# 现代分析基础及其应用

张福保　编著

# Foundation of Modern Analysis and Its Application

科学出版社

# 现代分析基础及其应用

张福保　编著





科学出版社
北京

# 序　言

本书是在东南大学数学专业研究生的学位课程“现代分析基础”的讲义基础上编写而成的. “现代分析”(Modern Analysis), 按照 Bourbaki 学派的著作, 或者 Jean Dieudonné 的教科书所界定的内容, 已经基本包含在现在通称的“实分析”与“线性泛函分析”中了, 其特征是系统化、公理化的处理方式, 并追求高度抽象化. 因此, 按照德国数学家 Jürgen Jost 的说法, 我们已进入“后现代分析”(Postmodern Analysis) 时代, 其特征是更加注重非线性和应用. 同时, 我们假定读者对象是基础数学、应用数学和计算数学等专业的研究生, 或其他数学专业高年级研究生, 学习时间是一个学期. 再者, 我们重点考虑到了工科院校数学专业研究生的情况, 特别是体现东南大学应用数学专业的特色, 因此, 选材不求很专, 但有一定的广度, 同时, 侧重于在偏微分方程与动力系统方面的应用.

本书包括三个部分, 第一部分是 (后) 现代分析的基本理论, 主要包括 Banach 空间微分学、分歧与约化方法、微分流形基础等. 第二部分是拓扑方法及其应用, 主要介绍 Brouwer 度、Leray-Schauder 度理论及应用、半序方法与上下解方法、锥映射的拓扑度等. 第三部分是变分方法, 主要包括约束极值与近似极值、环绕与极小极大原理、指标与畴数等临界点理论以及它们在偏微分方程与动力系统中的应用初步, 以及与作者工作相关的变分课题的最新研究进展.

一方面, 对某些重要的、看似简单但初学者往往不易想清楚的问题尽可能给出详细的推导, 帮助读者加深对这些问题的理解. 为此我们还增加了相当数量的难度适中的例题与习题. 而另一方面, 我们也提到了相关课题最新的一些概念、成果和最基本的参考文献, 这样便于对此方向有兴趣的读者尽快进入该研究领域. 例如, Nehari 流形方法、Schrödinger 方程的基态解 (ground states)、强不定问题等课题. 在全书的最后一节还列出了与作者研究课题相关的一些最新进展.

我们认为, 60 个学时可以讲完本教材的主要内容.

线性泛函分析在 20 世纪 50 年代还被认为是很新兴的, 代表人物有中国科学院的关肇直、南京大学的曾远荣等前辈. 到了 20 世纪 70~80 年代, 非线性泛函分析逐渐成为数学中独立的研究分支, 而如今它已经成为数学中现代分析的基础, 并且在偏微分方程与动力系统等领域的应用取得了十分突出的成就, 同时也是其他学科中十分重要的工具. 其代表性人物包括一些 Fields 奖获得者, 如 P. Lions, Rabinowitz 等, 国内的张恭庆院士、龙以明院士以及郭大钧教授、陈文嫄教授等. 非线性泛函分析快速发展的背景是因为用线性模型来刻画现实世界已经越来越不能满足需要,

非线性数学工具伴随非线性科学的出现就成为必然. 线性泛函分析主要研究线性空间和线性算子, 包括线性方程的解的问题, 如著名的有界线性算子的逆算子定理、开映射定理、闭图像定理、有关全连续线性算子方程的 Riesz-Schauder 理论等. 非线性比线性的情况通常要复杂得多. 但是, 人们还是设法推广或改进了这些线性的结果, 同时针对非线性问题, 人们专门发展出了一些行之有效的方法, 主要包括拓扑与变分方法, 这些正是构成现代分析的主要内容, 也是本教材的主要内容.

先看一个例子. 考虑典型的椭圆方程

$$\Delta u(x) = H(x, u(x)), x \in \Omega.$$

一般来说, 它是一个非线性的, 只有当 $H$ 关于第二个变量是线性的, 我们才有线性椭圆方程

$$\Delta u(x) + cu(x) = g(x), x \in \Omega.$$

这时可用 Riesz 表现定理先求其弱解, 然后再用正则化方法求经典解. 非线性方程怎么处理? 我们同样可把方程的求解转化为求抽象算子的零点或不动点. 例如上述方程可抽象为算子方程

$$Lu = f(u), \text{其中}, \ Lu = \Delta u, \ f(u)(x) = H(x, u(x)),$$

或一般地研究非线性算子方程 $Tu = 0$ 在某抽象空间的零点或求 $T$ 的不动点. 压缩映象原理就是大家熟悉的求不动点的一个重要方法, 本书主要介绍的方法是拓扑方法, 主要是指拓扑度方法, 它把找解问题归结为证明拓扑度不等于 0, 这已经成为经典的、一般的求解方法, 并渗透到数学的许多分支, 并往往成为“最后”的手段. 本书要介绍的找解的另一种方法, 称为变分方法, 亦即临界点理论, 它是把找解归结为某泛函的导数的零点, 即临界点, 即把上述偏微分方程作为某泛函的欧拉–拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程. 这是近 30 年来得到迅速发展, 并且在应用上不断取得突破的数学研究分支. 上述这两种方法都要求我们先研究函数空间 (无穷维空间) 及其上的非线性映射的基本概念与性质, 这主要就是 Banach 空间微分学, 其实, 微分学也是研究非线性映射的线性化方法的基础. 当然, 作为后现代分析, 它可以包含的题材还有很多, 限于篇幅与本人的学识所限, 可能挂一漏万, 不到之处敬请谅解.

编著者

2013 年 5 月于九龙湖

# 目　录

# 第 1 章　Banach 空间微分学

本章的主要内容包括 Banach 空间概要、半序 Banach 空间、非线性映射的连续性和有界性、全连续性以及微分学等. 特别是隐函数定理和反函数定理, 这是两个非常有用的基本定理, 而且还有各种推广, 是现代分析学的基础. 另外, 我们也简要讨论微分流形基础、分歧与约化方法以及一些重要的非线性映射, 它们在研究微分方程与积分方程中有重要作用.

## 1.1　Banach 空间

比照线性泛函分析的模式, 我们首先介绍空间理论, 但 Banach 空间本身就是一个线性空间, 我们不能重复已有的空间理论. 在第一小节, 我们只列举几个最重要的以及本书后面经常要用到的结果. 第二小节则介绍 Sobolev 空间与嵌入定理, 包括无界区域上的嵌入定理. 第三小节则介绍半序 Banach 空间与锥, 这既是 Banach 空间理论的深化, 也为后面研究锥上的拓扑度作准备.

### 1.1.1　Banach 空间与线性算子理论概要

假设读者已经熟悉通常的实分析和线性泛函分析的基本知识. 内容可参见文献 [2]、[11]、[12] 和 [72].

1. Banach 空间定义及重要例子

**定义 1.1.1**　设 $X$ 是数域 (实数域或复数域) $K$ 上的线性空间, 函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$, 满足

(1) (正定性) 对任意 $x \in X$, 有 $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) (齐次性) 对任意 $x \in X, \alpha \in K$, 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(3) (三角不等式) 对任意 $x, y \in X$, 有 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

称为是 $X$ 上的一个范数. 范数 $\|\cdot\|$ 有时也记为 $|\cdot|$. 定义了范数的线性空间, 称为赋范空间, 记为 $(X, \|\cdot\|)$, 简记为 $X$. 由范数 $\|\cdot\|$ 可自然导出距离

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

因此, 点列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x$ 当且仅当 $\|x_n - x\| \to 0$. 此时的收敛也称为强收敛, 或按范数收敛. 完备的赋范空间称为Banach 空间. 所谓完备是指按照范数或距离, 每个Cauchy列都收敛.

**例 1.1.1** $\mathbb{R}^n$ 是有限维的Banach 空间.

**例 1.1.2** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $k$ 是非负整数. $\Omega$ 上 $k$ 次连续可微函数所构成的空间记为 $C^k(\bar{\Omega})$, 函数 $u$ 的范数定义为

$$\|u\| = \max_{|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|,$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是重指标, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, 而

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

容易验证这是一个无穷维Banach空间.

特别地, $k = 0$ 对应连续函数空间 $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

**例 1.1.3** 设 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是一个测度空间. 特别地, 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的Lebesgue 可测集. $p \in [1, \infty)$, 定义 $L^p$ 可积函数空间如下:

$$L^p(\Omega, \mu) = \{u: \text{可测}, \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}\mu < \infty\},$$

并定义 $u$ 的范数为

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**例 1.1.4** 设 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 是一个测度空间, $\mu$ 关于 $\Omega$ 是 $\sigma$ 有限的. 如果 $\Omega$ 上可测函数 $u$ 与 $\Omega$ 上的一个有界函数几乎处处相等, 则称 $u$ 是 $\Omega$ 上的一个本性有界函数. 记 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 为 $\Omega$ 上一切本性有界函数的全体, 并定义如下的范数:

$$\|u\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0,\, E\subset\Omega} \left(\sup_{x\in\Omega\setminus E} |u(x)|\right).$$

例 1.1.2~ 例 1.1.4 都是十分重要的由函数构成的无穷维 Banach 空间.

2. 有界线性算子与泛函

**定义 1.1.2** 设 $X, Y$ 是数域 $K$ 上的Banach空间, 映射 $T: X \to Y$ 称为线性映射, 如果

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \forall \alpha, \beta \in K,\ x, y \in X.$$

特别地, 如果 $Y = K$, 即 $T$ 取值于数域 $K$, 则称 $T$ 为 $X$ 上的线性泛函.

如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in X,$$

则称 $T$ 是 $X$ 上的有界线性算子.

易见, 对线性算子而言, 有界性等价于在原点的连续性, 也等价于在每一点的连续性.

记 $L(X,Y)$ 表示 $X$ 到 $Y$ 上的有界线性算子的全体, 则它按自然方式构成线性空间, 并且按算子范数 $\|T\| \equiv \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ 构成 Banach 空间.

特别地, 记 $L(X,K)=X^*$, 称为 $X$ 的共轭空间或对偶空间, 它也是 Banach 空间. 如果 $X^{**}\equiv(X^*)^*=X$, 则称 $X$ 是自反 Banach 空间.

**例 1.1.5** ($L^p(\Omega,\mu)(p>1)$ 空间上的有界线性泛函及其共轭空间) 设 $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ 是一个 $\sigma$ 有限的测度空间, 对任何 $u\in L^p(\Omega), v\in L^q(\Omega)$, 其中, $p,q$ 是共轭的, 即满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 定义泛函 $f(u)=\int_\Omega uv\mathrm{d}\mu$, 则易见 $f$ 是有界线性的, 并且这是 $L^p(\Omega,\mu)$ 上有界线性泛函的唯一表示形式. 因此 $L^p(\Omega,\mu)^*=L^q(\Omega,\mu)$.

**定理 1.1.1** (Hahn-Banach 延拓定理) 设 $X$ 是Banach空间, $L\subset X$ 是线性子空间, $f$ 是定义在 $L$ 上的有界线性泛函, 则 $f$ 可以延拓到整个空间上, 且保持范数不变, 即存在 $X$ 的有界线性泛函 $F$, 满足条件:

(1) $F(x)=f(x), \forall x\in L$;

(2) $\|F\|_X=\|f\|_L$.

**推论 1.1.1** 设 $X$ 是Banach 空间,$\forall x_0\in X, x_0\neq 0$, 则必存在 $X$ 上的有界线性泛函 $f$, 满足:

(1) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(2) $\|f\|=1$.

3. 最佳逼近

在数学分析中我们讨论过最佳逼近问题. 例如, Taylor 公式就是用幂函数系 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$ 来逼近给定函数 $f(x)$, 且若令 $s_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 则当且仅当 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ 时, $s_n(x)$ 与 $f(x)$ 最“靠近”.

同样, 若用三角函数系 $\{\cos nx,\sin nx, n=0,1,\cdots,\}$ 来逼近给定函数 $f(x)$ 时, 当且仅当采用 Fourier 系数时为最佳逼近. 要刻画逼近, 必须选定尺度. 例如, 对三角函数系, 我们通常选 $L^2$ 空间. 下面我们抽象地讨论这个问题.

**定理 1.1.2** 设 $X$ 是Banach 空间, $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 $X$ 中给定的线性无关向量, $a\in X$ 是任一给定向量, 则存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in K$, 称为最佳逼近系数, 使得

$$\left\|a-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\right\|=\min_{x\in K^n}\left\|a-\sum_{i=1}^n x_ie_i\right\|, \tag{1.1.1}$$

其中, $K^n=K\times K\times\cdots\times K$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

**证明**　令

$$F(x)=\Big\|a-\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big\|,\ P(x)=\Big\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big\|,$$

则 $F, P$ 是 $K^n$ 上的连续函数, 且在单位球面 $S_n=\{x\in K^n \big| |x|=1\}$ 上 $P(x)$ 大于 0, 其中 $|x|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$. 因此有正的最小值, 记为 $m$. 由此可得

$$P(x)\geqslant m|x|,\forall x\in K^n,\quad \|F(x)\|\geqslant m|x|-\|a\|\to+\infty,\ |x|\to\infty.$$

因此 $F$ 有最小值. □

记 $F$ 的最小值点为 $b=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$, 则式 (1.1.1) 表明,

$$\rho(a,b)=\|a-b\|=\rho(a,M)=\min_{x\in M}|a-x|,$$

其中, $M$ 表示由向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 张成的 $n$ 维空间. 我们称 $b\in M$ 是 $a$ 在 $M$ 上的最佳逼近元, 或投影.

**推论 1.1.2**　给定Banach 空间 $X$ 的有限维子空间 $M$, 则 $X$ 中任一向量在 $M$ 中都有最佳逼近元, 或投影.

为讨论投影的唯一性, 需要严格凸的概念.

**定义 1.1.3**　Banach 空间 $X$ 称为严格凸的, 如果对单位球面上任何不同的两点 $x,y$, 其凸组合必在单位球内, 即

$$\|x\|=\|y\|=1,x\neq y,\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1\Longrightarrow\|\alpha x+\beta y\|<1.$$

**注 1.1.1**　对任何Banach 空间 $X$, 显然有 $\|\alpha x+\beta y\|\leqslant\alpha+\beta=1$, 因此, 上式的关键是严格小于 1.

**注 1.1.2**　函数空间 $L^p(\Omega,\mu)(1<p<\infty)$ 是严格凸的, $C[0,1]$ 和 $L^1(\Omega,\mu)$ 都不是严格凸的.

**性质 1.1.1**　设 $X$ 是严格凸的Banach空间, 则 $X$ 中任一向量在 $M$ 中都有唯一最佳逼近元.

**证明**　设 $b,b'$ 都是 $a$ 的最佳逼近元, 且 $b\neq b'$, 则

$$\|a-b\|=\|a-b'\|=d=\min\{\|a-x\|,x\in M\}>0,$$

于是对任何 $\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$, 有

$$\|a-(\alpha b+\beta b')\|=\|\alpha(a-b)+\beta(a-b')\|=d\|\alpha\left(\frac{a-b}{d}\right)+\beta\left(\frac{a-b'}{d}\right)\|<d,$$

矛盾. □

4. 空间为有限维的刻画

我们知道有限维空间的有界闭集等价于紧. 下面的结论说明, 这一性质是有限维的特征.

**定理 1.1.3** Banach 空间 $X$ 是有限维的充分必要条件是: 其单位球面是列紧的.

**证明** 只证充分性. 此时单位球面 $S_1$ 列紧, 要证 $X$ 是有限维. 反证法. 假设 $X$ 是无穷维. 则对 $x_1 \in S_1$, 必存在 $x_2 \in S_1$, 使得 $\|x_2 - x_1\| \geqslant 1$. 事实上, 任取 $y \notin M_1 \equiv \mathrm{span}\{x_1\}$, 存在 $x \in M_1$, 使得 $\|y - x\| = d \equiv \rho(y, M_1) > 0$. 取 $x_2 = \dfrac{y-x}{d}$, 则 $x_2 \in S_1$, 并且

$$\|x_2 - x_1\| = \frac{1}{d}\|y - (x + \mathrm{d}x_1)\| \geqslant 1.$$

同样, 存在 $x_3 \in S_1$, 使得 $\|x_3 - x_i\| \geqslant 1, i = 1, 2$, 一般的, 设有 $x_i \in S_1, \|x_i - x_j\| \geqslant 1$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$, 我们可以找到 $x_{n+1} \in S_1$, 使得

$$\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

事实上, 由 $M_n \equiv \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \neq X$ 知, 可取 $y \notin M_n$, 并按定理 1.1.2, 有 $x \in M_n$, 使得 $\|y - x\| = d \equiv \rho(y, M_n) > 0$, 令 $x_{n+1} = \dfrac{y-x}{d}$, 则 $x_{n+1} \in S_1$, 且

$$\|x_{n+1} - x_i\| \geqslant 1,$$

因此可构造 $S_1$ 上一列 $\{x_n\}$, 彼此距离大于等于 1, 此与 $S_1$ 列紧矛盾. □

**推论 1.1.3** Banach 空间 $X$ 是有限维的当且仅当 $X$ 中任一有界集是列紧的.

应用上述方法类似可证下面的 Riesz 引理.

**引理 1.1.1** (Riesz 引理) 设 $Y$ 是 $X$ 的闭的真子空间, 那么对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S_1$, 使得

$$\rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|y - x_0\| > \varepsilon.$$

5. 凸集分离定理

**定义 1.1.4** (1) 设 $X$ 是赋范空间, $a \in X, M$ 是 $X$ 的线性子空间, 则

$$a + M \equiv \{a + x : x \in M\}$$

称为线性子流形.

(2) 设 $X$ 是赋范空间, $f$ 是 $X$ 上的非零的有界线性泛函, $r$ 是任意给定的实数. 我们称集合

$$H = f^{-1}(r) = \{x \in X : f(x) = r\}$$

为 $X$ 的超平面, 而称集 $f^{-1}(r,+\infty)$ 和 $f^{-1}(-\infty,r)$ 为由超平面 $H$ 所确定的半空间, 它们分别位于 $H$ 的两侧.

(3) 设 $A,B$ 是 $X$ 中的两个子集, 如果存在超平面 $H$, 使 $A,B$ 分别位于 $H$ 的两侧, 即分别位于由 $H$ 确定的两个半空间中, 则称 $A,B$ 被超平面 $H$ 所分离. 进一步, 如果还有 $A\cap H=\varnothing, B\cap H=\varnothing$, 则称 $A,B$ 被 $H$ 严格分离.

(4) 设 $A$ 是 $X$ 的子集, $H$ 是 $X$ 的一个超平面, 如果 $A$ 位于 $H$ 的一侧, 并且 $H\cap A\neq\varnothing$, 则称 $H$ 是 $A$ 的支撑超平面.

(5) $X$ 的线性子空间 $M$ 称为 $X$ 的极大线性子空间, 如果真包含 $M$ 的线性子空间只有 $X$ 本身.

容易证明下面的命题.

**命题 1.1.1** (1) $M$ 是极大子空间当且仅当 $\forall x_0\in X\backslash M$, 有 $X=\{kx_0|k\in\mathbb{R}\}\oplus M$.

(2) $H$ 是超平面当且仅当 $H=x_0+M$, 其中 $M$ 是极大子空间.

**定理 1.1.4** (Mazur 定理) 设 $C_1,C_2$ 是Banach空间 $X$ 中的凸子集, $C_1$ 的内部 $C_1^\circ\neq\varnothing$, 且 $C_1^\circ\cap C_2=\varnothing$, 那么, 存在超平面 $H$ 分离 $C_1,C_2$.

特别地, 设 $C_2=x_0+X_0$ 是线性子流形, 则存在超平面 $H$, 使得 $C_2\subset H$, 且 $H\cap C_1^\circ=\varnothing$.

**证明** (1) 先证明 Hahn-Banach 定理的几何形式.

设 $C_1$ 是 $X$ 中的凸子集, $0\in C_1^\circ, x_0\notin C_1$, 则必存在分离 $x_0$ 与 $C_1$ 的超平面.

事实上, 设 $p$ 是 $C_1$ 的 Minkowski 泛函, 即

$$p(x)=\inf\{\lambda\in\mathbb{R}^+\big|x\in\lambda C_1\},$$

则 $p$ 是一个正其次、次可加的非零连续泛函, 且

$$C_1^\circ=p^{-1}([0,1)),\ \bar{C_1}=p^{-1}([0,1]),\ p(x_0)\geqslant 1.$$

设 $X_1=\operatorname{span}\{x_0\}$, $f_1(ax_0)\equiv ap(x_0)$, 则 $f_1$ 是 $X_1$ 上的有界线性泛函, 满足 $f_1(x)\leqslant p(x), \forall x\in X_1$. 根据 Hahn-Banach 定理, 必存在 $f_1$ 的有界线性延拓 $f$, 满足

$$f(x_0)=f_1(x_0)=p(x_0)\geqslant 1,\ f(x)\leqslant p(x),\forall x\in X.$$

由此可见, $f^{-1}(1)$ 即为所求的分离超平面.

(2) 在 (1) 中, $C_1$ 只要是内部非空的凸子集, 结论仍然成立. 事实上, 通过平移可把任一内点变为 0 点.

(3) 先设 $C_1\cap C_2=\varnothing$.

令 $C = C_1 - C_2 \equiv \{x = x_1 - x_2 \big| x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$, 则 $C$ 是非空凸集, 有内点, 且 $0 \notin C$. 由 (1) 的结论, 存在线性泛函 $f$ 和常数 $r$, 使得

$$\forall x \in C,\ f(x) \leqslant r;\ \forall x \in C^\circ, f(x) < r;\ 0 = f(0) \geqslant r.$$

因此,

$$f(y) \leqslant f(z), \forall y \in C_1,\ z \in C_2;\ f(y) < f(z), \forall y \in C_1^\circ,\ z \in C_2.$$

在 $\sup\limits_{y \in C_1} f(y)$ 和 $\inf\limits_{z \in C_2} f(z)$ 之间取一点 $r$, 则 $f^{-1}(r)$ 即为分离 $C_1$ 和 $C_2$ 的超平面.

(4) 对 $C_1^\circ$ 和 $C_2$ 应用上面 (3) 的结论可得

$$f(y) \leqslant s, \forall y \in C_1^\circ;\ f(z) \geqslant s, \forall z \in C_2.$$

由泛函 $f$ 的连续性即得

$$f(y) \leqslant s, \forall y \in \overline{C_1^\circ} = \overline{C_1};\ f(z) \geqslant s, \forall z \in C_2.$$

□

**推论 1.1.4** 设 $C$ 是 $X$ 中的闭凸集, 则 $\forall x_0 \notin C$, 必 $\exists f \in X^*$ 及实数 $\alpha$, 使

$$f(x) < \alpha < f(x_0), \forall x \in C.$$

**证明** 因为 $X \backslash C$ 开, 所以存在开球 $B(x_0, \delta)$, 使得 $B(x_0, \delta) \cap C = \varnothing$. 由定理 1.1.4 知, 存在非零的有界线性泛函 $f$, 使得

$$\sup_{x \in C} f(x) \leqslant \inf_{y \in B(x_0,\delta)} f(y).$$

进一步可以证明,

$$\inf_{y \in B(x_0,\delta)} f(y) < f(x_0). \tag{1.1.2}$$

若不然, $f(x_0)$ 是 $f$ 在球 $B(x_0, \delta)$ 上的最小值, 从而 $f(y - x_0) \geqslant 0, \forall y \in B(x_0, \delta)$, 亦即 $f(y') \geqslant 0, \forall y' \in B(0, \delta)$, 此与 $f$ 的线性矛盾.

最后取 $\alpha \in (\inf\limits_{y \in B(x_0,\delta)} f(y),\ f(x_0))$ 即可. □

6. 有界线性算子基本定理

**定理 1.1.5** (Banach 逆算子定理) 设 $X, Y$ 都是Banach 空间, $T \in L(X, y)$ 是双射, 则 $T^{-1} \in L(Y, X)$, 即 $T$ 是正则算子.

**定理 1.1.6** (共鸣定理或一致有界定理) 设 $X, Y$ 都是Banach 空间, 若算子族 $W \subset L(X, Y)$ 满足: $\forall x \in X$, $\sup\limits_{A \in W} \|Ax\| < \infty$, 即对每个固定的 $x \in X$, $Ax$ 关于 $A \in W$ 有界, 则 $Ax$ 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in X, \forall A \in W, \quad \text{亦即} \quad \|A\| \leqslant M, \forall A \in W.$$

7. 弱收敛与*弱收敛

泛函分析研究的 (函数) 空间大都是无穷维的, 而根据推论 1.1.3, 有限维空间成立的列紧性在无穷维空间不再成立, 即有界点列未必都有收敛子列. 为此引入弱收敛与*弱收敛的概念, 以便使无限维空间成立某种弱的列紧性.

**定义 1.1.5** (弱收敛与*弱收敛)　设 $X$ 是Banach 空间, $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$. 如果对每个有界线性泛函 $f$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0$, 也称 $x_0$ 是 $\{x_n\}$ 的弱极限, 记为

$$x_n \rightharpoonup x_0 (n \to \infty).$$

又若 $\{f_n\} \subset X^*, f_0 \in X^*$, 使对每个 $x \in X$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x),$$

则称 $\{f_n\}$*弱收敛于 $f_0$, 也称 $f_0$ 是 $\{f_n\}$ 的*弱极限, 记为

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0 (n \to \infty).$$

**定理 1.1.7**[12]　(1) 设 $C$ 是 $X$ 中的凸集, 则 $C$ 是闭的当且仅当 $C$ 是弱闭的.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x$, 则存在 $\{x_n\}$ 的凸组合点列 $\{y_n\}$ 依范数收敛于 $x$, 这里,

$$y_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n x_i, \quad \alpha_i^n \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n = 1, n = 1, 2, \cdots.$$

**定理 1.1.8**　自反Banach 空间是弱列紧的, 即若 $X$ 是自反的Banach空间, 则其每个有界点列有弱收敛子列.

8. Hilbert 空间

**定义 1.1.6**　从线性空间 $X$ 到线性空间 $Y$ 的二元映射 $\varphi(\cdot,\cdot): X \times X \to K$ 称为是共轭双线性的, 如果它关于第一个变元是线性的, 关于第二个变元是共轭线性的, 即

(1) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta(y, z), \forall \alpha, \beta \in K, x, y, z \in X$;

(2) $\varphi(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\varphi(z, x) + \bar{\beta}(z, y), \forall \alpha, \beta \in K, x, y, z \in X$.

如果 $K = \mathbb{R}$, 则共轭双线性称为双线性.

**定义 1.1.7** 设 $X$ 是数域 $K$ 上的线性空间, 共轭双线性函数 $(\cdot,\cdot): X\times X \to K$, 称为 $X$ 上的一个内积, 如果如下两条满足:

(1) (共轭对称性) $\forall x, y \in X$, 有 $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

(2) (正定性) $\forall x \in X$, 有 $(x,x) \geqslant 0$, 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$.

定义了内积的线性空间称为内积空间, 记为 $(X,(\cdot,\cdot))$, 简记为 $X$. 两元素 $x,y \in X$ 如果满足 $(x,y)=0$, 则称它们正交, 记为 $x \perp y$; 如果 $(x,y)=0, \forall y \in M$, 则称 $x$ 与集合 $M$ 正交, 记为 $x \perp M$.

令

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \tag{1.1.3}$$

则 $\|\cdot\|$ 满足定义 1.1.1 中范数定义, 因此内积空间是范数空间, (按照范数) 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

**命题 1.1.2** (1) Hilbert空间必是严格凸的Banach 空间.

(2) 在Banach 空间中为了在其中引入内积 $(\cdot,\cdot)$ 适合式 (1.1.3) 成为Hilbert空间, 当且仅当其范数满足如下平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X.$$

**例 1.1.6** (1) $\mathbb{R}^n$ 是有限维的实Hilbert 空间: $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$;

(2) $L^2(\Omega,\mu)$ 是Hilbert 空间: $(f,g) = \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu$;

(3) 例 1.1.2 中的 $C(\Omega)$ 不是内积空间.

在定理 1.1.2 及其推论中, $M$ 是有限维的. 对于无穷维的情况, 在 Hilbert 空间中也是成立的, 而且 $M$ 只要是闭凸子集.

**定理 1.1.9** 设 $M$ 是Hilbert空间 $X$ 中的闭凸子集, 那么对每个 $a \in X$, 存在唯一的 $b \in M$, 使得

$$\|a-b\| = \min_{x\in M} \|a-x\|.$$

当 $M$ 为闭线性子流形时, 这等价于

$$a - b \perp M - \{b\} \equiv \{z = x - b : \forall x \in M\}.$$

**证明** 存在性. 若 $a \in M$, 则取 $b=a$, 现在设 $a \notin M$. 因此 $d \equiv \rho(a,M) > 0$. 由定义, 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in M$, 使得 $d \leqslant \|a - x_n\| \leqslant d + \dfrac{1}{n}$. 下面只需证明 $\{x_n\}$ 收敛. 由平行四边形法则

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2) - 4\left\|\frac{(x_n-a)+(x_m-a)}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{m}\right)^2\right] - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

立知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此结论获证.

唯一性. 同样用平行四边形法则可得. □

**推论 1.1.5**　设 $M$ 是Hilbert 空间 $X$ 中的闭凸子集, 那么 $M$ 中存在唯一的模最小的元.

**定理 1.1.10** (Lax-Milgram 定理)　设 $\alpha(x,y)$ 是Hilbert空间 $X$ 上的一个共轭双线性函数, 满足:

(1) $\exists C>0$, 使得 $\|\alpha(x,y)\|\leqslant C\|x\|\|y\|, \forall x,y\in X$ (有界性条件);

(2) $\exists \delta>0$, 使得 $\alpha(x,x)\geqslant \delta\|x\|^2, \forall x\in X$ (强制性条件),

那么存在唯一的正则算子 $A$ 满足

$$\alpha(x,y)=(x,Ay), \forall x,y\in X, \|A^{-1}\|\leqslant \frac{1}{\delta}.$$

9. 线性算子的谱

算子谱的概念是矩阵特征值概念的推广, 微分方程、积分方程等的求解问题经常涉及谱的概念. 本段简要介绍有界线性算子的谱的概念.

**定义 1.1.8**　设 $X$ 是赋范线性空间, $T:D(T)\subset X\to X, \lambda\in C$ 为复数. 如果 $\lambda I-T$ 是正则算子, 那么称 $\lambda$ 是 $T$ 的正则点. $T$ 的正则点全体称为 $T$ 的预解集, 记为 $\rho(T)$. 而 $\rho(T)$ 的余集称为 $T$ 的谱集, 简称为谱, 记为 $\sigma(T)$. $\sigma(T)$ 中的复数称为 $T$ 的谱点.

$T$ 的谱点有以下几类:

(1) $\lambda I-T$ 没有逆算子, 这时必存在 $x\neq 0$, 使 $(\lambda I-T)x=0$, 称这种 $\lambda$ 为 $T$ 的点谱或特征值, 其全体记为 $\sigma_p(T)$.

(2) $\lambda I-T$ 有稠定逆算子, 而逆算子是无界的, 即 $\mathrm{Im}(\lambda I-T)\neq X$, 但 $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I-T)}=X$, 称这种 $\lambda$ 为 $T$ 的连续谱, 其全体记为 $\sigma_c(T)$.

(3) $\lambda I-T$ 有逆算子, 但 $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I-T)}\neq X$, 称这种 $\lambda$ 为 $T$ 的剩余谱, 其全体记为 $\sigma_r(T)$.

因此, $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$. 可以证明, 对有界线性算子 $T$, $\sigma(T)$ 是非空有界闭集, 且 $\rho(T)$ 为开集. 定义 $r(T)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$, 称为 $T$ 的谱半径.

**定理 1.1.11**　设 $T:X\to X$ 为有界线性算子, 则

(1) $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$;

(2) 当 $|\lambda|>r(T)$ 时, $\lambda$ 是 $T$ 的正则点, 且 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.

10. 全连续线性算子

全连续算子又称紧算子, 是最接近于有限维空间上的线性算子, 即矩阵的一类重要算子. 20 世纪初, 在讨论第二类线性积分方程时, 也得到了和线性方程组完