21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

主　编　李冬娜

副主编　张　霞　窦祖芳　张希娜　曹　斌

高等数学同步指要（下）

（第二版）

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

21世纪独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学同步指要(下)

(第二版)

主　审　张民悦
主　编　李冬娜
副主编　张　霞　窦祖芳　张希娜　曹　斌

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章知识体系

向量代数

- 向量的概念(定义、模、方向角、方向余弦、单位向量)
- 向量的运算(向量的坐标表示式、线性运算、数量积、向量积、混合积)
- 两向量的夹角及垂直、平行的条件

空间平面与直线

- 空间平面方程(点法式、一般式、三点式、截距式)
- 空间直线方程(标准式、一般式、参数式、两点式)
- 直线与平面的相互位置(二直线、二平面、直线与平面的夹角及平行、垂直条件)
- 距离公式(点到直线、点到平面、二直线之间的距离)

空间曲面与直线

- 曲面方程(旋转曲面、柱面)
- 曲线方程(一般式、参数式;空间曲线在坐标面上的投影)
- 二次曲面(球面、椭球面、抛物面、双曲面)

8.1　向量及运算

一、知识要点

1. 空间直角坐标系

(1) 坐标轴:三条过空间一定点 O,且两两垂直的具有相同的长度单位的数轴,分别记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴.

(2) 空间直角坐标系:由 x 轴、y 轴、z 轴构成的 $Oxyz$ 坐标系.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线,数轴的正方向通常符合右手法则.

(3) 坐标面:在空间直角坐标系中,由任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标面,分别为 xOy 面、xOz 面、yOz 面.

(4) 卦限:三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为卦限.共八个卦限,依次记为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ 卦限.

2. 向量的概念

(1) 向量:既有大小、又有方向的量称为向量.起点为 A 点、终点为 B 点的向量记为$\overrightarrow{AB}$.

(2) 向径：以坐标原点为始点的向量.

(3) 自由向量：与起点无关的向量，简称向量.

(4) 向量的模：向量的大小. 向量$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$.

(5) 单位向量：模等于 1 的向量.

(6) 零向量：模等于 0 的向量，记作$\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

(7) 向量相等：如果向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

(8) 向量的平行：两个非零向量$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

3. 向量的坐标

(1) 空间点 M 的坐标：过空间的一点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x,y,z，则 M 点在此空间直角坐标系中的坐标为 x(横坐标)、y(纵坐标)、z(竖坐标)，记作 $M(x,y,z)$. 空间点 M 与有序数组 x,y,z 之间是一一对应的关系，所以，空间点 M 的坐标在同一坐标系中也是唯一的.

(2) 空间两点间的距离公式：设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则两点距离为$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(3) 基本单位向量：在空间直角坐标系中，记$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴向的单位向量，称为这一坐标系的基本单位向量.

(4) 向量的坐标：设空间向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

4. 向量的模、方向角、投影

(1) 向量的模：$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

(2) 向量的方向角：如果非零向量$\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角分别为 α,β,γ，且 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，则称 α,β,γ 为向量$\boldsymbol{a}$ 的方向角.

(3) 投影：向量$\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影为

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad \text{记作 } \mathrm{Prj}_x\,\boldsymbol{a} \text{ 或} (\boldsymbol{a})x;$$
$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad \text{记作 } \mathrm{Prj}_y\,\boldsymbol{a} \text{ 或} (\boldsymbol{a})y;$$
$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,\quad \text{记作 } \mathrm{Prj}_z\,\boldsymbol{a} \text{ 或} (\boldsymbol{a})z,$$

即为$\boldsymbol{a}$ 的坐标.

(4) 方向余弦：称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，即为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

5. 向量的线性运算

(1) 向量的加法：设有两个向量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$与$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，平移向量使$\boldsymbol{b}$ 的起点

与$\boldsymbol{a}$的终点重合，此时，从$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的向量称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差记为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，向量的加法满足三角形法则和平行四边形法则.

坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}.$$

(2) 向量与数的乘法：向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$，规定$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反，当$\lambda=0$时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量，方向可以是任意的. 坐标表达式为$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_x)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$.

(3) 线性运算的性质：

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(加法交换律)；

② $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(加法结合律)；

③ $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(数乘结合律)；

④ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(分配律)；

⑤ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(分配律).

6. 利用坐标判断两向量相等、平行

(1) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$；

(2) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行：$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；即$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$，或$\dfrac{b_x}{a_x,}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}=\lambda$.

二、重点、难点解析及典型例题

1. 向量的线性运算

(1) $-\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$大小相等、方向相反；

(2) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$等于将$\boldsymbol{a}_2$的起点接$\boldsymbol{a}_1$的终点，$\boldsymbol{a}_1$的起点接$\boldsymbol{a}_1$的终点等，依次相接后，连接$\boldsymbol{a}_1$的起点与$\boldsymbol{a}_n$的终点所得到的向量；

(3) $\lambda\boldsymbol{a}$是数乘向量，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量；

(4) $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的一个线性组合，向量的分解就是将一个向量表示成另外若干个向量的线性组合.

2. 求向量的坐标

一般常用的方法有：

(1) 如果已知$\boldsymbol{a}$的起点坐标$A(x_1,y_1,z_1)$及终点坐标$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\};$$

(2) 如果已知$\boldsymbol{a}$按基本单位向量分解式$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$；

(3) 当向量$\boldsymbol{a}$的模$|\boldsymbol{a}|$及方向角α,β,γ已知时，

$$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\beta,|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\};$$

(4) 当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$平行时,$\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\}$($\lambda$为实数).其中,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时,$\lambda>0$;当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时,$\lambda<0$;

(5) 根据向量的运算性质确定.

例 8.1.1 把$\triangle ABC$底边BC三等分,D、E分别为三等分点,若$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$.

分析 试画图分析,利用向量的加法和数乘运算将$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$用$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{DE}$来表示.

解: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

例 8.1.2 写出$P(1,-2,-1)$的下列对称点的坐标:

(1) 关于三个坐标平面分别对称;

(2) 关于三个坐标轴分别对称;

(3) 关于原点对称.

分析 (1) 一点关于某一坐标面对称的点的坐标,只需保留对应于该坐标平面的两个坐标不变,改变另一个坐标的符号即得;

(2) 一点关于某一坐标轴对称的点的坐标,只需保留对应于该坐标轴的坐标不变,改变另外两个坐标的符号即得;

(3) 一点关于原点对称的点的坐标只需同时改变该点三个坐标的符号即得.

解: (1) P点关于xOy,yOz,zOx对称点的坐标分别为$(1,-2,1)$,$(-1,-2,-1)$,$(1,2,-1)$;

(2) P点关于x轴、y轴、z轴对称的点的坐标分别为$(1,2,1)$,$(-1,-2,1)$,$(-1,2,-1)$;

(3) P点关于原点对称的点的坐标为$(-1,2,1)$.

例 8.1.3 已知有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的长度为6,方向余弦为$-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$,$P_1$点的坐标为$(-3,2,5)$,求$P_2$点的坐标.

分析 参照向量坐标求法(1)和(3).

解: 设P_2点的坐标为(x,y,z),则$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x+3,y-2,z-5\}$,

由已知得
$$\overrightarrow{P_1P_2}=\left\{6\times\left(-\frac{2}{3}\right),6\times\frac{1}{3},6\times\frac{2}{3}\right\},$$

故有
$$x+3=6\times\left(-\frac{2}{3}\right),y-2=6\times\frac{1}{3},z-5=6\times\frac{2}{3},$$

解得
$$x=-7,y=4,z=9,$$

即P_2点的坐标为$(-7,4,9)$.

例 8.1.4 向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$,求$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$以及$\boldsymbol{c}$在$x$轴方向上的投影、投影向量.

分析 用向量的分量或坐标表达式进行计算,明确向量在坐标轴上的投影即为该向量的坐标的概念.

解: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-2(2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k})=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}=(-3,1,-9)$,

故$\boldsymbol{c}$在 x 轴方向上的投影为 -3,$\boldsymbol{c}$在 x 轴方向上的投影向量为 $-3\boldsymbol{i}$.

三、练习题

习题 8.1(A)

1. 把$\triangle ABC$的BC边五等分,设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4,再把各分点与点A连接,试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,表示向量$\overrightarrow{D_1A}$,$\overrightarrow{D_2A}$,$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

2. 设$\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示$2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$.

3. 求点$P(1,2,3)$关于xOy面的对称点与点$(2,1,2)$之间的距离.

4. $\boldsymbol{m}=\{3,2,1\}$,$\boldsymbol{n}=\{4,-1,3\}$,$\boldsymbol{p}=\{1,2,3\}$,求向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分向量.

5. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$ 计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

6. 已知向量$\boldsymbol{a}=\{2,1,3\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,0,-2\}$,向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,并且点 A 的坐标是$\{3,1,-3\}$,试求点 B 的坐标.

习题 8.1(B)

1. 已知$\boldsymbol{a}=\{2,2,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{8,-4,1\}$,则与$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为________,$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的夹角为________,$\boldsymbol{a}$ 在$\boldsymbol{b}$ 上的投影为________.

2. 设 $ABCD$ 是平行四边形,E 是 AB 的中点,AC 与 DE 交于 O 点,证明 O 点分别是 ED 与 AC 的三等分的分点.

3. 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求一点 M,使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

4. 一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求此向量和起点 A 的坐标.

5. 已知 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,4\}$，$\overrightarrow{AC}=\{5,-2,-14\}$，求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

8.2　向量的乘积运算

一、知识要点

1. 两向量的数量积

(1) 定义：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两向量，且它们之间的夹角为 θ，称数量 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，亦称内积，并记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

物理背景：设一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角.

(2) 数量积的性质：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，零向量和任何向量都垂直；

③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

④ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律)；

⑤ $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为数)(结合律).

(3) 数量积的坐标表示式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；

两向量夹角余弦的坐标表示式：设 $\theta=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，则当 $\boldsymbol{a}\neq 0,\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

(4) 数量积与投影：由 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta = |b|\cos(\boldsymbol{a}\,\hat{,}\,\boldsymbol{b})$，当$\boldsymbol{a} \neq 0$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\,\hat{,}\,\boldsymbol{b})$ 是向量$\boldsymbol{b}$ 在向量$\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. 同理，当$\boldsymbol{b} \neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

2. 两向量的向量积

(1) 定义：设向量$\boldsymbol{c}$ 是由两个向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 按下列方程式给出：

① $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

② $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从$\boldsymbol{a}$ 转向$\boldsymbol{b}$ 来确定，那么，向量$\boldsymbol{c}$ 叫做向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的向量积或叉积，记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，，即$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

物理背景：设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力$\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$ 的夹角为θ，力$\boldsymbol{F}$ 对点O 的力矩是一向量$\boldsymbol{M}$，它的模 $|M| = |\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$，而 M 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$ 与$\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向$\boldsymbol{F}$ 来确定的，根据向量积的定义，力矩$\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$ 与$\boldsymbol{F}$ 的向量积，即$\boldsymbol{M} = \overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

(2) 向量积的性质：

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$；

② $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$；

③ $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

④ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$(分配率)；

⑤ $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为数)(结合律).

(3) 向量积的坐标表示式：

设
$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$
则
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_zb_y\boldsymbol{i}.$$

二、重点、难点解析及典型例题

1. 数量积与向量积是本节的重点，在向量的各种关系中，主要是依赖它们的性质与运算求解各类问题的.

2. 数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |a|\cdot|b|\cos\theta$ 的主要用法：

(1) 计算两个向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的夹角(例 8.2.2)；

(2) 判别两个向量是否垂直(例 8.2.5)；

(3) 模的计算：$|a| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

3. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，$\boldsymbol{c}$ 与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，并使$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成右手系，所以$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积(例 8.2.4 和例 8.2.5).

4. 求满足一定条件的向量的坐标的常用方法：

(1) 当所求向量平行于向量$\boldsymbol{a} = (a_x,a_y,a_z)$(或与之共线) 时，可设所求向量为$\boldsymbol{P} = (\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$，然后利用其他条件求得 λ；

(2) 当所求向量垂直于向量$\boldsymbol{a}$ 时，可设所求向量$\boldsymbol{P} = (x,y,z)$，由此得一方程 a_xx+a_yy+

$a_z z = 0$,再与其他条件所建立的方程联系,求得 x, y, z(例 8.2.5);

(3) 当所求向量同时垂直于两个向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 时,即说明所求向量平行于向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$,故可设所求向量为 $\boldsymbol{P} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$,然后利用其他条件求得 λ.

5. 面积和体积问题

(1) 面积问题

① 以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

$$S_{\square} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|;$$

② 以平面三点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形的面积

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

(2) 体积问题,共面问题.

① 以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱边的平行六面体的体积

$$V = \pm [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}] = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

② 三向量共面的充要条件是:$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}] = 0$;

③ 四点共面的充要条件是:$[\overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}\ \overrightarrow{M_1M_4}] = 0$.

例 8.2.1　设 $\boldsymbol{a} = \{2, -1, 3\}, \boldsymbol{b} = \{1, 3, -4\}$. 求 $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$.

分析　利用向量数量积的坐标表示式.

解: $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\{2, -1, 3\} + \{1, 3, -4\} = \{5, 1, 2\}$,

$\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = \{2, -1, 3\} - 2\{1, 3, -4\} = \{0, -7, 11\}$,

于是　$(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = \{5, 1, 2\} \cdot \{0, -7, 11\} = -7 + 22 = 15$.

例 8.2.2　设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

分析　利用向量数量积的定义式:$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$.

解: $\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\sqrt{1 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

例 8.2.3　求向量 $\boldsymbol{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\boldsymbol{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影.

分析　利用当 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 时,$|\boldsymbol{a}| \cos\theta$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,

即
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}.$$

解:
$$\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{4 \times 2 + (-3) \times 2 + 4 \times 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{6}{3} = 2.$$

例 8.2.4 已知$\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$,求一个单位向量,使之既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$.

分析 利用向量积的定义即可.

解: 当$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$时,满足既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=(-1,3,5),$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35},$$

故满足条件的单位向量为$\pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}(-1,3,5)$.

例 8.2.5 已知四边形的四个顶点$A(1,-2,2)$,$B(1,4,0)$,$C(-4,1,1)$,$D(-5,-5,3)$.证明对角线AC与BD互相垂直,并求该四边形的面积.

分析 利用两向量垂直的条件$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$和以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积公式:$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解: 向量$\overrightarrow{AC}=\{-4-1,1+2,1-2\}=\{-5,3,-1\}$,

$$\overrightarrow{BD}=\{-5-1,-5-4,3-0\}=-3\{2,3,-1\}.$$

因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-3\times(-5\times2+3\times3+1\times1)=0$,

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,即对角线$AC\perp BD$.

由于对角线互相垂直,因此四边形$ABCD$的面积

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+(-9)^2+3^2}=\frac{21}{2}\sqrt{10}.$$

三、练习题

习题 8.2(A)

1. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求:(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times3\boldsymbol{b}$.

2. 已知$\boldsymbol{a}=\{2,2,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{8,-4,1\}$,则与$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为________,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________,$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影为________.

3. 设$\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,5)$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,且$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$,则$\boldsymbol{c}=$ ________.

4. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求 $\triangle ABO$ 的面积.

5. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿着直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,计算重力所做的功(长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

习题 8.2(B)

1. 设$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$ ________.

2. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求向量 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.

3. 设$\boldsymbol{a}=\{3,5,-2\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,1,4\}$,试求 λ 的值,分别使得:(1) $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直;(2) $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与$\boldsymbol{a}$ 垂直,并证明此时$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$取得最小值.

4. 用向量证明不等式：$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\cdot\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$，其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数，并指出等号成立的条件.

5. 设$\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,1,2\}$. 求同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$且在向量$\boldsymbol{c}$上投影是 14 的向量$\boldsymbol{d}$.

6. 设向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：(1) $\boldsymbol{a}$ 在$\boldsymbol{b}$ 上的投影；(2) 若$|\boldsymbol{c}|=3$，求$\boldsymbol{c}$，使得三向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所构成的平行六面体的体积最大.

8.3　平面的方程

一、知识要点

1. 平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上已知一点，向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$是该平面的法向量.

2. 平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，其中向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$是平面的法向量.

3. 平面的三点式方程：过 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 三点的平面方程为$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com