

数学名著译丛

# 普林斯顿数学指南

(第一卷)

[英] Timothy Gowers 主编

齐民友 译



科学出版社

014013077

01  
49  
V1

数学名著译丛

# 普林斯顿数学指南

## 第一卷

[英] Timothy Gowers 主编

齐民友 译



科学出版社

北京

01  
49  
V1



北航

C1699909

图字: 01-2013-6961 号

## 内 容 简 介

本书是由 Fields 奖得主 T. Gowers 主编、133 位著名数学家共同参与撰写的大型文集. 全书由 288 篇长论文和短篇条目构成, 目的是对 20 世纪最后一二十年纯粹数学的发展给出一个概览, 以帮助青年数学家学习和研究其最活跃的部分, 这些论文和条目都可以独立阅读. 原书有八个部分, 除第 I 部分是一个简短的引论、第 VIII 部分是全书的“终曲”以外, 全书分为三大板块, 核心是第 IV 部分“数学的各个分支”, 共 26 篇长文, 介绍了 20 世纪最后一二十年纯粹数学研究中最重要成果和最活跃的领域, 第 III 部分“数学概念”和第 V 部分“定理与问题”都是为它服务的短条目. 第二个板块是数学的历史, 由第 II 部分“现代数学的起源”(共 7 篇长文)和第 VI 部分“数学家传记”(96 位数学家的短篇传记)组成. 第三个板块是数学的应用, 即第 VII 部分“数学的影响”(14 篇长文). 作为全书“终曲”的第 VIII 部分“结束语: 一些看法”则是对青年数学家的建议等 7 篇文章.

中译本分为三卷, 第一卷包括第 I~III 部分, 第二卷即第 IV 部分, 第三卷包括第 V~VIII 部分.

本书适合于高等院校本科生、研究生、教师和研究人員学习和参考. 虽然主要是为了数学专业的师生写的, 但是, 具有大学数学基础知识, 更重要的是对数学有兴趣的读者, 都可以从本书得到很大的收获.

Copyright © 2008 by Princeton University Press

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher.

## 图书在版编目(CIP)数据

普林斯顿数学指南. 第 1 卷/(英)高尔斯(Gowers, T.)主编; 齐民友译.  
—北京: 科学出版社, 2014.1

(数学名著译丛)

书名原文: The Princeton Companion to Mathematics

ISBN 978-7-03-039321-0

I. ①普… II. ①高… ②齐… III. ①数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 297983 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 桂伟利

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

**骏杰印刷厂** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2014 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 1 月第一次印刷 印张: 33 1/2

字数: 748 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 译者序

我有幸接触到《普林斯顿数学指南》(以下简称《数学指南》)这部书并且开始翻译工作是 2010 年的事了,到读者能够见到它,就有五个年头了.这四年的经历可以说是好比重进了一次数学系,不过与第一次进数学系比较,真正的差别不在于自己的数学准备比当年要高一些,所学的科目内容比当年更深了,而是我必须认真地逐字逐句读完这本“教科书”.当我上一次进数学系时,所学的课程内容离当时(20 世纪 50 年代)还很少有少于 100 年的时间间距,而这一次所学的内容则主要是近一二十年的事情.时间间距一长就有一个好处:后人可以更好地整理、消化这些内容,对于许多问题也就可以了解得更真切.而如果在上次进数学系时,想要学习当时正在发展中的数学,如果没有比较足够的准备,不曾读过一些很深的专著和论文,就常会有不知所云如坠云雾中的感觉.但是这一次“再进数学系”的感觉就不太相同了,一方面,对于自己原来觉得已经懂了,甚至后来给学生们讲过多次的内容,现在发现并没有真懂.还是用前面用的“真切”二字比较恰当:当年学到的东西还是表面的、文字上的更多一些,而对于当时人们遇到的究竟是什么问题,其要害何在,某一位数学家的贡献何在,甚至为什么说某位数学家伟大,自己都是糊里糊涂,所以说是懂得并不“真切”,而这一次有了比较深刻的感觉.另一方面,我必须学习一些过去不曾读过的甚至没有听到过的课程,就本书的核心——第 IV 部分:数学的各个分支——而言,其中一些篇章我只能说是“认得其中的字”,对其内容不能置一词.但是对于多数篇章,感觉与读一本专著——哪怕是这个分支的名著——比较,就有一种鸟瞰的感觉了:它们没有按我们习惯的从最基本的定义与最基本的命题开始,而是从数学发展在某个时代遇见的某个问题开始(这本书有篇幅很大的关于历史和数学家传记的部分,对于理解各个分支的实质很有帮助),讲述当时的数学家是怎样对待这些问题的,他们的思想比前人有何创新,与后世比又有哪些局限.这些文章还讲这个分支为什么以那些工作为核心,与其他的工作有什么关系.这些文章一般都以“谈话”的形式呈现在读者面前,使您感到作者是娓娓道来,吸引着听众,这可能是使得此书能吸引人而不令人感到枯燥的原因之一.不过,读者对于一本书有什么样的要求,对它的观感和应该采用的读法是不同的.如果只是为了扩大眼界,那是一种读法;如果是为了听懂同行的讲演讲的是什么东西,甚至自己也能提出相关的问题,那就是另一种读法了.更重要的是,如果读者认为某一个分支引起了他的兴趣,因而有了进一步了解它的愿望——这正是原书编者希望达到的目的——那就需要对于书中(或某一篇章中)提到的某个问题有进一

步的知识。原书编者多次提到《数学指南》这本书与一些大型数学网站的不同,但我认为,为了进一步了解这个问题,把《数学指南》与一些大型数学网站的相关条目结合起来读不失为有效的办法,特别是维基百科,在翻译过程中给了我很大的帮助,不仅使我能更准确地了解此书某一篇文章,甚至是某一段落的含义,少犯太离谱的错误,而且更重要的是当我想要进一步了解一些问题时,这些网站给了我很大的帮助。相信对于读者也会是这样,所以译者有时在脚注中特别介绍了所用到的网站。不过在脚注中提到一些网站只占实际用到它们的频度的很小一部分。《数学指南》还有一个可能读者没有想到的用处:近年来,关于数学的新进展,特别是一些新的应用,圈子内外常有一些似是而非的流言,而且常在大学生中传播,在多数情况下,《数学指南》会提供比较可靠的说明。

最重要的是要强调一下,学数学是要下力气的,而要想真正学到一点东西,认真地读一些教科书、专著,特别是名著是不可少的。译者愿意特别向年轻的读者提醒一下,《数学指南》(或者书的原名“Companion”,直译就是“伴侣”)只能给您指一条路,陪您走上一段,它不可能让您毫不费力就懂一门数学,那种不需要费力就能学有所成(当前特别指能金榜题名),不只是似是而非的流言,老实说就是不负责任的谎言。《数学指南》的作用是使我们花的功夫能花在关键处,起较大的作用。

这一段话对于读者和译者都是适用的。这本译作,可以看成是译者“再进数学系”的考卷。这样一本千余页的大作,其内容又有很大一部分是我所不熟悉,或者完全不懂的,翻译的错误在所难免,还是反映了翻译时下的功夫不够。如果读者愿意赐教,就是帮助译者更好地“上这一次数学系”,所以译者在此预先致以诚挚的谢意。

这本书还有一个篇幅不大的引论部分,由四篇文章组成。其中第二和第三两篇分别讲“数学的语言和语法”和“一些基本的数学定义”。第二篇包含了对于逻辑学的简单介绍,第三篇则分门别类对数学的各个分支(如代数、几何、分析等)的基本概念作一些说明。按编者原来的意图,如果对于这些材料太过生疏,读这本书就会很困难。问题在于即使知道了这些,是否就能比较顺利地读这本书?按译者的体验,大概还是不行的,因为这两篇文章有点类似于名词解释,其深度与其他各部分特别是与作为本书主体的第IV部分“数学的各个分支”反差太大。依译者之见,不妨认为这一部分是对于读者的要求的一个大纲。对这一部分(或者例如对于其中的分析部分)有了一个大学本科的水平,再读本书(有关分析的各个篇目)就方便多了(当然,如上面说的那样,许多时候还需要再读一点进一步的书)。这样,不妨认为原书在这里提出:为了涉猎现代数学,读者需要懂得些什么,或者说,大学数学专业应该教给学生的是什么?如果大家不反对这个想法,则回过头来看一下现在国内的大学数学教学,就会承认还需要走相当一段路程,因此建议本书的读者先读一下这两篇文章,那么下面应该读些什么就清楚了。

最后,关于译文的文字还有几句需要说的话.我们大家都有一个体会:同是一件事,如果多说一句甚至半句话就会清楚多了,写数学书当然也是一样,但是这就涉及作者的素养和习惯了.也许对作者来讲,话已经讲够了,而对译者就需要好好揣摩这里少讲的这一句甚至半句话.这些话译者原来打算就放在一个方括号内,但是后来这种情况多了,译者又常把这个方括号略去,使版面更清楚一些,而只在加的话比较多时加以说明.这样,译文与原书就有了一些区别.此外原书有一些笔误或排版的错误,译者就改了算了,但是涉及内容的,译者都加了说明,以示文责自负.

最后,再说一次,请读者赐教并指出翻译的错误,谨致诚挚的谢意.

齐民友

2013年国庆日

# 序

## 1. 这是一本什么书

罗素 (Bertrand Russell) 在他所写的《数学原理》(*The Principle of Mathematics*) 中给出了纯粹数学的以下定义:

纯粹数学就是所有形如“ $p$  蕴含  $q$ ”的命题的集合, 这里  $p$  和  $q$  是含有相同的一个或多个变项的命题, 而且除逻辑常项以外不含其他常项. 这些逻辑常项全都可以用下述概念来定义: 蕴含、项对于类的“为其元素”的关系、使得的概念<sup>①</sup>、关系的概念, 以及上述形式命题的一般概念中可能包含的其他概念. 除此以外, 数学还使用一个概念, 但它不是其所考虑的命题的成分, 这就是真理的概念.

《普林斯顿数学指南》可以说是罗素的定义所没有包含的一切东西的全讲.

罗素的《数学原理》是 1903 年出版的, 当时有许多数学家全神贯注地研究这门学科的逻辑基础. 现在, 一个多世纪已经过去了, 如罗素所描述的那样, 把数学看作一个形式系统, 这一点现在也不再是一个新思想, 而今天的数学家更关心的是别的事. 特别是在有这么多数学结果问世的这样一个时代, 每个人只可能懂得其中极小的一部分; 只知道哪些符号排列构成语法上正确的数学命题已经不那么有用, 更需要知道的是哪些命题才值得注意.

当然, 不能希望对于哪些命题值得关注这个问题给出完全客观的回答, 不同的数学家对于哪些东西才有意思会有不同意见也是合乎情理的. 所以, 这本书远不如罗素的书那么形式化, 它的许多作者各有不同的观点. 这样, 本书并不试图对于“是什么使得一个数学命题有意思”给出准确的答案, 而是只想向读者提供一些很大的具有代表性的例子, 使他们知道数学家们在 21 世纪开始的时候为之拼搏的思想是什么, 并且以尽可能吸引人及能够接受的方式来做这件事.

## 2. 本书的范围

本书的中心点是现代纯粹数学, 关于这个决定有几句话要说. “现代”一词如上面所说, 只不过是说本书打算对于现在数学家们在做什么给出一个概念. 举例来

<sup>①</sup> 请参看 I.2 §2.1 “集合”这一小节第三段中对“使得”这一概念的解释.——中译本注

说,一个领域可能在 20 世纪中叶发展比较迅速,现在达到了一个比较固定的形式,那么人们对它的讨论比之对现在快速发展中的领域就会少一些.然而,数学是有历史的:要理解一点现代的数学,通常就需要知道许多早就发现了的观念和结果.此外,想要对于今天的数学有一个恰当的展望,知道一点它何以成了今天的情况就是很必要的了.所以在本书里讲了大量的历史,尽管把这些历史包括进来的主要原因是为了说明今天的数学.

“纯粹”一词就更麻烦一些.许多人曾经评论过,在纯粹与应用数学之间并没有清楚的分界线,而且正如对现代数学要有一个适当的理解,就需要一点其历史的知识一样.对纯粹数学要有一个适当的理解,就需要一点应用数学和理论物理的知识.说真的,这些领域曾经为纯粹数学提供了许多基本的观念,而由之产生了纯粹数学的许多最有趣、最重要、当前又最活跃的分支.本书对于这些其他分支对纯粹数学的影响肯定不能视而不见,也不能忽视纯粹数学的实际和心智的应用.然而,本书的范围比它应该的那样要更加狭窄一些.有一个阶段,打算为本书起一个比较准确的书名,叫做“普林斯顿纯粹数学指南”,不采用它的唯一原因是觉得现在的书名更好一些.

类似这本集中于纯粹数学这样一个决定后面还有一个想法,就是它会为以后再出一本“指南”——关于应用数学和理论物理的“指南”留下余地.在这样一本书尚未出现以前, Roger Penrose 所写的《通向现实的道路》(*The Road to Reality*)(New York: Knopf, 2005)一书包含了数学物理学的很广泛的论题,而且是按照与本书很相近的水平写的, Elsevier 最近也推出了五卷本的《数学物理学百科全书》(*Encyclopedia of Mathematical Physics*)(Amsterdam: Elsevier, 2006).

### 3. 这不是一部百科全书

“指南”这个词很值得注意.虽然本书肯定是打算写成一本有用的参考书,您可能不能对它期望过高.如果您想找出一个特定的数学概念,就不一定能在这里找得到,哪怕它是一个重要的概念,虽然说,如果它越重要,就越有可能被收入本书.在这一方面,这本书倒有点像是真有一个人对读者在作“指南”:这个人在知识上有漏洞,对于某些主题在看法上又不一定与众人相同.虽然声明了这一点,我们至少还是力求某种平衡:许多主题并未包括在书中,但是已经收入的范围还是很广泛的(比起您对真有其人作“指南”所能合理希望的、要广泛得多).为了达到这种平衡,我们在某种程度上是以一些“客观的”指标为导引的,例如美国数学会的数学主题的分类,或者四年一届的国际数学家大会上对数学分类的方法.大的领域如数论、代数、分析、几何学、组合学、逻辑、概率论、理论计算机科学和数学物理,本书都是有的,但是它们的各个子分支就不一定都有了.关于选择哪一些主题收入本书,每一



个主题要写多长,不可避免地并非某个编辑的规定所能决定的,而是取决于某些高度偶然的因素,例如谁愿意写,在同意写以后是谁实际交了稿,交来的稿子是否符合规定的字数等等.结果,有些领域反映得不如我们所希望的那么充分.终于到了这样一个关节点:印行一部不甚完备的书,比之为了达到完美的平衡而再等上几年还要好些.我们希望有朝一日《普林斯顿数学指南》(以下简称《数学指南》)还会有新版,那时就可以弥补本版可能有的缺陷了.

另外一个方面,本书也不同于一部百科全书,即本书是按主题排列,而不是按字母顺序排列的.这样做的好处是,虽然各个条目可以分开来阅读,却也可以看作是一个和谐的整体的一部分.说真的,这本书的结构是这样的,如果从头到尾地读,虽然会花费太多时间,却也不是好笑的事情.

## 4. 本书的结构

说本书是“按主题排列的”,这是什么意思?回答是:本书分成了八个部分,各有其总的主题和不同的目的.第 I 部分是引论性质的材料,对数学给出一个总的鸟瞰,并且为了帮助数学背景较浅的读者,解释了这个学科的一些基本的概念.一个粗略的来自经验的规则是:如果一个主题属于所有数学家必备的背景,而不是特定领域的数学家之所需,就把它纳入第 I 部分.举两个明显的例子:群 [I.3§2.1] 和向量空间 [I.3 §2.3] 就属于这个范畴.

第 II 部分是一组历史性质的论文,目的是解释现代数学的极具特色的风格是怎样来的.广泛地说,就是解释现代的数学家在其学科中的思维方式与 200 年前(或者更早)的数学家的思维方式有哪些主要的区别.有一点区别在于,对于什么算是证明,现代有了大家都能接受的标准.与此密切相关的是这样一件事实,即数学分析(微积分及其后来的扩张和发展)已经被放置在严格的基础上了.其他值得注意的特点还有数的概念的扩张、代数的抽象性,另外,绝大多数现代几何学家研究的是非欧几何,而不是更加熟悉的三角形、圆、平行线之类.

第 III 部分由一些较短的条目组成,每一条讨论一个在第 I 部分中未曾出现的重要的数学概念.目的是:如果有一个您不知道但又时常听人说起的概念,本书这一部分就是一个查找的好地方.如果另一位数学家,比方说一位讲演的人,假定您熟悉一个定义——例如辛流形 [III.88], 或者不可压缩流欧拉方程 [III.23], 或者索伯列夫空间 [III.29 §2.4], 或者理想类群 [IV.1 §7]——要承认自己不懂又感到没面子,现在您就有了一个脱身的办法:在《数学指南》里面查一查这个定义.

第 III 部分的文章如果只是给出一些形式定义,那就没有什么用处:要想懂得一个概念,人们总会希望知道它直观地是什么意思,它为什么重要,而第一次引入它是为的什么.特别是如果它是一个相当广泛的概念,人们就会想知道一些好的例

子——既不太简单，又不太复杂。事实上，很可能提出并且讨论一个选择得很好的例子，正是这篇文章需要做的事情，因为一个好例子比一个一般定义好懂得多，而一个比较有经验的读者能够从抽取这个例子里面重要的性质来写出一一般定义。

第 III 部分的另一个作用是为一本书的心脏部分（即第 IV 部分）提供支持。第 IV 部分是关于数学的不同领域的 26 篇文章，它们比第 III 部分的文章要长得多。第 IV 部分的每一篇典型的的文章都是为解释它所讨论的领域的某些中心思想和重要结果，而且要做得尽可能不太形式化，又得服从一个限制，就是不能太模糊，以至不能提供信息。对于这些文章，原来的希望是写成“床头读物”，就是既清楚又很初等，不必时而停下来思考就能读懂它们。所以在选择作者的时候，有两个同等重要的优先条件：专业水平和讲解的本事。但是，数学不是一门容易的学科，所以到了最后，我们只好把原来定的完全可接受性看成是一个要为之努力的理想，尽管在每一篇文章的最小的小节里未能完全达到。但是，哪怕这篇文章很难读，它的讨论比起典型的教科书来也会更清楚，更少形式化，这一点时常做得相当成功。和第 III 部分一样，好几位作者是通过观察有启发性的例子来做到这一点的，例子后面有的接着讲更一般的理论，有的则让例子本身说话。

第 IV 部分有许多文章包含了对于数学概念出色的描述，这些概念本来应该放到第 III 部分用专文讲解的。我们本想完全避免重复，而在第 III 部分里交叉引用这些描述。但是，这会让读者不高兴，所以采用了下面的两全之策：如果一个概念已经在别处充分地解释了，而第 III 部分又没有设专文，就做一个简短的描述再加上交叉引述。这样一来，如果您想很快地看一看一个概念，就可以只看第 III 部分，如果需要更多细节，就得跟着引文看本书的其他部分了。

第 V 部分是第 III 部分的补充，它也是由重要数学主题的短文组成的，但是现在这些主题是数学中的一些定理和未解决的问题，而不是基本对象和研究工具。和全书一样，第 V 部分里条目的选择必定远非全面，而是在心目中有一些准则。最显然的一个准则是它们在数学中的重要性，但是有些条目的选择是因为可以用一种使人愉快的又容易接受的方式来讨论它们，还有一些是因为它们有不平常的特殊之处（四色定理[V.12]是一个例子，虽然说按照别的准则，也可能会选入这一条），有一些条目是因为第 IV 部分的密切相关条目的作者觉得有一些定理应该单独讨论，还有一些是因为有几篇文章的作者需要它作为背景知识。和第 III 部分一样，第 V 部分有一些条目不是完整的文章，而是简短的说明加上交叉引用。

第 VI 部分是另一个历史部分，是关于著名数学家的。它由一些短文组成，每一篇的目的是给出一些很基本的传记资料（例如国籍和生卒年月），并且说明这位入选的数学家何以是著名的数学家。一开始，我们计划把在世的数学家也包括在内，但最后我们得出了一个结论，对于今天仍然在工作的数学家，几乎不可能做一个令人满意的选择，所以我们决定限于已经去世而且主要是由于 1950 年以前的工作而

著称的数学家。比较晚近的数学家因为在另外的条目里也会提到，当然也就进入本书了。对他们没有专门列条目，但是在索引里看一看，就会对他们的成就有个印象了。

在主要关于纯粹数学的六个部分以后，第 VII 部分最终展示了数学从外界得到的实用上和心智上的推动。这部分里面是一些较长的文章，有一些是由具有跨学科兴趣的数学家写的，有些则是由使用了很多数学的其他学科专家写的。

本书的最后一部分包含了对于数学的本性和数学生活的一般的反思。这一部分里的文章，比前面较长的文章，总体上说要好读一些，所以尽管第 VIII 部分是本书的结尾，有些读者也可能从它们开始来读本书。

各部分里面文章的次序，在第 III 部分和第 V 部分是按字母顺序排列的，而第 VI 部分则按年代排列。按生卒年月来安排数学家传记，这个决定是经过仔细考虑的。这样做有几个理由：它会鼓励读者从头到尾地读，而不是选择单篇地读，以获得对于这门学科的历史感；它会使得读者对于哪些数学家是同时代人或者近乎同时代人，要清楚得多。如果读者费一点心，在考察一位数学家的时候，猜想一下他（或者她）的出生年月和其他数学家的出生年月相对关系如何，就会得到一点虽然很小但又很有价值的知识。

在其他部分内部，做了一些努力来按照主题排列这些文章。特别是在第 IV 部分里，希望次序的排列符合两个基本原则：首先，关系密切相关的分支的文章要尽量靠近；其次，如果在读文 B 之前先读文 A 有明显的意义，那么在本书里就把文 A 放在文 B 前面。这件事说起来容易做起来难，因为有些分支很难分类，举一个例子，算术几何是算代数、几何还是算数论呢？分在这三类都有道理，决定采用其一总是有点造作。所以第 IV 部分里的次序并不是分类的一种格式，而只是我们能够想到的最佳的线性次序。

至于各个部分次序的排列，则目的在于使之成为从数学观点看来最自然的次序，并且给本书一种方向的感觉。第 I，II 两部分显然是导引性质的。第 III 部分放在第 IV 部分前面，是因为想要了解一个领域，就总要先和新定义格斗一番。但是第 IV 部分放在第 V 部分前面，则是因为为了领会一个定理，先知道它在一个领域里面的位置如何，这是一个好主意。第 VI 部分放在第 III 部分到第 V 部分后面，是因为知道一点数学以后，才能更好地领会一位著名数学家的贡献。第 VII 部分接近书末，也是由于类似的理由：要理解数学的影响，先得理解数学。第 VIII 部分的反思带有结束语的意思，是离开这本书的适当的时候。

## 5. 交叉引用

从一开始，《数学指南》这本书就计划要有大量的交叉引用（即在书内引用本书

内另外地方). 在这篇序里面就已经有了一两次交叉引用了, 而这种情况我们用楷体来表示. 例如引用辛流形[III.88], 就表示辛流形将在第III部分的第 88 个条目里讨论, 而引用理想类群[IV.1 §7], 则把读者带到第IV部分的第一个条目的 §7(总之, 交叉引用的数字首先是一个罗马数字, 表示哪一部分, 紧接着的一个阿拉伯数字则表示哪一个条目, 而文字就是这个条目的标题, 或条目内的相关内容. 每一条目分成若干节, 引用时就需要标明节号, 例如 [IV.1 §7] 就表示进入这一条目后的第 7 节, 节下面有小节 (subsection) 和小小节 (subsubsection), 这就用逗号表示. 标题中的文字就是这一节或小节的标题或其中的内容. 在正文中, 条目的标题放在双线里面(中译本没有双线), 而节与小节的标题则放在正文内节或小节的起始处, 记号 § 则不再出现. 在小小节以下有时还有“小小小节”(subsubsubsection), 所以还会出现 §3.1.2 这样的记号).

我们尽了最大努力来编写一本读起来很愉快的书, 而交叉引用的目的也是希望有助于使读者愉快. 说来也怪, 因为在读书时要中途打断, 花上几秒钟去查阅书中其他地方, 本来会使人感到麻烦. 然而, 我们也试图使得每一篇文章读起来可以不必查找他处. 这样, 如果您不想追随这种交叉引用, 那么通常也可以不这么做. 重要的例外在于对各位作者, 曾经允许他们假设读者对于第 I 部分里讨论的概念有一些知识. 如果您全然没读过大学水平的数学课程, 我们建议您全文读一下第 I 部分, 这会大为减少读以下的条目时再到他处搜寻的必要.

有时一个概念是在一个条目里介绍的, 而又在同一条目里解释. 在数学文章里这时通用的规约是在定义这个词时, 用斜体来印这个词. 我们也想遵从这个规约, 但是在如本书条目这种非正式的文章里, 要想说清楚何时算是在定义一个新的或不熟悉的名词, 并不总是很清楚(再说, 中译本里, 楷体还有其他用处), 所以本书采用了一个粗略的规定: 凡是第一次见到一个词, 而且紧接着就对它进行解释, 这时就用黑体排印这个词. 对一些以后并未作解释的词, 有时我们也使用了黑体\*, 表示为了懂得下面的条目, 并不需要懂得这个词. 在更极端的情况下, 则使用双引号来代替黑体.

许多条目结尾处都有一个“进一步阅读的文献”的一节, 它们其实是对于进一步阅读的建议, 不要把它们看作是通常的综述文章后面所列的那种完整的参考文献. 与此相关的还有以下的事实: 《数学指南》主要关心的不在于对发现所讨论主题的数学家记述其功绩, 也不在于引述这些发现出处的文章. 对于这些原始根源有兴趣的读者, 在建议进一步阅读的书或文章里面或在因特网上可以找到这些资料.

---

\* 在翻译此书时, 我们有时也遵照其他数学文献的习惯, 把重要的概念、名词等用黑体排印. —— 中译本注

## 6. 本书是针对谁编写的

原来的计划是要求《数学指南》的全书对于任何具有良好的高中数学背景(包括微积分)的读者都是能接受的. 然而, 很快就变得很明显, 这是一个不可能实现的目标: 有一些数学分支, 对于至少知道一点大学水平数学的人来说就非常容易, 而企图向水平更低的人们来解释, 就没有什么道理了. 另一方面, 这个学科也有一些部分, 肯定能够对于没有这个额外经验的读者解释清楚. 所以, 我们最后放弃了这本书应该有一个统一的难度水平的想法.

然而, 可接受性仍然是我们最优先的考虑. 在全书里, 我们都力求在实际上可以做到在最低水平上来讨论数学思想. 特别是编者用了很大的力气, 避免任何自己不懂的材料进入本书, 而这一点成了一个很严重的限制. 有些读者会觉得一些条目太难, 而另一些读者又会觉得另一些条目太容易, 但是我们希望所有具有高中以上水平的读者都能享受本书的很实在的一大部分.

不同层次的读者都能够从《数学指南》中得到些什么? 如果您已经着手在读一门大学数学课程, 就会觉得这门课程给您提出了许多困难而又不熟悉的材料, 而您对于它们何以重要, 又引向何方, 则不甚了然. 这时, 使用《数学指南》就可以为您提供关于这个主题的一些展望(举一个例子, 知道什么是环的人的数目, 比能够说明为什么要关注环的人的数目要多得多, 本书的条目环, 理想与模 [III.81]和代数教[IV.1]就会告诉您关注环的理由是什么).

如果您读完了大学数学课程, 就可能会对做数学研究有了兴趣. 研究工作究竟是怎么回事? 大学本科课程, 在典型情况下, 极少能让您了解. 那么, 您怎么才能决定数学的哪一个领域在研究工作水平上确会使您有兴趣? 这件事并不容易, 但是您做的决定会产生极大区别: 要么您会幡然醒悟不搞数学了, 而博士学位也不要了, 要么您会继续在数学里走向成功的生涯. 这本书, 特别是第IV部分, 会告诉您, 不同类型的在研究工作水平上的数学家想的是什么, 从而可以帮助您在更加知情的基础上做出决定.

如果您已经是一个站住脚的数学家, 这本书对于您的主要用处可能是: 它将帮助您更好地理解您的同事们其实在做什么事情. 绝大多数非数学家, 当他们知道数学已经变得多么异乎寻常的专业化时, 都会非常吃惊. 近年来, 一个很好的数学家可能对于另一位数学家的论文完全看不懂, 哪怕二者的领域相当接近, 这并不是很罕见的事, 但这不是健康的状况. 做任何一件改善数学家之间的交流的事情都是一个好主意. 本书的编者通过仔细阅读这些条目受益匪浅, 我们希望许多其他人也能获得同样的机会.

## 7. 本书提供了哪些因特网未能提供的东西

《数学指南》的特性在某些方面类似于那些大型的数学网站，如维基百科的数学部分，还有 Eric Weinstein 的“Mathworld”(<http://mathworld.wolfram.com/>)。特别是交叉引用有一点超链接的味儿。那么，写这本书还有什么必要呢？

在目前，答案是还有必要。如果您曾经试过在因特网上查找一个数学概念，就会知道这是一件碰运气的事。有时候您会找到一个好的解释，给出您正在寻找的信息。但是，时常则并不如此。上面提到的那些网址肯定是有用的，对于本书没有涵盖的材料，我们也向您推荐在这些网址里去查找。但是这些网上的文章与我们这里的条目，写作的风格大不相同：网上的文章比较枯燥，更加注重以更简洁的方法来给出基本事实，而不是注重对这些事实的反思。在网上也找不到如本书第 I，II，IV，VII 和 VIII 部分里面的那些长文章。

有人觉得把大量材料集中成书本的形式是有好处的。但是，我们在上面已经提到了，本书并不是孤立的条目的简单汇集，而是仔细排列了次序，这样编纂出来的所有的书，都必定有线条形的构造，而这是网页所没有的。一本书的物理性质又使得翻阅一本书和在网上漫游是完全不同的体验：读过了一本的目录，对于全书就能找到一点感觉；而对于一个大的网站，您只能对正在读的那一页有点感觉。并不是每个人都同意这一点，或者反而觉得这是书本形式的一个很值得注意的优点，但是许多人无疑会觉得如此，而本书就是为这些人编写的。所以在目前《普林斯顿数学指南》还没有网上的对手，本书不是想与现有的网站竞争，而是想作为一个补充。

## 8. 本书的创意和团队<sup>①</sup>

编《普林斯顿数学指南》这样一本书的主意是 David Ireland 在 2002 年提出来的，那时他在普林斯顿大学出版社的牛津办事处工作。这本书的最重要的特点——它的书名，它如何由那些部分组成，以及有一部分应该是关于数学的主要分支的条目——这些都来自原来的想法。他来到剑桥看望我，讨论他的建议，而到了“图穷匕首见”的时刻（我知道会有这么一刻），他要求我来编辑此书时，我基本上是当场就接受了。

是什么促使我做出这个决定？部分地是由于他告诉我，并不希望我自己来做所有的事：不仅会有其他编者，还会有相当的技术与行政的支持。但是一个更基本的

<sup>①</sup> 原文标题是“*How the companion came into being*”，其内容是此书是怎样来策划，以及主编团队的组成，而未涉及具体的编辑工作。中译本改成现在的标题是为了与下一节相区别。——中译本注

理由是，写这本书的主意很像我自己做研究生时闲散时刻里有过的一个想法，那时我想，要是有什么地方能够找到一本写得很好的文集，把数学不同领域里的大的研究主题都展示出来，这该有多好。这样，一个小小的幻想就诞生了，而突然之间我就有机会把它变成现实了。

我们从一开始就觉得，这本书要包含相当多的历史思考，David Ireland 在我们见面以后很快就问 June Barrow-Green 是否准备担任另外一位编辑，特别负责历史部分。我们非常高兴，她接受了，而因为她的相当广泛的接触圈子，我们或多或少地能够和全世界的数学史家有了来往。

然后又见了好几次面，讨论书的内容，结果就是向普林斯顿大学出版社提出正式建议。出版社把这个建议发给一个专家顾问小组，而虽然有几位专家指出了—定会提的问题，就是这个计划大得惊人。所有的人都对它很有热情。下一阶段当我们开始寻找撰稿人的时候，我们遇到的热情也很明显。很多人对我们倍加鼓励，说是很高兴这样一本书正在筹划之中，也肯定了我们已经想到的事，即市场上确实存在空缺。在这个阶段，我们很得益于《牛津音乐指南》的编者 Alison Latham 的建议与经验。

2003 年中，David Ireland 离开了普林斯顿大学出版社，也带走了这几个计划。这是一个大的打击，我们惋惜没有了他对于这本书的远见与热情，我们希望最终编出来的书仍然类似于他原来之所想。然而，大约在同时又有了正面的发展，普林斯顿大学出版社雇佣了一家小公司：T&T Production Ltd，它的责任是把撰稿人送来的文档编成一本书，还要做许多大量的日常工作，例如寄出合同，提醒撰稿人交稿日期快到了，接收文档，对于已经做好的事情做记录等等，绝大部分这类工作都是 Sam Clark 做的，他在这方面的—工作特别出色，而且能奇迹般地保持好脾气。此外在不需要许多数学知识的地方，他还做了许多编辑工作（尽管作为—位前化学家，他比绝大多数人还是多懂得—点数学）。由于有 Sam 的帮助，我们不仅有了一本细心编辑的书，而且书的设计也很漂亮。要是没有他，我还真不知道这本书怎么能编撰出来。

我们继续举办正规的聚会，更详细地计划这本书，讨论其进展。这些聚会都是由 Richard Baggaley 很能干地组织和主持的，Richard Baggaley 也是普林斯顿大学出版社牛津办事处的。他一直这样做到 2004 年夏天由普林斯顿大学出版社的新的文献编辑（reference editor）Anne Savarese 接手为止。Richard 和 Anne 都起了很大的作用，而当我们忘记书的某些部分没有按计划进行时，他们就会提醒我们那些难办的问题，让我们按照出版业所要求的水平去做，而至少我对于这种水平还不能自然适应。

到 2004 年初，我们天真地以为已经到了编辑工作的后期，而现在我才懂得，其实还只是接近开始，哪怕有 June 的帮助，我们认识到需要我做的事情还多得很。这

时,我突然想起了一个人可以做理想的副主编,他就是 Imre Leader,我知道,他懂得这本书想要达到什么,以及怎样去达到.他同意了,很快就成了编辑团队不可少的一员,他还委托别人并且自己也编写了好几个条目.

到了 2007 年下半年,我们确实是到了后期.这时可以看得很清楚,如果再有外加的编辑方面的帮助,就可以使得结束这项我们已经拖过了日期的细致的工作,把书真正写完,变得容易得多. Jordan Ellenberg 和陶哲轩 (Terence Tao) 同意来帮助,他们的贡献是无价的.他们编辑了一些条目,自己写了另一些,还帮助我写了几条在我专业领域之外的主题的短条目,而且因为知道有他们在,就不会发生大的错误,所以我在知识上就放心了(如果没有他们的帮助,我可能要犯几个错误,但是对于仍然漏网的错误,我要负全责).编者写的条目都没有署名,但是在撰稿人名录下方有一个注,说明那些条目是哪位编者写的.

## 9. 编辑过程

要找到这样的数学家,既有耐心又能理解对方,能这样来向非专家和其他领域的同事来解释他们在做什么,这并不是一件容易事.数学家时常会假设对方知道什么事,而其实他们并不知道,要承认自己完全听糊涂了,也使人难堪.然而本书的编者曾经努力把这种听不懂的负担自己担起来.本书的一个重要特点在于它的编辑过程是一个非常主动的过程:我们没有简单地把条目委托出去,然后收到什么就算什么.有些稿子被完全抛开了,而新条目按照编者的评论重新写过.另一些需要做本质的改动,有时是撰稿人来改,有时则是编者来改.少数条目只做了很无谓的改动就接受了,但这只是极小的一部分.

撰稿人对于这样的处理表现出忍耐,甚至谢意,这对于编者一直是很受欢迎的惊喜,而且帮助编者在编辑本书的好多年里,能够坚持他们的原则.我们想回过头来向撰稿人表达我们的谢意,也希望他们同意认为这个过程还是值得的.对于我们,对于条目付出了这么大量的工作,而没有实实在在的回报是不可想象的.这里不是我自己来吹嘘,在作者自认为结果是如何成功的地方,但是在可接受性方面还需要做的改动之多,这种干预性的编辑工作在数学上又是如此罕见,我无法看出,这本书怎么会不是在好的方向上非同寻常.

要想看一看每件事花了多么长时间,看到撰稿人的水平,一个标志就是有那么多撰稿人,自从接受约稿以来,得到了很大的奖赏和荣誉.至少有三位撰稿人在写作时喜得贵子.令人悲痛的是,有两位撰稿人: Benjamin Yandel 和 Graham Allan,未能在他们有生之年亲眼看见自己的文章成书,但是我们希望这本书,虽然微小,却是对他们的纪念.



## 10. 致 谢

编辑过程的最初阶段当然是计划本书和找寻作者. 如果不是以下各位的帮助与建议, 这是不可能完成的. 他们是: Donald Albers, Michael Atiyah, Jordan Ellenberg, Tony Gardiner, Sergiu Klainerman, Barry Mazur, Curt McMullen, Robert O'Malley, 陶哲轩 (Terence Tao), 还有 Ave Wigderson, 他们都给出了建议, 这些建议对于本书的成形, 在某个方面有着良好的效果. June Barrow-Green 在她的工作中得到了 Jeremy Gray 和 Reinhard Siegmund-Schultze 的极大帮助. 在最后几个星期里, 承 Vicky Neale 善意担负了部分清样的校阅, 她在这方面的能力真令人吃惊, 找出了那么多万个我们自己绝看不出来的错误, 我们当然很愉快地改正了. 有许多数学家和数学史家耐心地回答了编者们的的问题, 这个名单很长, 我们再次向他们深致谢意.

我要感谢许多人对我的鼓励, 包括本书所有的撰稿人和我身边的家人, 特别是我的父亲: Patrick Gowers, 这些鼓励使我能一往直前, 哪怕这个任务如同大山一样. 我还要感谢 Julie Barrau, 她的帮助虽不那么直接, 却也同样不可少. 在编书的最后几个月里, 她负担了远远超出她的份额的家务. 由于 2007 年 11 月儿子的出生, 这大大改变了我的生活, 正如她已经改变了我的生活一样.