总主编:曹利军
执行主编:钟瑞栋

高等学校通识课程教材系列

高等数学

苏保河 刘中学 ◎ 主编

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

高等学校通识课程教材系列

总主编 曹利军
执行主编 钟瑞栋

高等数学

主编：苏保河 刘中学

厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS 国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/苏保河,刘中学主编. —厦门:厦门大学出版社,2013.8
高等学校通识课程系列教材
ISBN 978-7-5615-4714-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①苏…②刘…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 186608 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号　邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup@xmupress.com
厦门集大印刷厂印刷
2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷
开本:720×970　1/16　印张:27.5　插页:2
字数:479 千字　印数:1～3 000 册
定价:47.00 元

总 序

20世纪90年代中期以来，在“高校扩招”和著名的“钱学森之问”的大背景下，我国开启了新一轮关于高校人才培养目标的讨论，引发了又一轮大学素质教育的研究热潮。通识教育便是这种讨论和研究热潮的新产物。通识教育作为近代开始普及的一门学科，其概念在中国可上溯至先秦时代的六艺教育思想，在西方可追溯到古希腊时期的博雅教育理念。通识教育有两层意义：其一是指通才教育，其二是指全人教育。通识教育的目的在于提升大学生的人文素质和知识广度，培养人格健全的创新型和自我提升型全面发展的人才，以纠正高校普遍存在的过窄的专业教育、过弱的文化陶冶、过重的功利导向、过强的共性制约的弊病。

近年来，暨南大学以“学会生存、学会生活、学会发展”为目标，开设了300多门通识课程，涵盖了全校所有专业和学生，影响面大、涉及范围广。学校在资金配套、政策扶持等方面加强对通识教育的支持，把通识教育和专业教育放在同等重要的位置。然而，到目前为止，大多数通识课程还缺少成熟的教材，给教师授课和学生学习带来诸多困扰。秉持培养学生广博的见识、通融的思维、正确的伦理道德判断力以及社会责任感的理念，我们组织多年承担通识课程教学任务的部分中青年骨干教师，编写了这套“高等学校通识课程教材系列”。这套教材具有以下几个特点：

第一，这套教材的定位是“通识、精品”，是高品位的学术读物，能够满足开展通识教育以及大学生和其他社会读者获取知识、提高素养的要求。

第二，这套教材注重启迪学习者的心智，促进其科学精神与人文素养、历史眼光与全球视野、批判意识及审美情趣的养成；教材具

有相应的学科范围和专业性，但又不同于专业教科书，既不是专业教材的压缩或简化，也不是科普读物。在内容的取舍上，坚持针对性原则，结合实际，精炼出本课程的基本思想、基本原理和基本方法，将最基础的东西传递给学生。

第三，在写作风格上，教材力求表达简洁，概念明确，方法具体，基本技能可操作性强，让学生易于理解、掌握和实践。形式生动活泼，内容丰富有趣，以使本教材在教师教学和学生学习实践中，既实用又好用。

尽管我们对教材的编写怀抱敬畏之心，坚持一丝不苟的专业态度，但囿于自己的水平和能力，错误和疏漏之处在所难免。敬请学界同仁和读者不吝指正。

曹利军

2013 年 3 月

内容提要

本书共分为九章,包括函数与 Mathematica 简介、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程简介等内容。其中第一章至第六章由苏保河编写,第七章至第九章由刘中学编写。各章配有习题,并附有习题参考答案。本书的特点是将功能强大的计算机和数学软件 Mathematica 融入高等数学教学之中,力图降低学生的学习负担,提高学生的数学能力。参加本书审稿的有:吴广庆、杜萍、王为民、洪莉、张越等,全书由苏保河教授审核定稿。

本书适用于经济管理类各专业本科生和对数学要求不太高的理工医农各专业本科生作为高等院校“高等数学”(或“微积分”)课程的教材或教学参考书;尤其适用于社科大学生作为通识课或选修课开设的“高等数学”(或“文科数学”)的课程用书。本书可供各类管理人员和有关专业技术人员参考。

讲授本教材内容,可根据学时多少、生源特征和教学目标作适当取舍,讲授全书学时可在 64～128 之间,或利用 32～64 学时讲授第一章至第六章。与传统教学内容相比,建议增加数学应用的讲授和训练,减少计算技巧的讲解和练习,让学生把数学的思想和方法留给自己,把枯燥繁杂的计算交给计算机。

前　言

高等数学是高等院校重要的基础课程，由于其逻辑性强、计算难度高，使我们在多年的教学实践中遇到极大挑战：

首先，教学课时不断压缩与教学内容有增无减的矛盾难以调和。2000 年以前，高等数学课程的学时普遍为周 4 学时×18 周×2 学期＝144 学时。近年来，受教学改革、节假日增多等影响，学时普遍被压缩为 120 学时以下，有些专业甚至压缩为周 3 学时×16 周×2 学期＝96 学时。另一方面，由于人们越来越认识到高等数学在经济管理和科学技术中的重要作用，教学内容有增无减。

其次，传统教学方法难以适应高等教育从精英教育向大众教育的转变。近年来，随着高校的大面积扩招，大学生不再都是百里挑一的高材生，对高等数学知识的理解能力整体上有所下降，不少学生学习高等数学比较吃力，学习积极性受到很大挫伤，学习效果不甚理想。

另外，学生培养目标与高等数学教学内容的矛盾日益突出。近年来，高等院校越来越注重培养受社会欢迎的“应用型人才”，而传统的高等数学教材偏重理论推导和习题演算，与实际应用严重脱节，难以培养学生利用数学知识解决实际问题的能力。

我们用什么来应对挑战？

荀子在《劝学》中说：“假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。”今天，功能最强大、使用最普及的“物”或许就是计算机了。我们认为，将功能强大的计算机和数学软件融入高等数学教学之中，能够有效解决学生数学基础薄弱和保证教学质量的矛盾，彻底破解棘手的数学计算问题，大大激发学生的学习兴趣，显著提高高等数学的教学质量，并为线性代数、概率论与数理统计等其他课程起到示范作用，为高等院校的教学改革和发展提供正能量。

将计算机和数学软件（本书采用 Mathematica）融入高等数学教学中，其优越性至少有以下几方面：

第一，Mathematica 软件能涵盖高等数学的所有内容。它能实现极限与

连续、导数与微分、极值与最值、不定积分与定积分、级数求和、多元函数微积分、微分方程求解等功能，包括计算、绘图，甚至部分证明，不存在教学内容上的盲区，不用担心内容的衔接与断档问题。

第二，Mathematica 软件不仅功能极其强大，而且具有良好的人机界面，操作方便，简单易学。利用 Mathematica 实现某数学功能时，只要在软件中输入简单的命令即可，学生很容易掌握。

第三，在理论知识讲授中穿插 Mathematica 的功能演示，既丰富了教学方法，也能减轻高等数学的抽象枯燥特征，使学生更加直观地理解高等数学知识，提高数学能力。

第四，对于基础较差的学生，即使他们没有很好地掌握高等数学的理论和技巧，也可以利用 Mathematica 软件实现相关运算，如求极限、极值、导数、积分等，使他们从抽象乏味的计算中解脱出来，有助于激发他们学习数学的兴趣和潜能，培养他们运用数学方法分析和解决实际问题的能力。

基于上述认识，我们将高等数学与计算机和 Mathematica 有机融合起来，在系统阐述高等数学知识的基础上，增加了利用 Mathematica 实现相关运算的内容。此外，我们还增加了若干经济管理的实际问题，通过建立数学模型和利用 Mathematica 运算，培养学生分析和解决实际问题的能力。

实践是检验真理的唯一标准，本教材的创新之处是否有生命力，能否有效改善高等数学的教学效果，还有待于实践的检验。欢迎各位同行集思广益，推动本教材的质量再上新台阶。

限于编者水平，教材中一定存在错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正，我们表示诚挚的谢意！

苏保河、刘中学

2013 年 5 月

目 录

第一章　函数与 Mathematica 简介

高等数学研究的主要对象是函数. 本章主要介绍关于函数的一些内容，包括集合、实数、函数的概念、函数的性质和初等函数等，最后简单介绍一个重要的数学软件 ——Mathematica，为学习高等数学奠定基础.

第一节　集合

一、集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，例如，某学院的学生、某图书馆的藏书、全体实数等等，都可以看成集合. 一般来说，具有某些特定性质的事物的总体称为**集合**，组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 集合也可以简称为集，元素也可以简称为元.

下面举几个集合的例子.

例 1　2012 年在中国领土上出生的人.

例 2　方程 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 的根.

例 3　曲线 $y = 2x^2 + 3x$ 上的点.

例 4　全体整数.

由有限个元素组成的集合称为**有限集合**，如例 1 和例 2；由无限多个元素组成的集合称为**无限集合**，如例 3 和例 4.

我们通常用大写字母 A,B,C 等表示集合，用小写字母 a,b,c 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \overline{\in} A$ 或者 $a \notin A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中. 例如，如果 $\mathbf{N}$ 表示全体非负整数(即自然数) 的集合，则 $2 \in \mathbf{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$.

集合具有确定性的特征，即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的. 例如，“大型动物”，“接近于 0 的数”，一般不是集合，因为组成它的对象不明确.

习惯上,全体**实数**的集合记作 $\mathbf{R}$,全体**有理数**的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体**整数**的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体**自然数**的集合记作 $\mathbf{N}$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 例如,$\{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}$ 是空集,因为满足条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

由所研究的所有事物组成的集合称为**全集**,记为 U. 全集是相对的. 例如,讨论的问题仅限于实数,则全体实数的集合为全集;但是,如果讨论的问题涉及复数,则全体实数的集合就不是全集.

常用下列方法表示集合:

(1) 列举法:列出集合的所有元素,并用花括号“{ }”括起来. 例如,由方程 $x(x-1)(x-2)=0$ 的根所组成的集合 A,可表示为 $A=\{0,1,2\}$.

(2) 描述法:设 $f(a)$ 为某个与 a 有关的法则,A 为满足 $f(a)$ 的一切元素 a 构成的集合,则记为 $A=\{a \mid f(a)\}$. 例如,由全体奇数组成的集合 A,可表示为

$$A=\{x \mid x=2n-1, n\in\mathbf{Z}\}.$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示,称为文氏图. 文氏图是用一个平面区域表示一个集合,以区域内的点表示集合内的元素,如图 1-1 所示.

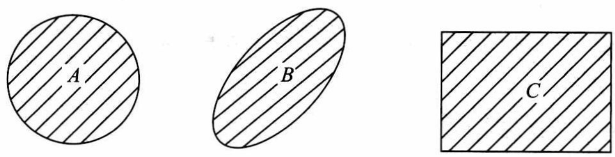

图 1-1

定义 1 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 含于 B 或 B 包含 A.

例 5 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{1,3,5\}$,则 $B\subset A$.

定义 2 设有集合 A 和 B,如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 和 B 相等,记作 $A=B$.

例 6 设 $A=\{2,4\}$,$B=\{x \mid (x-2)(x-4)=0\}$,则 $A=B$.

对于任意集合 A,B,C,有下列结论:

(1) $A\subset A$.

(2) $\varnothing\subset A$.

(3) 若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

二、集合的运算

定义 3　设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

并集 $A \cup B$ 如图 1-2 所示.

集合的并集有下列性质：

(1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

(2) $A \cup \varnothing = A, A \cup U = U, A \cup A = A$.

定义 4　设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$ 或 AB，即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

交集 $A \cap B$ 如图 1-3 所示.

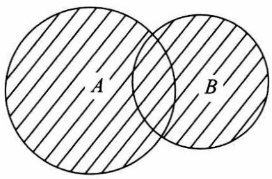

图 1-2

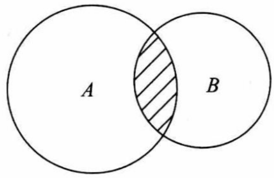

图 1-3

集合的交集有下列性质：

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$.

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A, A \cap A = A$.

例 7　设有集合 $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5\}$，则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \cap B = \{3\}.$$

例 8　设 A 为某学校学习韩语的人的集合，B 为学习计算机基础的人的集合，则

$A \cup B$ 表示或学习韩语或学习计算机基础的人的集合，

$A \cap B$ 表示既学习韩语又学习计算机基础的人的集合.

例 9　如果 A 为全体有理数集合，B 为全体无理数集合，则

$$A \cup B = \mathbf{R}, A \cap B = \varnothing.$$

定义 5　设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A - B$，即 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

差集 $A - B$ 如图 1-4 所示. 显然，$A - B = A - A \cap B$.

例 10　设 $A = \{1,2,3,4,5,6\}, B = \{1,3,5,7,9\}$，则 $A - B = \{2,4,6\}$.

定义 6 设有集合 A,全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集或余集,记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$.

补集 $\overline{A}$ 如图 1-5 所示. 显然,$A\cup\overline{A}=U$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

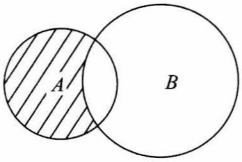

图 1-4

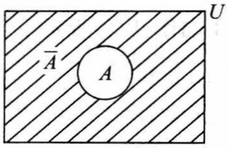

图 1-5

设 A,B,C 为三个任意集合,则有下列集合运算律:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配率 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 摩根率 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述集合运算律都可以利用集合相等的定义证明,我们仅证明 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$:

如果 $x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,因此 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,所以 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$;

反之,如果 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,即 $x\notin A\cup B$,因此 $x\in\overline{A\cup B}$,所以 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$;

因此 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

例 11 证明:$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$.

证 $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B=U\cap B=B$.

第二节 实数

一、实数与数轴

设有一条水平直线,在这条直线上取一定点 O,称为原点,规定一个正方向(习惯上规定由原点向右的方向为正方向),再规定一个长度,称为单位长

度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**. 如图 1-6 所示.

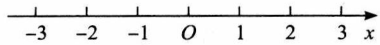

图 1-6

如不特别说明,本书所研究的数都是实数. 我们知道,实数包括有理数和无理数,有理数可以表示为有限小数或无限循环小数,或者表示为两个整数之比,而无理数为无限不循环小数,不能表示为两个整数之比. 每一个实数对应于数轴上某一点的坐标,反之,数轴上每一点的坐标对应于一个实数,因此,全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

在数学中,我们常常要用到绝对值的概念. 一个实数 x 的绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

$|x|$ 表示数轴上的点 x 与原点之间的距离.

绝对值有下列性质:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$.

(2) $|x| \geqslant 0$.

(3) $|-x| = |x|$.

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(5) 如果 $a > 0$,则 $\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$.

(6) 如果 $b > 0$,则 $\{x \mid |x| > b\} = \{x \mid x < -b$ 或 $x > b\}$

$$= \{x \mid x < -b\} \cup \{x \mid x > b\}.$$

(7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(8) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

(9) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

(10) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(11) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.

二、区间

设有两个实数 $a,b(a < b)$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a,b 为端点的**开区间**,记作(a,b),即$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$,如图 1-7 所示.

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a,b 为端点的**闭**

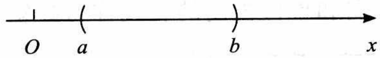

图 1-7

区间,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,如图 1-8 所示.

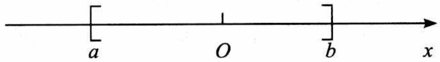

图 1-8

(3) 满足不等式$a<x \leqslant b$的所有实数x的集合,称为以a,b为端点的**半开区间**,记作$(a,b]$,即$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$,如图 1-9 所示.

图 1-9

(4) 满足不等式$a \leqslant x<b$的所有实数x的集合,称为以a,b为端点的**半开区间**,记作$[a,b)$,即$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$,如图 1-10 所示.

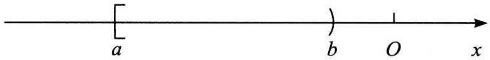

图 1-10

以上四类区间为**有限区间**,有限区间右端点b与左端点a的差$b-a$,称为区间的长度. 还有下面几类**无限区间**:

(5)$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$.

(6)$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$.

(7)$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

三、邻域

实数集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}(\delta>0)$在数轴上是以点$x_0$为中心、长度为$2\delta$的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,称为点$x_0$的$\delta$**邻域**,记为$U(x_0,\delta)$,其中$x_0$称为邻域的**中心**,$\delta$称为邻域的半径,即$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$,如图 1-11 所示.

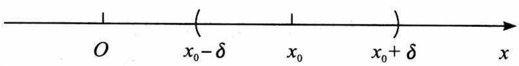

图 1-11