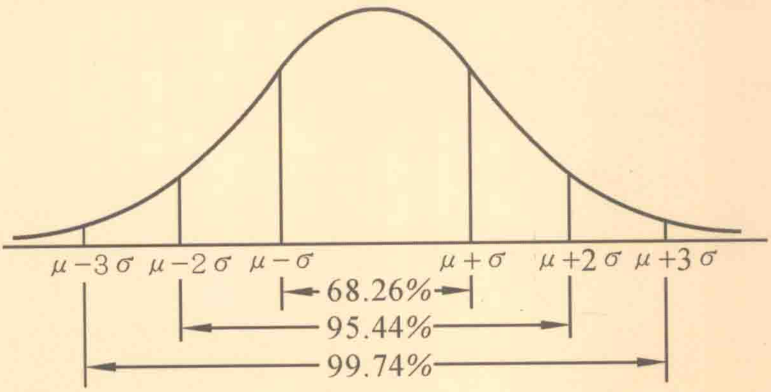
Probability and Mathematical Statistics

# 概率论与数理统计

主　编　安书田　连博勇

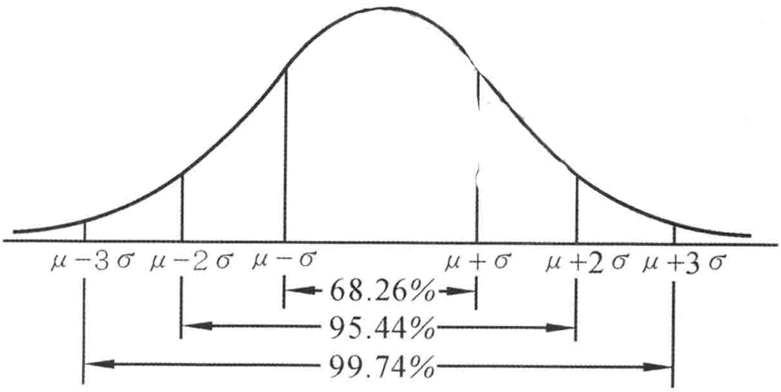



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

Probability and Mathematical Statistics

# 概率论与数理统计

主　编　安书田　连博勇




厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/安书田,连博勇主编. 一厦门:厦门大学出版社,2013.12
ISBN 978-7-5615-3515-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①安…②连… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 310161 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ xmupress.com
沙县方圆印刷有限公司印刷
2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷
开本:720×970 1/16 印张:14 插页:2
字数:236 千字 印数:1～2 000 册
定价:29.00 元

# 前　言

概率论与数理统计是我国大学逾九成专业的基础课之一，对于课时较少的非数学专业学生，如何学好这门课程，一本广度、深度、梯度都十分合适的教材就是它的先决条件.

本教材就是为只有50至54课时的非数学专业的学生编写的.编写中，笔者严格遵守教育部颁布的教学大纲，广泛参考全国各高校各种教材，并根据历年来的教学经验，充分考虑到非数学专业学生的学习特点，最后经过反复讨论修改完成的.

对于本教材，笔者力求：

1.有相当的广度.教材涵盖了教育部颁布的非数学专业教学大纲所含的所有知识点.

2.有一定的深度.对于大量定义定理的叙述、证明过程，充分考虑了数学的科学性与学生可接受性之间的关系，不过多纠缠于纯数学语言的叙述，并使其保持一定的深度.像随机变量及随机事件等概念的叙述就充分体现了上述观点.

3.有适宜的难度.教材在强化基本概念、基础知识的基础上，适当控制定理证明的难度，根据题目的繁杂及使用技巧的程度，恰当地选取例题、习题，以便适应大部分学生的知识基础，并兼顾到部分同学的考研要求.

4.有恰当的梯度.教材在定理的证明、例题习题的选择中，均保持着从容易、中难、到稍难一个逐步发展的过程，并且坚持以前两部分内容为主体的原则.

全书共八章，前五章是概率论部分，后三章为数理统计部分.书末附录中除常用的一些概率用表外，并增加了学生欠缺的排列组合知识及$\Gamma$函数知识.

本书编写的具体分工如下:安书田编写第一章、第六章,连博勇编写第二章,陈丽娜编写第三章,时秀娟编写第四章,翁桂英编写第五章,李学峰编写第七章、第八章;全书策划、统稿、审定由安书田、连博勇完成.

本书编写出版过程中,得到了仰恩大学校领导与数学系广大教师的鼓励与支持,以及厦门大学出版社的全力协助,在此一并致谢.

由于编者水平能力所限,本书疏漏讹误之处,在所难免,恳望有识者斧正,并函告我们.

**安书田　连博勇**

2013 年 10 月于福建泉州

联系邮箱:anshutian@163.com

# 目　录

# 第一章

# 随机事件及概率

公元 1777 年的一天，已进入耄耋之年的法国科学家蒲丰(D. Buffon)在家里举行了一次别开生面的聚会. 他于桌上放了一张白纸，上面绘有距离相等的平行线，并准备了一堆长为平行线距离一半的细针，与会者每人一把，然后依次向纸上一一投去，只需把投掷次数及细针与平行线相交的次数报给蒲丰. 最后，蒲丰诡秘地宣布："先生们，女士们，你们总共投掷 2 212 次，与平行线相交 704 次. 2 212 与 704 相除的商刚好是 3.142，它恰好是圆周率 $\pi$ 的近似值！"所有与会者哗然.

你想了解其中的奥妙吗？这就是专门研究随机现象的数量规律的学科——概率论与数理统计所要解决的. 它起源于 17 世纪，而现在广泛应用于自然科学、社会科学、工业生产、国防建设等各个领域中.

本章重点研究随机事件及概率.

## §1.1　样本空间与随机事件

### 一、随机试验

在自然界与人类社会中普遍存在两类现象：必然现象与随机现象.

**定义 1.1.1　随机现象与必然现象**　必然现象是指在一定条件下其某种结果(往往是一种)一定发生；另一类叫随机现象，它在一定条件下会有多种结果发生，且无法准确预测其哪种结果发生. 如：

(1)水在一个大气压下，到 100 ℃一定沸腾；

(2)任一物体放入水中，一定受到一个向上的浮力的作用；

(3)氢气和氧气化合一定生成水；

(4)掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面；

(5)掷一颗骰子，可能出现 1、2、3、4、5、6 中任一种；

(6)买一张彩票，可能中一等奖，也可能中二等奖，也可能未中奖；

(7)某火车站在一天内候车的人数；

(8)某种牌子手机的使用寿命.

上述(1)(2)(3)为必然现象，(4)(5)(6)(7)(8)为随机现象. 又如，中国古代

有个“守株待兔”的寓言,“兔子撞到树上”是一个随机现象,农夫却把它当成了必然现象.“天有不测风云”也说明了气候变化是随机现象.特别是17世纪以来,人们从对大量的随机现象观察中,总结归纳出其数量上的规律性,发展成一门完整且应用性极其广泛的数学学科—概率论与数理统计.

**定义 1.1.2　随机试验**　对随机现象观察一次,即在一定的条件下实现后,并观察其结果,我们就说做了一个**随机试验**,简称**试验**.所谓观察一次是指对随机现象的某种特征进行观察.为了揭示随机现象在数量上的规律性,我们约定随机试验必须具有以下三个特点:

1. 可重复性:原则上试验可在相同条件重复进行;

2. 确定性:每次试验只有一种结果;并确定地知道每次试验可能出现的所有结果;

3. 不确定性:尽管知道每次试验可能出现的各种结果,但却无法预测一次试验会出现哪一种结果.

例如,定义1.1.1的(4),掷一枚硬币试验,在同样高度自由落下,落地前就确定地知道,只会出现两种情况:正面向上或反面向上,但只有在落地后,才能确切地得知到底哪一面朝上.

## 二、随机事件

**定义 1.1.3　样本空间、样本点**　随机试验的每一个不能再分的结果,叫做**样本点**.所有样本点的集合,叫做**样本空间**.通常样本点用小写希腊字母 $\omega$ 表示,样本空间用大写希腊字母 $\Omega$ 表示.

在实际生活中,满足一定条件的随机试验的结果,我们叫做随机事件.事实上,它是一些样本点构成的集合.

**定义 1.1.4　随机事件**　样本空间的子集叫**随机事件**.它是由某些具有一定特性的样本点构成的,通常用大写拉丁字母 $A$、$B$、$C\cdots$ 表示.以后一般称它为样本空间 $\Omega$ 上的随机事件,或简称为事件.

**定义 1.1.5　基本事件**　只含一个样本点的单元素集叫**基本事件**.

注:

(1)随机事件.既然是集合,那么集合的三种表示法:列举法、描述法、文氏(John Venn)图法均可用来表示随机事件.

(2)不能把随机事件说成基本事件的集合,因为集合的集合,将变成集族了!

(3)设随机事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k\}$.其中 $\omega_i(i=1,\cdots,k)$ 为 $\Omega$ 的样本点.所谓 $A$ 发生,是指一次随机试验的结果为某 $\omega_i$ 出现($i$ 为 $1,2,\cdots,n$ 之一);仅此一个 $\omega_i$ 出现,不会有两个样本点同时出现;多次重复试验后.$A$ 所包含的样本点都会适时出现.

**定义 1.1.6　必然事件**　每次试验中都必然发生的事件叫做**必然事件**. 因为样本空间 $\Omega$ 包含所有的样本点. $\Omega$ 又是 $\Omega$ 的一个特殊的子集. 每次随机试验出现的样本点,均包含于 $\Omega$,即均会导致 $\Omega$ 发生,显然 $\Omega$ 就可表示必然事件,因此我们约定必然事件用样本空间 $\Omega$ 表示.

**定义 1.1.7　不可能事件**　每次随机试验均不会发生的事件,叫做**不可能事件**. 因为空集 $\varnothing$ 不含任何样本点. 即 $\varnothing$ 表示的事件永远不会发生. 我们就用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

必然事件与不可能事件并没有"随机性"及"不确定性",严格地说,它们不是随机事件,而是确定性事件. 为了研究问题方便,我们把它们当做特殊的随机事件来处理.

本节一中对所列随机现象(4)(5)(6)(7)(8)作随机试验,对应的样本空间为:

(4) $\Omega=\{$正面,反面$\}$或 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, $\omega_1,\omega_2$ 依次表示正面与反面;

(5) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

(6) $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$,其中 $\omega_0,\omega_1,\omega_2$ 依次表示未中奖、一等奖、二等奖;

(7) $\Omega=\{k\mid k\in N,\ 0\leqslant k\leqslant M,\ M\in N\}=\{0,1,2,\cdots,M\}$;

(8) $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant M,\ t\in R,\ M\in R\}$.

而在(5)中,$A=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$,$B=\{$点数大于 $10\}=\varnothing$,$C=\{$点数大于 $0\}=\Omega$. 则

$A$ 为随机事件,$B$ 为不可能事件,$C$ 为必然事件.

## 三、事件关系与运算

既然事件是集合,因而事件的关系及运算均可按集合的关系及运算来类似处理,只不过名称与提法上有稍许的差别.

设随机试验的样本空间为 $\Omega$,$A$、$B$、$C$、$D$ 及 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$均为 $\Omega$ 上的随机事件.

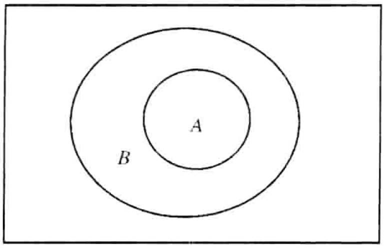
**定义 1.1.8　事件的包含**　若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 的发生,我们就说事件 $A$ 包含于 $B$,记作 $A\subset B$,或者说事件 $B$ 包含了 $A$,记作 $B\supset A$. 实际上任一样本点 $\omega\in A$,一定有 $\omega\in B$,即可称 $A$ 是 $B$ 的子事件,或者说 $A$ 的样本点都属于 $B$. 见图 1.1.1,易知:

(1) $A\subset A$;

(2) $\varnothing\subset A\subset\Omega$;

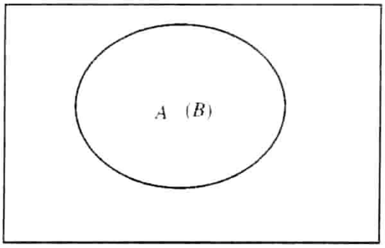
(3)若 $A\subset B$, $B\subset C$,则 $A\subset C$.

**定义 1.1.9　事件的相等**　若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 $A$ 与 $B$ 相等,记作 $A=B$. 实际上,$A$ 与 $B$ 就是样本点完全相同的同一事件(见图 1.1.2).




$\Omega$

图 1.1.1




$\Omega$

图 1.1.2

**定义 1.1.10 事件的和(或并)** "事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生"，这一新事件叫做事件 $A$ 与 $B$ 的和(或并)，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B$ 包含了 $A$ 与 $B$ 的所有样本点，也就是

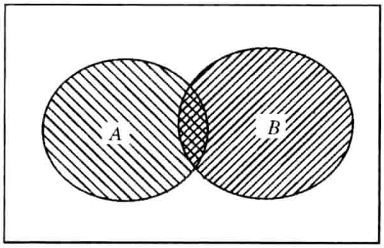
$$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}.$$

$A\cup B$ 有时记作 $A+B$. 如图 1.1.3 所示.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 为 $A_1, A_2,\cdots,A_n$ 的和(或并)事件，称

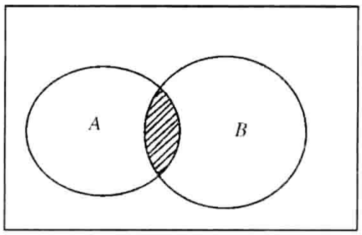
$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

为可列个事件 $A_1, A_2,\cdots$的和(或并)事件，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 亦可写作 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.




$A\cup B$

图 1.1.3




$A\cap B$

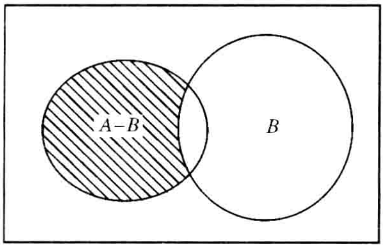
图 1.1.4

**定义 1.1.11 事件的积(或交)** "事件 $A$ 与 $B$ 都发生"，这一新事件叫做事件 $A$ 与 $B$ 的积(或交)，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$，$A\cap B$ 也可简记作 $AB$，$A\cap B$ 仅包含 $A$，$B$ 公共的样本点，见图 1.1.4.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事

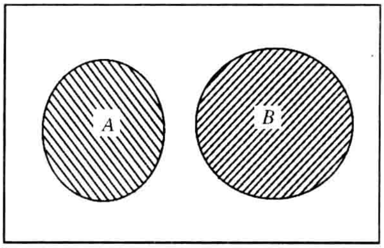
件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$、$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 亦可写作 $\prod_{i=1}^{n} A_i$、$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

**定义 1.1.12　事件 $A$ 与 $B$ 的差**　"事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生"这一新事件叫做 $A$ 与 $B$ 的差，记作 $A-B$，即 $A-B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}$，见图 1.1.5.




$A-B$

**图 1.1.5**




$A\cap B=\phi$

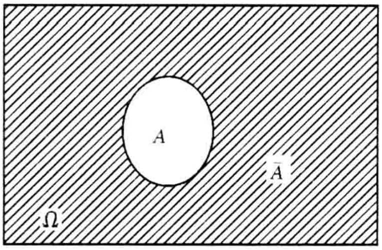
**图 1.1.6**

**定义 1.1.13　互不相容事件**　若事件 $A$ 与 $B$ 不会同时发生，则我们说 $A$ 与 $B$ 是互不相容事件，也说成互斥事件，实际上 $A\cap B=\varnothing$，见图 1.1.6.

**定义 1.1.14　对立事件**　"事件 $A$ 不发生"这一新事件叫做 $A$ 的对立事件，或称为 $A$ 的逆事件，实际上是指"$\Omega$ 发生，$A$ 不发生"，记作 $\overline{A}$，即

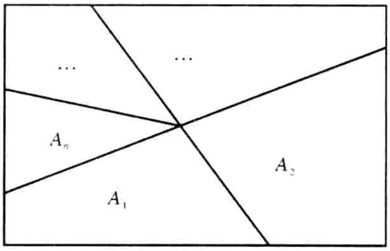
$$\overline{A}=\Omega-A=\{\omega \mid \omega\in\Omega \text{ 且 } \omega\notin A\},$$

易见 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，见图 1.1.7.




$\overline{A}$

**图 1.1.7**




$A_iA_j=\phi$ ，$\bigcup_i A_i=\Omega$

**图 1.1.8**

**定义 1.1.15　完备事件组**　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限或可列个事件，若满足

（1）$A_iA_j=\varnothing \qquad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots$

（2）$\bigcup_i A_i=\Omega$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组，可见 $A, \overline{A}$ 是最简单的一个完备事件组，见图 1.1.8.

## 四、随机事件的运算律

由于事件就是集合，集合的运算律就是事件的运算律，设 $A$、$B$、$C$ 为 $\Omega$ 上的随机事件.

(1)交换律：$A+B=B+A, AB=BA$.

(2)结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$;
$(AB)C=A(BC)=ABC$.

(3)分配律：$(A+B)C=AC+BC$(第一分配律)；
$(A+B)(A+C)=A+BC$(第二分配律).

(4)自反律：$\overline{\overline{A}}=A$.

(5)对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

(6)吸收律：若 $A\subset B$，则 $A+B=B, AB=A$.

(7)差积转换律：$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

(8)分解律：1°若 $A\subset B$，则 $B=A+\overline{A}B$.（见图 1.1.1）

2° $A+B=(A-B)+AB+(B-A)=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$.（见图 1.1.3）

**例 1.1.1** 掷一颗骰子，观察出现的点数. $A=\{$偶数点$\}$，$B=\{$点数小于 6$\}$，$C=\{$不小于 4 的奇数点$\}$. 用列举法表示下列事件：$\Omega, A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, A+B, \overline{A}+\overline{B}, AB, AB+A, \overline{B}+C$.

**解** $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$A=\{2,4,6\}$,

$B=\{1,2,3,4,5\}$,

$C=\{5\}$,

$\overline{A}=\{1,3,5\}$,

$\overline{B}=\{6\}$,

$A+B=\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$AC=\varnothing$,

$AB=\{2,4\}$,

$\overline{AB}=\{1,3,5,6\}$,

$\overline{A}+\overline{B}=\{1,3,5,6\}$,

$A-B=\{6\}$,

$B-A=\{1,3,5\}$,

$AB+A=\{2,4,6\}=A$,

$\overline{B}+C=\{5,6\}$.

**例 1.1.2** 一名射手连续向目标射击三次，设 $A_i=\{$第 $i$ 次射中$\}(i=1,2,3)$，

试用上述三个事件的运算表示下列各事件 $B_i(i=1,2,\cdots,12)$.

(1) $B_1=\{$第三次未击中目标$\}=\overline{A_3}$;

(2) $B_2=\{$第一次击中而第二次未击中目标$\}=A_1\overline{A_2}=A_1-A_2$;

(3) $B_3=\{$三次射击至少有一次击中目标$\}=A_1+A_2+A_3$;

(4) $B_4=\{$三次射击只有第三次未击中目标$\}=A_1A_2-A_3=A_1A_2\overline{A_3}$;

(5) $B_5=\{$三次射击恰有一次击中目标$\}=A_1\overline{A_2}\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$;

(6) $B_6=\{$三次射击恰有两次击中目标$\}=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$;

(7) $B_7=\{$三次射击至少有一次未击中目标$\}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$;

(8) $B_8=\{$三次射击至少有两次击中目标$\}=A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$;

(9) $B_9=\{$三次射击都击中目标$\}=A_1A_2A_3$;

(10) $B_{10}=\{$三次射击都未击中目标$\}=\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$;

(11) $B_{11}=\{$三次射击至多一次击中目标$\}$

$$=\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\overline{A_2}A_3;$$

(12) $B_{12}=\{$三次射击至多两次击中目标$\}=\overline{A_1A_2A_3}$或$\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$.

注：

(1)用几个事件的运算表示某事件其方法不唯一.

如：$B_{12}=B_7=B_{11}+B_6$.

(2)往往根据需要选择一种表达方式，譬如：设 $B_{13}=\{$前两次射击中至少有一次击中目标$\}$，则 $B_{13}=A_1+A_2=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2+A_1A_2$. 后一种表示法恰好把 $A_1+A_2$ 写成了互斥的三个事件的和，适用于直接求概率.

**例 1.1.3**　随机地向数轴投入一个质点，质点落在该区间，则表示该事件发生. 指出下列事件的关系：

$A=(-\infty,2]$, $B=(1,4]$, $C=(2,+\infty)$, $D=[-1,1]$, $E=(3,6)$.

**解**　$A$ 与 $B$，$B$ 与 $E$，$B$ 与 $C$ 均是相容事件(积不为$\varnothing$)；$A$ 与 $C$ 是对立事件；$B$ 与 $D$，$A$ 与 $E$ 是互斥事件；$D\subset A$，$E\subset C$.(见图 1.1.9)

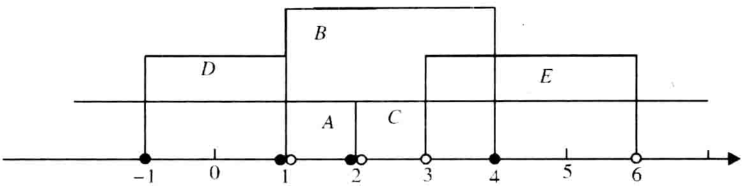



**图 1.1.9**

## §1.2 随机事件的概率

“天有不测风云”这个成语说明了气候变化的随机性.但在长期生活实践中,判断今明两天下雨可能性时,也有“早烧不出门,晚烧晒死人”的谚语(“烧”指出现火红似的云霞).一次随机试验中,某随机事件可能发生亦可能不发生.但随着随机试验的次数越来越增大的时候,其规律性也越来越显露出来.这也就是现在的“天气预报”成为可能的原因.我们希望用一个数值表示某一随机事件在一次试验发生的可能性,这个数值我们称为随机事件的概率.

### 一、概率的统计定义

**定义 1.2.1 频率** 若在相同的条件下进行 $n$ 次随机试验,其中某事件 $A$ 发生了 $n_A$ 次,则称 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 $A$ 发生的频率.

由频率定义,容易推出下列三条性质:

$$\begin{aligned}&(1)\ f_n(\Omega)=1;\\&(2)\ f_n(A)\geqslant 0;\\&(3)\text{若 } A_1,A_2,\cdots,A_k \text{ 两两互斥,则}\\&f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

我们从频率的定义可以看出,在大量重复的随机试验中,随机事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)$ 反映了 $A$ 出现的频繁程度,即 $A$ 发生的可能性.

**例 1.2.1** 在一定高度向桌面投掷一枚硬币,设 $A=\{$出现正面$\}$,观察 $f_n(A)$,当投掷次数较少时,$f_n(A)$ 取值规律尚不太明显,但当投掷次数增大后,$f_n(A)$ 逐渐稳定于 0.5 附近,见表 1.2.1.

**表 1.2.1**

| 实验者 | $n$(投掷次数) | $n_A$(出现正面次数) | $f_n(A)$(频率) |
|---|---|---|---|
| 德摩根 | 2 048 | 1 061 | 0.518 1 |
| 蒲丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |
| 维尼 | 30 000 | 14 994 | 0.499 8 |
| 罗曼诺夫斯基 | 80 640 | 39 699 | 0.492 3 |

**例 1.2.2** 考察某良种场生产的一种作物种子发芽率,从中依次抽取 7 批作发芽试验,其结果如表 1.2.2.

表 1.2.2

| $n$(种子粒数) | 2 | 10 | 130 | 310 | 1 500 | 2 000 | 3 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_A$(发芽粒数) | 2 | 9 | 116 | 282 | 1 339 | 1 806 | 2 715 |
| $f_n(A)$(发芽率) | 1 | 0.9 | 0.892 | 0.910 | 0.893 | 0.903 | 0.905 |

从表 1.2.2 中看出，随着各批次种子粒数的增加，发芽率 $f_n(A)$ 逐渐稳定在 0.9 的附近.

在实际的自然界以及社会生活中，一个随机事件 $A$ 的发生具有偶然性和不确定性，但大量重复试验后，其发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 总是会稳定在一个确定的常数 $p$ 附近. 这个"$p$"反映了随机事件 $A$ 在一次试验中发生的可能性.

**定义 1.2.2　概率的统计定义**　在相同的条件下，重复进行 $n$ 次随机试验，某事件 $A$ 恰好发生了 $n_A$ 次. 若事件 $A$ 发生的频率

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

随着 $n$ 的增大逐渐稳定地在一个常数 $p$ 附近摆动，则我们就称 $p$ 为随机事件 $A$ 的概率，记作

$$P(A)=p.$$

注：(1)由频率的稳定性得到的概率定义既直观又易于理解，又易于计算其近似值.

(2)按概率的统计定义，一个随机事件的概率是由相当多次的重复试验统计出来的. 而不是由纯数学推理计算得到的；因此，从数学角度看这是不科学的.

(3)按概率统计定义的方法只能得到的是近似值，而无法确定其精确值. 例如 1.2.2 中，概率到底是 0.903、0.905 还是 0.893，很难确定，而取 $p=0.9$ 为其精确值也显得底气不足.

## 二、概率的公理化定义

概率的统计定义是由频率稳定引申出来的，频率具有的三条性质(1.2.1)式，因此概率也应该具有类似(1.2.1)的三条性质：

(1)规范性　$P(\Omega)=1$.

(2)非负性　对 $\Omega$ 上的任一随机事件 $A$，恒有 $P(A)\geqslant 0$.　　(1.2.2)

(3)可加性　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

在十七世纪以来的三百多年里，概率论从产生、发展到成熟，经过无数数学工作者的艰辛卓绝的努力，逐步摆脱了经验定义的束缚，逐渐步入了纯数学的殿

堂.

"概率"(英文:Probability)这一名词,从统计定义及稍后学习的古典定义、几何定义等各式各样的尝试以后,直到1933年,前苏联数学家,柯尔莫果洛夫(Kolmogorov)为概率论提出了一套完整抽象的公理体系,第一次将概率论建立在严密逻辑推理的基础上,且迄今为止,基本上为全世界数学家所公认.

**定义1.2.3 概率的公理化定义** 设$\Omega$是一个样本空间,对于$\Omega$上的任一随机事件$A$,恒有唯一确定的实数值$P(A)$与其对应,此函数$P(\cdot)$满足下面三条公理:

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{公理 1}\quad \textbf{规范性}\quad P(\Omega)=1.\\ \textbf{公理 2}\quad \textbf{非负性}\quad 对\ \Omega\ 上任一事件\ A,恒有\ P(A)\geqslant 0.\\ \textbf{公理 3}\quad \textbf{可列可加性}\quad P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)\end{array}\right\}\tag{1.2.3}$$

其中$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是$\Omega$上任意可列个两两互不相容事件.那么我们称$A$的函数值$P(A)$为随机事件$A$的概率.

注:(1)此定义没有给出任一随机事件$A$的概率的具体求法,这将依赖于实际情况中的具体结构,我们在这里只是规范了函数$P(\cdot)$应满足的几个必要条件;

(2)这三条既然是公理,就是由实践验证而为世人所公认的,是无需其他理论来证明的.

(3)这三个条件是整个概率论的基石,它是最简的且缺一不可的,而且又是不能相互替代的.

(4)(1.2.3)式中公理3为可列可加性,较(1.2.2)式中(3)做了必要的修正.

**三、概率的性质**

从概率的公理化定义的三条公理出发,可以推导出概率的一系列重要性质.

**性质1** $P(\varnothing)=0$.

**证明** 由可列可加性,$\varnothing=\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots$,

$\therefore P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$

又由非负性$P(\varnothing)\geqslant 0$,则必有$P(\varnothing)=0$.

**性质2 有限可加性** 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**证明**

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$ (括号内任两事件互不相容)