



中学生智力开发丛书

# 初中数学的知识结构·方法·能力

陈书樵 喻志强 编  
邬牛德 贺孝友

东北师范大学出版社

中学生智力开发丛书

# 初中数学的知识 结构·方法·能力

陈书樵 喻志强 编  
邬牛德 贺孝友

东北师范大学出版社

中学生智力开发丛书

初中数学的知识结构·方法·能力

CHUZHONG SHUXUE DE ZHISHI  
JIEGOU · FANGFA · NENGLI

陈书樵 喻志强 邬牛德 贺孝友 编

---

责任编辑：李殿国 封面设计：李步云 责任校对：邬牛德

东北师范大学出版社出版  
(长春市斯大林大街110号)

吉林省新华书店发行  
湖南省醴陵印刷厂印刷

---

开 本：787×1092毫米1/32  
印 张：6.625  
字 数：150千

1989年2月第1版  
1989年2月第1次印刷  
印 数：1—18000册

---

ISBN7—5602—0267—5/G·101 定价：1.80 元

# 前 言

怎样指导初中三年级的学生在时间短、内容多的情况下进行数学总复习？这是一个值得研究的课题。广大初中数学教师希望能得到一本既方便教师的“教”又方便学生的“学”，具有指导性、实用性的复习用书。《初中数学的知识结构·方法·能力》一书的编写就是为解决这一问题而进行的一些探索与尝试。

本书编写的指导原则是：以“纲”为纲，紧扣教材，注重双基，难易恰当，内容力求精要，题型力求新颖，方法力求灵活，融教师的教案、学生的练习册和考试的考卷于一体。

全书分代数、几何两大部份，共安排了五十六个课时，采用单元结构复习法。代数部份分为十四个单元，几何部份分为八个单元。每个单元由“知识结构”、“复习建议”、“范例精选”、“单元练习”四个部份组成。在落实双基上，注重指导学生对每单元的知识进行“梳辫子、理脉络”，在灵活运用上，注重总结解题方法，阐述解题规律，揭示解题思路，从而培养学生运用基础知识灵活地分析和解决问题的能力，开发学生的智力。此外，代数、几何两大部份还各编拟了两套“自我检测题”和一套“综合练习题”，都突出了“双基”和“活用”四个字。

这本书是指导复习教学的用书，由于编者的教学实践经验不足，水平有限，不当之处敬请读者指正。

编者

一九八九年一月

# 目 录

## 代 数 部 分

|          |                   |       |
|----------|-------------------|-------|
| 第一单元     | 实数                | (1)   |
| 第二单元     | 整式                | (4)   |
| 第三单元     | 因式分解              | (9)   |
| 第四单元     | 分式                | (15)  |
| 第五单元     | 根式                | (24)  |
| 第六单元     | 一元一次和一元二次方程       | (31)  |
| 第七单元     | 可化为一元一次和一元二次方程的方程 | (38)  |
| 第八单元     | 方程组               | (46)  |
| 第九单元     | 列方程(组)解应用题        | (53)  |
| 自我检测题(一) |                   | (63)  |
| 第十单元     | 不等式               | (66)  |
| 第十一单元    | 指数和对数             | (72)  |
| 第十二单元    | 函数及其图象            | (79)  |
| 第十三单元    | 解三角形              | (88)  |
| 第十四单元    | 统计初步              | (98)  |
| 自我检测题(二) |                   | (101) |
| 综合练习题(甲) |                   | (104) |

## 几 何 部 分

|      |          |       |
|------|----------|-------|
| 第一单元 | 命题和定理的证明 | (110) |
|------|----------|-------|

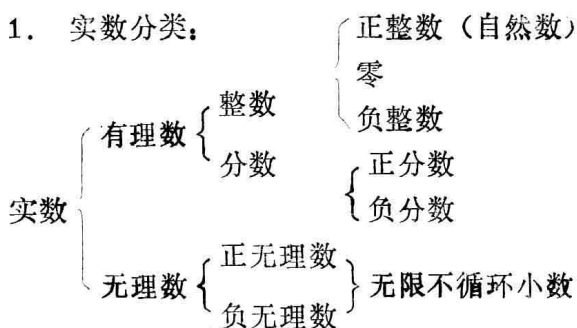
|          |               |              |
|----------|---------------|--------------|
| 第二单元     | 平行线           | (116)        |
| 第三单元     | 三角形           | (122)        |
| 第四单元     | 特殊四边 <b>形</b> | (138)        |
| 第五单元     | 相似三角形         | (146)        |
| 自我检测题    | (三)           | (155)        |
| 第六单元     | 几何图形的面积       | (158)        |
| 第七单元     | 圆             | (165)        |
| 第八单元     | 轨迹与作图         | <b>(188)</b> |
| 自我检测题    | (四)           | (195)        |
| 综合练习题    | (乙)           | (199)        |
| 综合练习题(乙) | 答案与提示         | (205)        |

# 代数部分

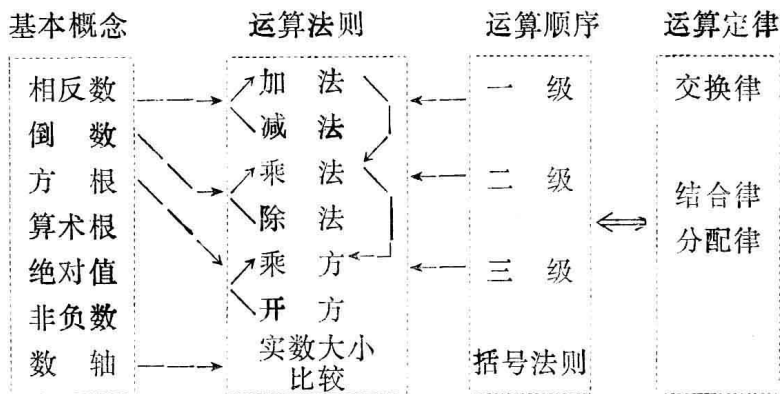
## 第一单元 实数

### 一 知识结构

#### 1. 实数分类:



#### 2. 结构框架:



### 二 复习建议

请按教材叙述要求, 加深理解基本概念, 切实掌握好实

数运算法则. 通过上面的知识结构框架图, 掌握好各部分知识之间的关系及相互转化, 如引入相反数则转减为加, 引入倒数则转除为乘, 方根概念则将开方运算转为乘方运算, 连加则为乘, 连乘则为乘方. 六种运算分为三级, 运算顺序由高级到低级, 而运算律则可有效地改变运算顺序.

本节可安排两节复习课, 第一节可由师生双边活动共同回忆、查对, 理顺基本概念和知识结构, 并通过例1和后面的练习进行巩固. 第二节主要是提高运算能力. 通过一定量的作业训练, 则可达到熟练进行实数运算目的.

### 三 范例精选

**例1** 写出下列各数的相反数、倒数、绝对值, (1)  $-7$

$$(2) 0.\dot{2}\dot{9} \quad (3) \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} \quad (4) \sqrt{3}-2$$

**解** (1)  $-7$ 的相反数、倒数、绝对值分别是 $7, -\frac{1}{7}, 7$ .

(2) 先将 $0.\dot{2}\dot{9}$ 化为分数,  $0.\dot{2}\dot{9} = \frac{29}{99}$ , 则 $0.\dot{2}\dot{9}$ 的相反

数、倒数、绝对值分别是:  $-\frac{29}{99}, \frac{99}{29}, \frac{29}{99}$ .

(3)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ 的相反数、倒数、绝对值分别是:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}, -2(\sqrt{2}+\sqrt{3}), \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

(4)  $\sqrt{3}-2$ 的相反数、倒数、绝对值分别是 $2-\sqrt{3}, -(\sqrt{3}+2), 2-\sqrt{3}$ .

**例2** 计算:  $-(-3)^3 \times (2)^2 + (-6)^2 \times (-\frac{5}{6})$

$$-(-\frac{1}{8}) \div (-\frac{1}{2})^3$$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= -(-27) \times 4 + (-6) \times 5 - \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) \\ &= 108 - 30 - 1 = 77\end{aligned}$$

**例3** 计算:  $\left(\frac{\sqrt{20}}{8} - \frac{5}{\sqrt{45}} - \frac{1}{3 - \sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}$

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \left(\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{3\sqrt{5}} - \frac{3 + \sqrt{5}}{4}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \\ &= \left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{9\sqrt{5}}{20} - 1 \\ &= -\frac{20 + 9\sqrt{5}}{20}\end{aligned}$$

#### 四 单元练习

##### 1. 填空题:

(1) 若字母 $\alpha$ 表示非零实数, 那么 $\alpha$ 的相反数是\_\_\_\_,  $\alpha$ 的倒数是\_\_\_\_\_.

(2) 如果 $|m - 1| = 1 - m$ , 那么 $m$ 的值应该是\_\_\_\_\_.

(3) 如果 $\alpha$ 的倒数是 $1 - \sqrt{2}$ , 那么 $\alpha$ 的相反数是\_\_\_\_\_.

(4) 如果 $|a + 1| + |b - 2| = 0$ , 那么 $a^b =$ \_\_\_\_\_.

(5) 若 $m, n$ 互为相反数, 则 $m + n =$ \_\_\_\_\_.

(6) 若 $m, n$ 互为倒数, 则 $m \cdot n =$ \_\_\_\_\_.

(7) 相反数等于它本身的数是\_\_\_\_\_, 倒数等于它本身的数是\_\_\_\_\_, 绝对值等于它本身的数是\_\_\_\_\_.

(8) 一个数的相反数比这个数大, 这个数是\_\_\_\_\_. 一个数的倒数比这个数大, 这个数是\_\_\_\_\_, 一个数的绝对值比这个数大的是\_\_\_\_\_.

(9) 在  $3.1416$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $-\frac{2}{3}$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $0$  中, 是有理数的有 \_\_\_\_\_, 是无理数的有 \_\_\_\_\_.

(10) 和数轴上的点一一对应的数是 \_\_\_\_\_.

(11) 若  $a < -2$ , 那么  $|1 + |1 + a||$  去掉绝对值符号后, 其结果是 \_\_\_\_\_.

(12) 如果  $a < b < 0$ , 那么  $\frac{1}{a}$  与  $\frac{1}{b}$  大小关系是 \_\_\_\_\_.

2. 计算:

$$(1) -3^2 \times (-1.2)^2 + (-0.3)^3 + (-\frac{1}{3})^2 \div (-1)^{27}$$

$$(2) |(-5)^3(0.24)^2| \times (-5)^2 + (1\frac{2}{3}) + (-1)^{2n-1}$$

( $n$  是整数)

$$(3) \sqrt{3} + \sqrt{12}$$

$$(4) \sqrt{4^2 \times (-9)^2}$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3.  $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$  的整数部分是  $a$ , 小数部分是  $b$ , 求

$a + b + \frac{2}{b}$  的值.

4. 求证: 若两个实数互为倒数, 那么它们的和的倒数与倒数的和也互为倒数.

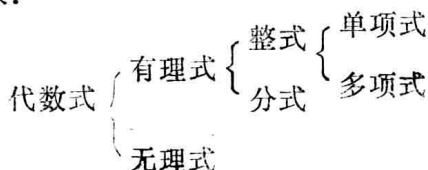
5. 证明  $\sqrt{2}$  不是有理数, 并作图在数轴上找到表示  $\sqrt{2}$  的点.

## 第二单元 整 式

### 一 知识结构:

#### 1. 基本概念及分类:

(1) 代数式 (2) 代数式的值 (3) 分式 (4) 整式  
(5) 无理式 (6) 单项式 (7) 多项式 (8) 同类项 (9) 整式的次数.



## 2. 基本方法:

(1) 合并同类项法则 (2) 去括号法则 (3) 添括号法则 (4) 加减运算法则 (5) 幂的运算法则 (6) 整式乘法法则: 单项式乘单项式; 单项式乘多项式; 多项式乘多项式 (7) 整式除法法则: 单项式除以多项式; 多项式除以单项式; 多项式除以多项式 (用竖式进行).

## 3. 基本公式:

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^n)^m = a^{mn}; (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(2) \text{乘法公式: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

## 二 复习建议

代数式的出现是数学发展的一个转折点. 有了字母表示数, 则出现了代数学, 它是对实数的再次抽象和概括. 所以, 整式运算是一切数学运算的基础, 是重点内容. 复习时可与实数运算进行对比, 以求达到知识的正迁移. 对这一节的基本概念, 要理解透彻, 法则要掌握牢固, 运算要达到准确熟练, 基本公式会利用法则推导.

本单元建议用两课时复习: 第一课时在理顺知识结构的

基础上,通过例1例2使读者基本掌握整式运算要领;第二课时重点是除法,同时要注意防止整式运算中的常见错误,如混淆指数和系数的不同处理法则,例:  $3a^4 \cdot 4a^2 = 12a^8$  等.

### 三 范例精选

**例1** (选择题) 下列等式成立的是:

- (A)  $3a + 2b = 5ab$       (B)  $4m^2n - 5mn^2 = -m^2n$   
 (C)  $3x^2 \cdot 2x^3 = 6x^6$       (D)  $4a^3b + (-2a^2b) = -2a$

**分析** 在进行整式运算时,必须弄清所含字母相同,并且相同字母的指数也分别相同的项才叫同类项. (A) 中的两项所含字母不同, (B) 中的两项虽所含字母相同,但这些字母的指数不同,它们都不能进行合并. 另外应注意同底数幂相乘,其指数相加,而不是相乘,则答案(C)也是错的.

**解** 根据以上分析应选择 (D)

**例2** 计算: (1)  $a^3 \cdot a^3 (a^3 + a^3)^3$

$$(2) (3 - 7x)(3x^2 - 5x + 2)$$

**解** (1) 原式  $= a^6 (2a^3)^3 = a^6 \cdot 8a^9 = 8a^{15}$

$$(2) \text{原式} = 9x^2 - 21x^3 - 15x + 35x^2 + 6 - 14x \\ = -21x^3 + 44x^2 - 29x + 6$$

**例3** 先化简再求值:

$$(3x+1)(2x-3) - (6x-5)(x-4) \quad \text{其中} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= 6x^2 - 7x - 3 - (6x^2 - 29x + 20) \\ &= 6x^2 - 7x - 3 - 6x^2 + 29x - 20 \\ &= 22x^2 - 23 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{当} x = -\frac{1}{2} \text{时} \quad \text{原式} = 22 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 23 = -34$$

**例4** 计算: (1)  $a^{n-1}(a^{3n})^2 - 2a^{8n} \div \left(-\frac{1}{2}a^{n+1}\right)$

$$(2) (x^4 - 3x) + (3 - x^2)$$

**解** (1) 原式 =  $a^{n-1} a^{6n} + 4a^{7n-1}$

$$= a^{7n-1} + 4a^{7n-1} = 5a^{7n-1}$$

$$\begin{array}{r}
 -x^2 + 3 \sqrt{\begin{array}{r} -x^2 \quad -3 \\ x^4 + 0 + 0 - 3x + 0 \\ -x^4 \quad -3x^2 \\ \hline 3x^2 - 3x + 0 \\ 3x^2 \quad -9 \\ \hline -3x + 9 \end{array}}
 \end{array}$$

∴ (2) 运算的结果是商式为  $-x^2 - 3$ , 余式为  $-3x + 9$

**例 5** 一个多项式除以  $x^2 - 4x + 1$ , 商式为  $x + 1$ , 余式为  $3x + 1$ , 求这个多项式.

**解** 根据: 被除式 = 除式  $\times$  商式 + 余式

$$\therefore \text{这个多项式} = (x^2 - 4x + 1)(x + 1) + 3x + 1$$

$$= x^3 - 4x^2 + x + x^2 - 4x + 1 + 3x + 1$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2$$

#### 四 单元练习

1. 填空:

(1)  $-\frac{4a^2b}{7}$  是 \_\_\_\_\_ 次单项式, 它的系数是 \_\_\_\_\_

(2)  $3x^2 - x + \frac{1}{2}$  是 \_\_\_\_\_ 次 \_\_\_\_\_ 项的多项式.

(3)  $a$ 、 $b$  两数的乘积与  $b$  的平均数等于  $a$  ( $b \neq 2$ ), 则用  $b$  表示  $a$  有  $a =$  \_\_\_\_\_.

(4) 多项式  $(x^3 + 2x^2 - a)$  能被  $x - 2$  整除, 则  $a =$  \_\_\_\_\_

(5) 如果  $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y + 3 = (x + my + 3)(x + y + n)$ , 那么  $m =$  \_\_\_\_\_,  $n =$  \_\_\_\_\_.

(6)  $x, y$  为实数, 且  $\sqrt{x - 2} + |y + 1| = 0$ , 则  $y^x =$  \_\_\_\_\_

(7) 表示 “ $a$ 、 $b$  两数的差的平方与  $a$ 、 $b$  两数平方差的

积”的代数式是\_\_\_\_\_.

(8) 已知当 $x = -2$ 时, 代数式 $ax^3 + bx - 7$ 的值是5, 那么当 $x = 2$ 时, 该代数式的值是\_\_\_\_\_.

2. 先化简再求代数式的值, 其中 $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = -3$

$$-y(6y+1) - (x-2y)y - 2x(2y-x) - (x-5y)(x+y)$$

3. 利用乘法公式计算:

$$(1) (x-2y)(-x-2y) - (x-2y)(2y-x) \\ - (x-2y)(y+2x)$$

$$(2) (1-x-y)(-1-x-y)$$

$$(3) (a-2b)^2(a+2b)^2$$

$$(4) x^2 - 2x(1-x^2) - (x+1)^2 2x - (x-1)(x^2+x+1)$$

4. 已知:  $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ , 求代数式 $x^2 - 4x + 1$ 的值.

5. 计算:

$$(1) 4a^{2n+1} \div \left(-\frac{3}{4}a^{n-1}\right)(-6a)^2$$

$$(2) (a^2)^3 \div (-7a^3)$$

$$(3) (3x^3 + 10x^2 + 13x - 27) \div (x^2 + 2x - 3)$$

$$(4) (2x^2 + x^3 - 2) \div (x^2 - 1)$$

6. 在代数式 $ax^2 + bx + c$ 中, 当 $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ 时, 代数式的值分别是12, 25, 20, 求这个代数式.

7. (1) 多项式 $A$ 除以 $x^2 - 2x + 1$ 所得商式为 $x^2 + 2x - 1$ , 余式为 $4x - 3$ , 求 $A$ .

(2) 多项式 $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ 除以多项式 $B$ , 所得商式为 $x^2 + 3x + 2$ , 余式为 $x - 2$ , 求 $B$ .

(3) 已知:  $2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 + 2x + 3$ 整除, 求商式及 $a$ 、 $b$ 的值.

8. 已知:  $A = 9x^4 - 21x^3 - 2x^2 + 11x - 2$

$$B = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 1$$

$$\text{求 } A^2 + B^2 \left[ A^2 + B^2 = \left( \frac{A}{B} \right)^2 \right]$$

9. 如果  $x + y + z = a$ ,  $xy + yz + zx = b$ ,  $a, b$  为已知, 求  $x^2 + y^2 + z^2$  的值.

## 第三单元 因式分解

### 一 知识结构

#### 1. 基本概念:

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做因式分解.  
与乘法正好相反.

#### 2. 基本方法:

(1) 提取公因式法 (2) 应用公式 (3) 分组分解法  
(4) 二次三项式的因式分解: 十字相乘; 配方法; 求根法.

#### 3. 基本公式: 乘法公式的反写.

#### 4. 一般技巧:

(1) 一般思维步骤: 一提(提公因式) 二套(套公式) 三分组.

(2) 二项式型注意套公式:  $a^2 - b^2$ 、 $a^3 \pm b^3$

(3) 三项式可考虑套公式和二次三项式的其它分解方法.

(4) 多于三项的考虑分组和换元. 分组时必须预见到下一步分解的可能性.

## 二 复习建议

因式分解是整式恒等变形的一类，是整式乘法的逆变形，务必确实理解它的意义及目的，同时还要准确掌握分解彻底这一要求。四种基本方法必须熟练掌握，要通过一定数量的训练题，达到灵活地综合运用这四种方法。

十字相乘法大纲不作要求，但作为一种简捷方法应该掌握，以利实战。

分解彻底一般是指有理数范围内分解彻底，但由于教材是逐步深入发展的，所以初中应达到在实数范围内分解因式。

本单元建议复习二课时，第一课时是重点掌握基本方法，第二课时是掌握一些技巧，发展能力。

## 三 范例精选

**例1** 分解因式：(1)  $6a^2b + 3ab + 3a$

$$(2) -12x^{2n}y^n + 18x^n y^{n-1}$$

$$(3) 5(y-x) - 20(x-y)^2 - 20(x-y)^3$$

**解** (1) 原式  $= 3a(2ab + b + 1)$

$$(2) \text{原式} = -6x^n y^{n-1}(2x^n y - 3)$$

$$\begin{aligned}(3) \text{原式} &= 5(y-x) - 20(y-x)^2 + 20(y-x)^3 \\ &= 5(y-x) [1 - 4(y-x) + 4(y-x)^2] \\ &= 5(y-x) [2(y-x) - 1]^2\end{aligned}$$

**例2** 分解因式：(1)  $0.125x^3 - 8y^3$

$$(2) m^6 - 64$$

**解** (1) 原式  $= \left(\frac{x}{2}\right)^3 - (2y)^3$

$$= \left(\frac{x}{2} - 2y\right) \left(\frac{x^2}{4} + xy + 4y^2\right)$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= (m^3)^2 - 8^2 = (m^3 + 8)(m^3 - 8) \\ &= (m+2)(m^2-2m+4)(m-2)(m^2+2m+4)\end{aligned}$$

**例3** 分解因式: (1)  $8a^2b^2 - 2a^4b - 8b^3$

(2)  $x^6 + 26x^3 - 27$  (3)  $a^4 - 9a^2b^2 + 20b^4$

**解** (1) 原式  $= -2b(a^4 - 4a^2b + 4b^2)$

$$= -2b(a^2 - 2b)^2$$

(2) 原式  $= (x^3 - 1)(x^3 + 27)$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

(3) 原式  $= (a^2 - 5b^2)(a^2 - 4b^2)$

$$= (a + \sqrt{5}b)(a - \sqrt{5}b)(a + 2b)(a - 2b)$$

**注意:** 将  $a - 2b = (\sqrt{a} + \sqrt{2b})(\sqrt{a} - \sqrt{2b})$  一直分解的错误,  $\sqrt{a} + \sqrt{2b}$  已不是整式.

**例4** 分解因式:

(1)  $4x^2 - y^2 + 2y - 1$  (2)  $x^2 - y^2 - 1 + xy^2$

(3)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  (4)  $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 2y - 2$

**解** (1) 原式  $= 4x^2 - (y^2 - 2y + 1) = 4x^2 - (y - 1)^2$

$$= (2x - y + 1)(2x + y - 1)$$

(2) 原式  $= (x^2 - 1) + y^2(x - 1)$

$$= (x - 1)(x + 1) + y^2(x - 1)$$

$$= (x - 1)(y^2 + x + 1)$$

(3) 原式  $= (x^3 - 8) - (6x^2 - 12x)$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^3$$

(4) 原式  $= (x - 2y)^2 - (x - 2y) - 2$

$$= (x - 2y - 2)(x - 2y + 1)$$

**例5** 分解因式:  $ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$

**分析** 原式一不能提取公因式, 二无公式可套, 已经是二项式形式, 分组也不可能, 所以如果不将每一项展开将无法进行分解. 本式展开后共有4项, 将它们重新组合后有可