:不在同一直线上的三点可以确定一个平面,若任三点确定的平面都不重合,那么最多确定的平面数应等于从 n 个点中任选三点的组合数,即 C_n^3.

例 2 求证:两两相交且不都过同一点的四条直线共面.

已知:l_1,l_2,l_3,l_4 两两相交且不过同一点. 求证:l_1,l_2,l_3,l_4 四线共面.

分析 因为四条直线不共点,所以它们的位置关系可以分成三条直线共点和无三条直线共点两种情况研究.

证明:1. 当无三条直线共点时,如图 1 - 19.

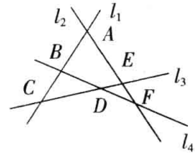


图 1 - 19

方法 1:由 $l_1\cap l_2=A$ 知 l_1,l_2 确定一个平面 α.

又由 $C\in l_1,l_1\subset\alpha$ 知 $C\in\alpha$.同理,$E\in\alpha$.

又 $C,E\in l_3$, $\therefore$ $l_3\subset\alpha$. 同理,$l_4\subset\alpha$.

综上可知,l_1,l_2,l_3,l_4 共面.

方法 2:由 $l_1\cap l_2=A$ 知 l_1,l_2 确定一个平面 α.

同理,l_3,l_4 确定平面 β,又由 $B\in l_4,l_4\subset\beta$ 知 $B\in\beta$.

同理,$C\in\beta$,$E\in\beta$. 同理,$B,C,E\in\alpha$.

即 α,β 都是过 B,C,E 三点的平面,而 B,C,E 不在同一直线上,则过 B,C,E 的平面只有一个,故 α 与 β 重合,即 l_1,l_2,l_3,l_4 共面.

2. 当有三条直线交于一点时,如图 1 - 20.

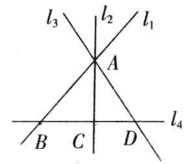


图 1 - 20

方法 1:由 $l_1\cap l_2=A$ 知 l_1,l_2 确定一个平面 α.

由 $B\in l_1,l_1\subset\alpha$ 知 $B\in\alpha$. 同理,$C\in\alpha$.又 $B,C\in l_4$,故 $l_4\subset\alpha$.

又由 $D\in l_4$ 知 $D\in\alpha$. 又 $A,D\in l_3$,故 $l_3\subset\alpha$.

综上可知,l_1,l_2,l_3,l_4 共面.

方法 2:由 $l_1\cap l_3=A$ 知 l_1,l_3 确定一个平面 α.

同理,l_2,l_4 确定一个平面 β.

又由 $A,B\in l_1,D\in l_3$ 知 $A,B,D\in\alpha$.

同理,$A,B,D\in\beta$. 即过 A,B,D 有两个平面.

而 A,B,D 不在同一直线上,则过 A,B,D 的平面只有一个.

故 α 与 β 重合,即 l_1,l_2,l_3,l_4 重合.

说明 证明点线共面问题,常用的方法有两种.

(1)归一法. 先根据题设中点和直线中的某些元素确定一个平面,再证其余的点、线在这个平面内. 如方法 1.

(2)重合法. 在给定的点和直线中,分别由部分元素确定两个或两个以上平面(这些平面必须包括要证共面的所有点、线),然后再证这些平面重合. 如方法 2.

而证明共面问题常常需要证明“直线在平面内”和“点在平面内”,往往利用公理 1,有时也采用反证法.

例 3 如果三条平行线都与一条直线相交,那么这三条平行线共面.

已知:如图 1 - 21,$a/\!/b/\!/c$,且 $d\cap a=E,d\cap b=F,d\cap c=G$.

求证:直线 a,b,c,d 在同一平面内.

解析 **分析 1:**要证 d 与 a,b,c 共面,可先证 d 与 a,b 共面、b 与 c 共面,再证两面重合.

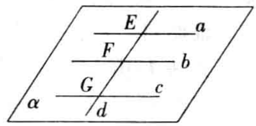


图 1 - 21

证法 1:$\because a/\!/b,\therefore$ 过 a,b 有一个平面 α.

$\because a,b$ 与 d 交于 E,F,且 $E,F\in\alpha,\therefore d\subset\alpha$.

又 $b/\!/c,\therefore$ 过 b,c 有一个平面 β.

$\because b,c$ 与 d 交于 F,G,且 $F,G\in\beta,\therefore d\subset\beta$.

于是 α,β 内都有直线 b,d,且 $b\cap d=F$.

由定理 2,过两条相交直线有且只有一个平面,则 α 与 β 重合.

$\therefore a,b,c,d$ 共面.

分析 2:同方法 1,先证 d 在由 a,b 确定的平面 α 内,再用反证法证明 c 在 α 内.

证法 2:如图 1 - 22,$\because a/\!/b,\therefore a,b$ 确定一个平面 α.

$\because a,b$ 与 d 交于 E,F,且 $E,F\in\alpha,\therefore d\subset\alpha$.

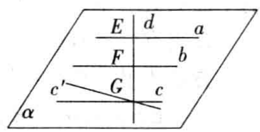


图 1 - 22

假设直线 c 不在 α 内,即 $c\not\subset\alpha$.

$\because G\in d,\therefore G\in\alpha.\therefore$ 过点 G 在 α 内可作 $c'/\!/b$.

故过直线 b 外一点 G 不可能作两条直线 c,c' 都平行于 b.

$\therefore c\subset\alpha$.于是 a,b,c,d 共面.

例 4 如图 1 - 23,长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$C_1D_1,D_1D,DA,AB,BB_1,B_1C_1$ 的中点分别为 P,Q,R,L,M,N. 试证:P,Q,R,L,M,N 在同一平面内.

解析 **分析 1:** 由于过平面外一点能且只能作一个平面与已知平面平行,若能证得 LP,RN,MQ 都相交于长方体的中心 O,而且这些相交线确定的平面既过此点,又与某平面(如平面 BC_1D)平行,即得证.

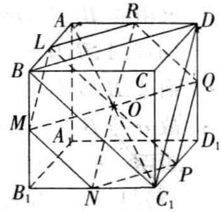


图 1 - 23

证法 1:设长方体的中心为 O,则 O 是长方体对角线 AC_1 的中点.

$\because AL\underline{\underline{/\!/}}C_1P,\therefore$ 四边形 ALC_1P 为平行四边形,且对角线 AC_1,LP 交于长方体的中心 O.