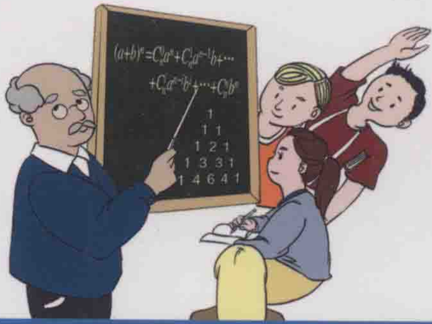


数林外传系列

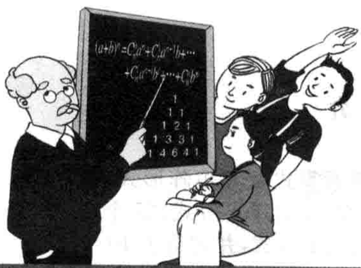
跟大学名师学中学数学

微微对偶不等式及其应用

第2版

◎张运筹 编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

微微对偶不等式及其应用

第2版

◎ 张运筹 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书的主要内容包括微微对偶不等式及其矩阵形式、证明、应用.全书用全新的方法处理了30个简单不等式、25个高难竞赛题、40个书刊征解题、16个著名不等式,并制造了10个新不等式,处理了4个高考不等式,推广了4个著名不等式,留下了25个练习题(附解答);主要方法是,把一些不等式的证明归结为巧妙地构造一个矩阵,恰当地排出一个矩阵.该书所选的例题、习题都是大家所关注的名题、难题,处理方法却是新的.值得注意的是,在此新方法下,名题更美了,难题不难了.

广大数学爱好者和中学教师,特别是中学数学竞赛培训教师及其培训对象,钻研该书选题和处理方法,定会得到有益的启示.

图书在版编目(CIP)数据

微微对偶不等式及其应用/张运筹编著.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2014.1
(数林外传系列:跟大学名师学中学数学)
ISBN 978-7-312-03360-5

Ⅰ.微… Ⅱ.张… Ⅲ.不等式 Ⅳ.O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第267272号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn
安徽省瑞隆印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:4.625 字数:91千
1989年3月第1版 2014年1月第2版
2014年1月第2次印刷
定价:13.00元

再版前言

在数学里，不等式的内容比起等式来显得更丰富，不等式的处理方法自然也越来越发展，“序”也就越来越引人关注. 有一种有关“序”的向量控制理论，也正在得到广泛应用.

本书试图引起更多的中学师生也来关注“序”，尽量避开高等数学中的内容来介绍一种处理不等式的方法.

微微对偶不等式是许多重要不等式的来源. 微微对偶不等式在追溯老不等式、制造新不等式、处理高难竞赛题方面都具有特殊的效力. 微微对偶不等式的经典是积和 S 与和积 T 的矩阵形式，精华是把一些不等式的证明归结为巧妙地构造一个矩阵，恰当地排出一个矩阵.

为了让读者有更多的机会掌握各种各样的矩阵设计，对新方法产生兴趣，本书尽可能地对每题重新制造矩阵，很少用一个题去做另一个题，尽可能地少用常规方法.

这本小册子着重介绍了微微对偶不等式的应用，但这只是一个起步，作者希望有更多的人写出更多的续篇.

张运筹

2013 年 6 月

目　次

1　微微对偶不等式

1.1　内容和形式

微微对偶不等式是指以下两个不等式：

(1) $\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a'_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij}$；

(2) $\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\geqslant\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$.

分别简称为 S 不等式和 T 不等式. 此处，$0\leqslant a_{i1}\leqslant a_{i2}\leqslant\cdots\leqslant a_{in}$，$a'_{i1}\ a'_{i2}\cdots\ a'_{in}$ 是 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 的任意排列（$i=1,2,\cdots,m$）.

为了便于理解、记忆和应用微微对偶不等式，我们考虑 $m\times n$ 个数排成的两个矩阵（$a_{i1}\leqslant a_{i2}\leqslant\cdots\leqslant a_{in}$，$i=1,2,\cdots,m$）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}&\cdots&a'_{1n}\\a'_{21}&a'_{22}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a'_{m1}&a'_{m2}&\cdots&a'_{mn}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}'$的第 $1,2,\cdots,m$ 行的数,还分别是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $1,2,\cdots,m$ 行的数,只是改变了排列次序.我们称 $\boldsymbol{A}$ 是同序矩阵,$\boldsymbol{A}'$是$\boldsymbol{A}$ 的乱序矩阵.

S 不等式就是

$$\boldsymbol{A}' \text{ 的列积和} \leqslant \boldsymbol{A} \text{ 的列积和},$$

记作

$$S(\boldsymbol{A}') \leqslant S(\boldsymbol{A}).$$

T 不等式就是

$$\boldsymbol{A}' \text{ 的列和积} \geqslant \boldsymbol{A} \text{ 的列和积},$$

记作

$$T(\boldsymbol{A}') \geqslant T(\boldsymbol{A}).$$

为了应用方便起见,我们对一般矩阵再作一些说明.设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

$\boldsymbol{A}$ 中每行的数在该行任意交换位置,可排出$(n!)^m$ 个矩阵,都叫作 $\boldsymbol{A}$ 的乱序矩阵,其中有一个矩阵,每行都从左到右、由小到大地排列,这个矩阵叫作 $\boldsymbol{A}$ 的同序矩阵.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乱序阵可经行行交换或列列交换变出 $\boldsymbol{A}$ 的同序矩阵,则这个矩阵叫作 $\boldsymbol{A}$ 的可同序矩阵.显然,$\boldsymbol{A}$ 的列积和或列和积与 $\boldsymbol{A}$ 的行行交换或列列交换无关.

下面的等式显然成立.

$$S((\alpha_i a_{ij})) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m S((a_{ij})),$$
$$T((\alpha_i a_{ij})) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m T((a_{ij})).$$

$\boldsymbol{A}$ 的有限个乱序矩阵的列积和中，必有一个最大者，就是 $\boldsymbol{A}$ 的同序矩阵的列积和. $\boldsymbol{A}$ 的有限个乱序矩阵的列和积中，必有一个最小者，就是 $\boldsymbol{A}$ 的同序矩阵的列和积.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，每一个 $a_{ij}\geqslant 0$，则微微对偶不等式即为

$$S(\boldsymbol{A}\text{ 的乱序矩阵}) \leqslant S(\boldsymbol{A}\text{ 的可同序矩阵}),$$
$$T(\boldsymbol{A}\text{ 的乱序矩阵}) \geqslant T(\boldsymbol{A}\text{ 的可同序矩阵}).$$

1.2　证明

若 $\boldsymbol{A}'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的可同序矩阵，则

$$S(\boldsymbol{A}') = S(\boldsymbol{A}),\quad T(\boldsymbol{A}') = T(\boldsymbol{A}).$$

否则，可令 $\boldsymbol{A}'$ 中有 $i<j$，使得

$$a'_{ki} > a'_{kj}\quad (k = 1,2,\cdots,l),$$
$$a'_{ki} \leqslant a'_{kj}\quad (k = l+1,l+2,\cdots,m).$$

则可经 $\boldsymbol{A}'$ 改造出 $\boldsymbol{A}''=(a''_{ij})$，其中

$$a''_{ki} = a'_{kj} < a''_{kj} = a'_{ki}\quad (k = 1,2,\cdots,l).$$

其余 $a''_{si} = a'_{si}$.

令

$$a'_{1i}\cdots a'_{li} = a > b = a'_{1j}\cdots a'_{lj},$$
$$a'_{l+1,i}\cdots a'_{mi} = c \leqslant d = a'_{l+1,j}\cdots a'_{mj},$$
$$a'_{1i}+\cdots+a'_{li} = x > y = a'_{1j}+\cdots+a'_{lj},$$
$$a'_{l+1,i}+\cdots+a'_{mi} = z \leqslant w = a'_{l+1,j}+\cdots+a'_{mj},$$

则

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{A}'') - S(\boldsymbol{A}') &= (ad + bc) - (ac + bd) \\
&= (a - b)(d - c) \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&T(\boldsymbol{A}'') - T(\boldsymbol{A}') \\
&= [(x + w)(y + z) - (x + z)(y + w)] \prod_{\substack{r=1 \\ i \neq r \neq j}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a'_{kr} \right) \\
&= (x - y)(z - w) \prod_{\substack{r=1 \\ i \neq r \neq j}}^{n} \sum_{k=1}^{m} a'_{kr} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$S(\boldsymbol{A}') \leqslant S(\boldsymbol{A}''), \quad T(\boldsymbol{A}') \geqslant T(\boldsymbol{A}'').$$

这就是说，$\boldsymbol{A}'$可经过有限次“保乱规”的改造到 $\boldsymbol{A}$，且保向：

$$
\begin{aligned}
&S(\boldsymbol{A}') \leqslant S(\boldsymbol{A}'') \leqslant \cdots \leqslant S(\boldsymbol{A}^{x}) = S(\boldsymbol{A}), \\
&T(\boldsymbol{A}') \geqslant T(\boldsymbol{A}'') \geqslant \cdots \geqslant T(\boldsymbol{A}^{y}) = T(\boldsymbol{A}).
\end{aligned}
$$

得证.

注意，证明中“$a > b, c \leqslant d$”必须用 $a_{ij} \geqslant 0$，但当 $m = 2$ 时，不必用 $a_{ij} \geqslant 0$. 因此，当 $m = 2$ 时，S 不等式中 a_{ij} 的非负条件可以取消. 在 T 不等式中，虽然“$x > y, z \leqslant w$”不必用 $a_{ij} \geqslant 0$，但要涉及另一个因子的符号，因此，在 T 不等式中，一般来说，不宜取消 a_{ij} 的非负性条件. 所以，在两行矩阵中，如无特别申明，总是不加非负条件去研究 S 不等式，而附加非负条件去研究 T 不等式，下面不再一一强调.

1.3 两行的情形

设

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n),$$

$$B=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_{i0} & b_{i1} & \cdots & b_{in} \end{pmatrix}$$

$$(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_{i0}\leqslant b_{i1}\leqslant\cdots\leqslant b_{in}),$$

$$C=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

$$(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_0),$$

其中 $i_0\ i_1\cdots\ i_n$ 是 $0,1,\cdots,n$ 的一个排列.

A 是同序两行矩阵,**B** 是 **A** 的乱序矩阵,**C** 叫作 **A** 的全反序矩阵.

A,**B**,**C** 间有如下不等式关系

$$S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{B})\geqslant S(\boldsymbol{C}),$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\geqslant\sum_{k=0}^{n} a_k b_{ik}\geqslant\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

若 $a_j+b_{ij}\geqslant 0(i,j=0,1,\cdots,n)$,则

$$T(\boldsymbol{A})\leqslant T(\boldsymbol{B})\leqslant T(\boldsymbol{C}),$$

即

$$\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\leqslant\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_{ik})\leqslant\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_{n-k}).$$

上面已证 $S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{B})$，$T(\boldsymbol{A})\leqslant T(\boldsymbol{B})$，下面类似地证明

$$S(\boldsymbol{B})\geqslant S(\boldsymbol{C}),\quad T(\boldsymbol{B})\leqslant T(\boldsymbol{C}).$$

可令 $\boldsymbol{B}$ 中有子矩阵 $\begin{pmatrix} a_k & a_r \\ b_{ik} & b_{ir} \end{pmatrix}$ $(a_k\leqslant a_r, b_{ik}\leqslant b_{ir})$，在 $\boldsymbol{B}$ 中把 b_{ik} 与 b_{ir} 换位，其余不动，这样把 $\boldsymbol{B}$ 改造成另一个 $\boldsymbol{B}'$，则

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{B}')-S(\boldsymbol{B}) &= (a_kb_{ir}+a_rb_{ik})-(a_kb_{ik}+a_rb_{ir}) \\ &= (a_k-a_r)(b_{ir}-b_{ik}) \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{B}')-T(\boldsymbol{B}) &= (a_k-a_r)(b_{ik}-b_{ir})\prod_{\substack{t=0 \\ k\neq t\neq r}}^{n}(a_t+b_{it}) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

因此

$$S(\boldsymbol{B})\geqslant S(\boldsymbol{B}'),\quad T(\boldsymbol{B})\leqslant T(\boldsymbol{B}').$$

从而 $\boldsymbol{B}$ 可经有限次“保乱规”的改造到 $\boldsymbol{C}$，且保向：

$$S(\boldsymbol{B})\geqslant S(\boldsymbol{B}')\geqslant\cdots\geqslant S(\boldsymbol{B}^x)=S(\boldsymbol{C}),$$

$$T(\boldsymbol{B})\leqslant T(\boldsymbol{B}')\leqslant\cdots\leqslant T(\boldsymbol{B}^y)=T(\boldsymbol{C}).$$

得证.

因为 S 不等式在两行矩阵中无 a_{ij} 的非负条件，所以可直接利用 $S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{B})$ 来证明 $S(\boldsymbol{B})\geqslant S(\boldsymbol{C})$.

事实上，令

$$\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -b_{i0} & -b_{i1} & \cdots & -b_{in} \end{pmatrix}$$

$$(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n),$$

则

$$\boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -b_n & -b_{n-1} & \cdots & -b_0 \end{pmatrix}$$

$$(a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n,\ -b_n \leqslant -b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant -b_0)$$

是 $\boldsymbol{B}'$的同序阵,因此

$$S(\boldsymbol{C}') \geqslant S(\boldsymbol{B}'),$$

即

$$-S(\boldsymbol{C}) \geqslant -S(\boldsymbol{B}),$$

从而

$$S(\boldsymbol{B}) \geqslant S(\boldsymbol{C}).$$

按照上述证明思路,不难用以下 6 个 2×3 矩阵

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3, b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3),$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_2 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3),$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3),$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3),$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3),$$

$$\boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3, b_3 \geqslant b_2 \geqslant b_1)$$

构造 26 个(13 个 S 的,13 个 T 的)不等式,可用箭头表示,如图 1.1 所示.其中 $a_i, b_i > 0 (i = 1,2,3)$;$(i \quad j \quad k)$表示矩阵

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_i & b_j & b_k \end{pmatrix}$. 每个箭头表示一个 S 不等式(朝箭头方向增大)和一个 T 不等式(朝箭头方向减少).

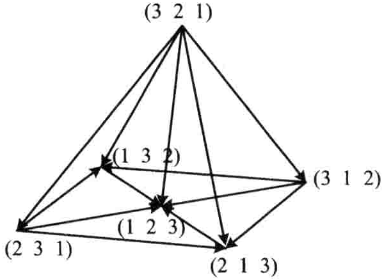


图 1.1

1.4 一些简单例子

例 1 求证:

(1) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$;

(2) $4ab \leqslant (a+b)^2$.

证 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ 是可同序矩阵, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 是乱序矩阵,所以得 $S(\boldsymbol{A}) \geqslant S(\boldsymbol{B})$,即(1); $T(\boldsymbol{A}) \leqslant T(\boldsymbol{B})$,即(2).

例 2 求证:

(1) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;

(2) $8xyz \leqslant (x+y)(y+z)(z+x)$.

证 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ 可同序, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$

的乱序矩阵,所以得 $S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{B})$,即(1);$T(\boldsymbol{A})\leqslant T(\boldsymbol{B})$,即(2).

例 3 某电报房有固定坐席 $n+1$ 个:$A_0,A_1,\cdots,A_n$,每坐席 A_i 有一个收报机用来收城市 B_j 发来的电报.收报机需将每份来报自动放到传送带上,传到集中分发台,再按需要发到相应的地方.今知坐席 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 将来报传到集中分发台所需时间为 $a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$.城市 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 的来报量为 $b_0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$.试问哪个坐席收到哪个城市的报,可使到集中分发台的总秒份 t 最小?

解 设 A_k 收 B_{ik} 的报,则

$$t=S\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_{i0} & b_{i1} & \cdots & b_{in}\end{pmatrix}\quad(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n)$$

$$\geqslant S\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0\end{pmatrix}$$

$$(a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

因此,所需时间少的坐席收来报量多的城市的报最好.

例 4 若$\triangle A_1A_2A_3$ 三边长为 a_k,相应高为 $h_k(k=1,2,3)$,面积为 Δ,$i_1i_2i_3$ 是 1,2,3 的排列,则

$$\sum_{k=1}^{3}a_kh_{ik}\geqslant 6\Delta.$$

证 考虑

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix}\quad(a_1\leqslant a_2\leqslant a_3,h_1\geqslant h_2\geqslant h_3),$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ h_{i1} & h_{i2} & h_{i3} \end{pmatrix} \quad (a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3),$$

由 $S(\boldsymbol{B}) \geqslant S(\boldsymbol{A})$得证.

例 5 在$\triangle ABC$ 中,求证:

$$a\sin A + b\sin B + c\sin C \geqslant h_a + h_b + h_c.$$

证 矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{pmatrix}$$

可同序,$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \sin C & \sin A & \sin B \end{pmatrix}$是$\boldsymbol{M}$ 的乱序矩阵.

由 $S(\boldsymbol{M}) \geqslant S(\boldsymbol{M}') = h_a + h_b + h_c$ 得证.

例 6 设 $a,b,c>0$,证明:

(1) $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$;

(2) $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$;

(3) $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$;

(4) $(2a+b)(2b+c)(2c+a) \geqslant 27abc$;

(5) $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

证 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

易知：

$S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{B})$，即(1)；

$T(\boldsymbol{B})\geqslant T(\boldsymbol{A})$，即(2)；

$S(\boldsymbol{A})\geqslant S(\boldsymbol{C})$，即(3)；

$T(\boldsymbol{C})\geqslant T(\boldsymbol{A})$，即(4).

在 $\boldsymbol{D}$ 中，第一行变为$(c\quad a\quad b)$，第二行变为$(b\quad c\quad a)$，第三、第四行不动，得 $\boldsymbol{D}'$. 易得 $S(\boldsymbol{D})\geqslant S(\boldsymbol{D}')$，即(5).

值得注意的是，若$\triangle ABC$ 中，a,b,c 是三边长，s 是半周长，Δ 是面积，则由此可得$(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4\geqslant\Delta^2$. 事实上，左边$\geqslant(s-a)(s-b)(s-c)\cdot s=\Delta^2$.

例 7　若 $a,b,c>0$，α,β,γ 是长方体对角线与其同一端点出发的三条棱的夹角，则

$$\begin{aligned}abc\leqslant&(a\cos^2\alpha+b\cos^2\beta+c\cos^2\gamma)\\&\cdot(a\cos^2\gamma+b\cos^2\alpha+c\cos^2\beta)\\&\cdot(a\cos^2\beta+b\cos^2\gamma+c\cos^2\alpha).\end{aligned}$$

证　矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a\cos^2\alpha & b\cos^2\alpha & c\cos^2\alpha\\ a\cos^2\beta & b\cos^2\beta & c\cos^2\beta\\ a\cos^2\gamma & b\cos^2\gamma & c\cos^2\gamma\end{pmatrix}$$

可同序；

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a\cos^2\alpha & b\cos^2\alpha & c\cos^2\alpha\\ b\cos^2\beta & c\cos^2\beta & a\cos^2\beta\\ c\cos^2\gamma & a\cos^2\gamma & b\cos^2\gamma\end{pmatrix}$$

是乱序矩阵.

注意到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

由 $T(\boldsymbol{A})\leqslant T(\boldsymbol{B})$得证.

例 8 在$\triangle ABC$ 中,求证:

(1) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 2+\sin A\sin B\sin C$;

(2) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$\leqslant\frac{1}{9}(2+\sin A)(2+\sin B)(2+\sin C).$$

证 矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\sin A & 1 & 1\\ \sin B & 1 & 1\\ \sin C & 1 & 1\end{pmatrix}$$

是同序的;

$$\boldsymbol{D}'=\begin{pmatrix}\sin A & 1 & 1\\ 1 & \sin B & 1\\ 1 & 1 & \sin C\end{pmatrix}$$

是 $\boldsymbol{D}$ 的乱序矩阵.

由此得 $S(\boldsymbol{D}')\leqslant S(\boldsymbol{D})$,即(1);$T(\boldsymbol{D})\leqslant T(\boldsymbol{D}')$,即(2).

例 9 求证:若 $a,b,c>0,n,k$ 是自然数,则

$$3(a^n+b^n+c^n)$$
$$\geqslant(a^k+b^k+c^k)(a^{n-k}+b^{n-k}+c^{n-k}).$$

证 矩阵