国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家出版基金项目

切比雪夫　彼得堡数学学派奠基人，机械大师，专攻经典问题，善用初等工具获高深结果。

爱尔特希　多产数学家，沃尔夫奖得主，无固定职位，世界各地游荡，与多人合作遍解数学难题。

影响数学世界的猜想与问题

潘承彪　著

从切比雪夫到爱尔特希（上）

——素数定理的初等证明

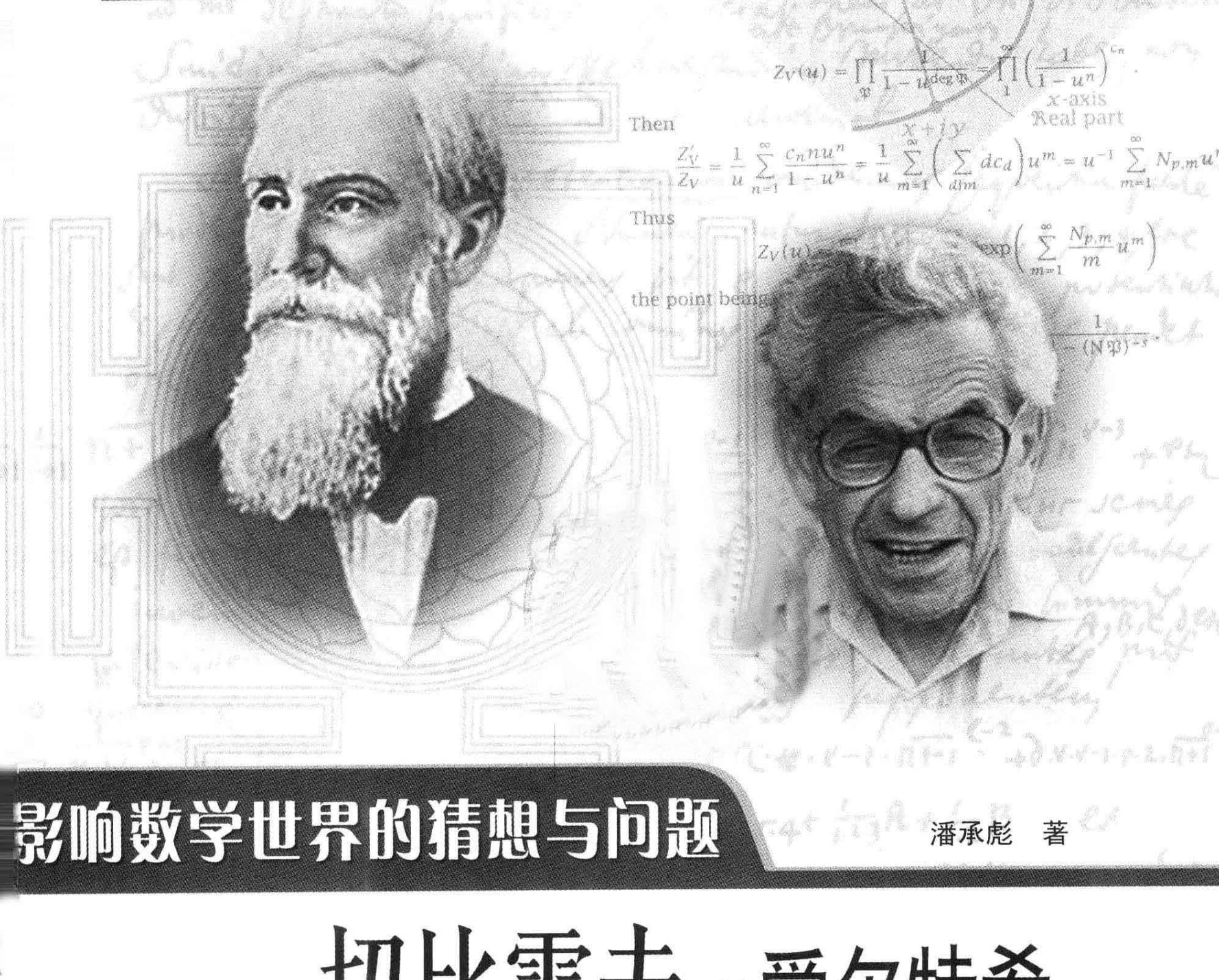
From Chebyshev to Erdös (I)

—The Elementary Proof of The Prime Number Theorem

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家出版基金资助项目



影响数学世界的猜想与问题

潘承彪 著

从切比雪夫到爱尔特希（上）

——素数定理的初等证明

From Chebyshev to Erdös (I)

—The Elementary Proof of The Prime Number Theorem

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要介绍素数定理的七个初等证明以及与之有关的切比雪夫不等式、Mertens 定理、素数定理的等价命题、Riemann Zeta 函数、几个 Tanber 型定理、𝕃 空间中的 Fourier 变化、Wiener 定理、素数定理的推广等。通过学习本书，对于了解数学各分支之间的相互联系，提高观察问题、分析问题和解决问题的能力，以至对素数定理作进一步的研究，是很有裨益的。

本书可供大学数学专业的师生，数学工作者及数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

从切比雪夫到爱尔特希．上/潘承彪著．—哈尔滨：
哈尔滨工业大学出版社，2013．7

ISBN 978-7-5603-3917-7

Ⅰ．①从…　Ⅱ．①潘…　Ⅲ．①素数-定理证明
Ⅳ．①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 314807 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杨万鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.25　字数 270 千字
版　　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3917-7
定　　价　48.00 元

◎ 目录

素数定理的历史

第一章

本章主要介绍素数定理证明的发展史,并同时介绍本书的内容安排(见 §2). 在 §1 及 §3 中分别介绍本书中常用的符号 O 和 $\ll$,以及数论函数$[x]$.

§1 符号 O 及 $\ll$

本书中经常要使用符号 O(读作"大欧")及 $\ll$(读作"小于小于"),前者是 E. Landau 引进的,后者是 И. М. Виноградов 引进的. 它们的意义是相同的,但在使用中各有优点.

定义 1 设 $\mathscr{M}$ 是给定的一个实数集合,$f(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的复值函数,$\phi(x)$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上的正值函数. 如果存在一个与变数 x 无关的常数 A,使得

$$|f(x)| \leqslant A\phi(x), x \in \mathscr{M} \tag{1}$$

那么就记作

$$f(x) = O(\phi(x)) \text{ 或 } f = O(\phi), x \in \mathscr{M} \tag{2}$$

或

$$f(x) \ll \phi(x) \text{ 或 } f \ll \phi, x \in \mathscr{M} \tag{3}$$

常数 A 称为符号 O(或$\ll$) 所包含的常数,简称 O(或$\ll$) 常数.

显然,这两个符号是不等式的缩写. 当 $\phi(x) \equiv 1$ 时,这两个符号表明$|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上有界. 一般说来,这表明了$|f(x)|$ 在集合 $\mathscr{M}$ 上的数量阶不超过 $\phi(x)$ 的数量阶. 例如

$$\sin(ax+b) = O(1), \sin(ax+b) \ll 1, -\infty < x < +\infty \tag{4}$$

$$\sin x = O(|x|), \sin x \ll |x|, |x| \leqslant \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$1-\cos x=O(x^2),1-\cos x\ll x^2,\ |x|\leqslant\frac{1}{2} \tag{6}$$

设 $b\geqslant a>0$,则有

$$x^a=O(x^b),x^a\ll x^b,x\geqslant 1 \tag{7}$$

$$x^b=O(x^a),x^b\ll x^a,0\leqslant x<1 \tag{8}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2}=O(|x|),\frac{x}{(x-1)^2}\ll|x|,\ |x|\ll\frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right),\frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$|x-1|\leqslant\frac{1}{2},x\neq 1 \tag{10}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2}=O\left(\frac{1}{|x|}\right),\frac{x}{(x-1)^2}\ll\frac{1}{|x|},\ |x-1|\geqslant\frac{1}{2} \tag{11}$$

最后三个例子表明,同一个函数在不同的集合上(实际上是在不同的点附近:$x=0,x=1,x=+\infty$),它的数量阶是不同的. 所以,可以说这两个符号是用来刻画函数在一个点的邻近的变化的数量阶的(包括有界、无界、无穷小、无穷大).

对任意固定的正数 δ,有

$$x=O(x^2),\ |x|\geqslant\delta \tag{12}$$

因为可取 $A=\dfrac{1}{\delta}$,但是

$$x=O(x^2),\ |x|\leqslant 1 \tag{13}$$

不成立,这是因为在 $x=0$ 处,x^2 是二阶无穷小,而 x 只是一阶无穷小. 这例子也表明常数 A 和所考虑的定义域 $\mathscr{M}$ 是有关的.

有时候函数 $f(x)$ 可依赖于某一参数 λ(或几个参数),这时常数 A 可能依赖于参数 λ,也可能不依赖于参数 λ. 有时这一点必须明确指出. 例如:式(4)中的例子,函数依赖于两个参数 a 和 b,但常数 A 可取作 1 而与参数无关,但若考虑 $\sin ax,-\infty<a<+\infty$,我们有

$$\sin ax=O(|x|),\ |x|\leqslant\frac{1}{2} \tag{14}$$

这时可取 $A=|a|$,但不能取 A 为某一常数. 这时,我们就说式(14)中的 O 常数与参数 a 有关,但若取 $\phi(x)=|ax|$,则

$$\sin ax=O(|ax|)$$

中的 O 常数就与参数 a 无关.

符号 O 和 $\ll$ 有两个简单有用的运算法则,设

$$f_1(x)=O(\phi_1(x)),f_1(x)\ll\phi_1(x),x\in\mathscr{M} \tag{15}$$

及

$$f_2(x)=O(\phi_2(x)),f_2(x)\ll\phi_2(x),x\in\mathscr{M} \tag{16}$$

则有

$$f_1(x)+f_2(x)=O(\phi_1(x)+\phi_2(x)),x\in\mathscr{M} \tag{17}$$

$$f_1(x)+f_2(x)\ll\phi_1(x)+\phi_2(x),x\in\mathscr{M} \tag{17'}$$

及

$$f_1(x)f_2(x)=O(\phi_1(x)\phi_2(x)),x\in\mathscr{M} \tag{18}$$

$$f_1(x)f_2(x)\ll\phi_1(x)\phi_2(x),x\in\mathscr{M} \tag{18'}$$

以上证明留给读者. 在作这些运算时,不难发现符号“$\ll$”用起来要比符号“O”方便,因为这类似于不等式的运算法则,下面举例说明其应用.

由式(5),(6)和(8),利用法则(17′),可得

$$e^{ix}-1=(\cos x-1)+i\sin x\ll|x|^2+|x|\ll|x|+|x|\ll|x|,|x|\leqslant\frac{1}{2} \tag{19}$$

由式(7),利用法则(17′),可得

$$\begin{aligned}&a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ll\\&|x|^n+|x|^{n-1}+\cdots+|x|+1\ll\\&|x|^n+|x|^n+\cdots+|x|^n=\\&n|x|^n\ll|x|^n,|x|\geqslant 1\end{aligned} \tag{20}$$

这里的 $\ll$ 常数和系数 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 及次数 n 有关.

由式(20)可得

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0|\geqslant|x|^m-A|x|^{m-1},|x|\geqslant 1$$

其中常数 A 和系数 b_i 及次数 m 有关. 所以当 $|x|$ 充分大时,即 $|x|\geqslant x_0=x_0(A)$ 时,有

$$|x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0|\geqslant\frac{1}{2}|x|^m,|x|\geqslant x_0$$

这样就证明了

$$(x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)^{-1}\ll|x|^{-m},|x|\geqslant x_0 \tag{21}$$

由式(20)及(21),利用法则(18′),即得

$$\frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}\ll|x|^{n-m},|x|\geqslant x_0 \tag{22}$$

这里我们可以取 x_0 和这两个多项式的系数和次数有关,而 $\ll$ 常数和这些参数无关.(为什么)

在数论中,我们往往并不需要知道一个函数的精确性状,而只要知道它的数量阶是否不超过某一简单函数的数量阶. 因此,以上例子表明符号 O 及 $\ll$ 在数论中是十分有用的.

符号 O 的一个优点是:我们可单独用 $O(\phi(x))$ 来代表某一个不需要(或不

可能)明确指出的函数$f(x)$,它满足$f(x)=O(\phi(x))$. 这一点用符号$\ll$是不适宜的. 关于这种用法,我们将在以后用到时指出.

最后,我们举几个与素数定理的误差项估计有关的例子.

由不等式

$$x \leqslant e^{x}, x \geqslant 0$$

可得

$$x^{c} \leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^{c} e^{acx}, x \geqslant 0, a > 0, c \geqslant 0 \tag{23}$$

所以,对任意实数$c > 0, \delta > 0$,有

$$x^{c} = O(e^{\delta x}), x \geqslant 0 \tag{24}$$

这里可取$A = \left(\frac{c}{\delta}\right)^{c}$. 令$x = \ln y$,可得

$$(\ln y)^{c} = O(y^{\delta}), y \geqslant 1 \tag{25}$$

在式(24)中令$x = (\ln y)^{\lambda}, 0 < \lambda < 1$,则有

$$(\ln y)^{c\lambda} = O(e^{\delta(\ln y)^{\lambda}}), y \geqslant 1 \tag{26}$$

即对任意正数$b > 0, \delta > 0, 0 < \lambda < 1$,有

$$(\ln y)^{b} = O(e^{\delta(\ln y)^{\lambda}}), y \geqslant 1 \tag{27}$$

其中O常数和b, δ, λ有关.

此外,容易证明(留给读者):对任意的$M > 0, 0 < \lambda < 1$及$\delta > 0$,有

$$e^{M(\ln y)^{\lambda}} = O(y^{\delta}), y \geqslant 1 \tag{28}$$

本书中还将用到分析中的两个常用符号:o(读作“小欧”)及$\sim$(读作“等价于”). 它们是用来比较无穷小及无穷大的阶(或级)的. 关于它们的定义和用法在所有数学分析教科书中均能找到.

§2 素数定理的历史

素数的基本性质 一个大于1的整数,除了1和它本身以外不能被其他正整数整除,就称为素数,也叫做质数. 通常用字母p, q等表示. 例如2,3,5,7,11,13,17,…… 都是素数. 设$x \geqslant 1$,我们以$\pi(x)$表示不超过x的素数的个数,不难算出

$$\pi(x) = 0, x < 2 \tag{1}$$

$$\pi(5) = 3, \pi(10) = 4, \pi(50) = 15$$

素数的最重要最基本的性质就是刻画正整数和素数之间关系的算术基本

定理①(见第二章 §2 的引理 1):每个大于 1 的整数 a 可以唯一的表示为

$$a = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_r^{\alpha_r} \tag{2}$$

其中 q_i 为素数,$q_1 < q_2 < \cdots < q_r$. 整数 $\alpha_i > 0$.

利用算术基本定理,L. Euler 证明了一个著名的恒等式,对实数 $s > 1$,有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{3}$$

其中 $\prod\limits_p$ 表示展布在全体素数上的乘积(见第三章 §4 引理 1). 这一恒等式实质上是算术基本定理的一个解析等价形式. 通过它把我们所不了解的素数和我们极其熟悉的自然数以非常明确的解析形式联系起来了.

对素数分布状况的研究是数论的一个重要组成部分. 它的一个中心问题就是研究函数 $\pi(x)$ 的性质. 还有一个著名问题,就是所谓"孪生素数猜想":存在无穷多个素数 p,使得 $p + 2$ 亦为素数,这一猜想至今尚未解决.

Euclid 的名著《几何原本》第九篇的命题 20 证明了:素数的数目比任何指定的数目都要多,即素数有无穷多个(见第二章 §1 的定理 1)

$$\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty \tag{4}$$

这样,把全体素数按大小排列就得到一个无穷序列

$$2 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < \cdots \tag{5}$$

后来发现在全体正整数中素数仅占很少一部分, 这就是 Euler 和 A. M. Legendre 提出和证明的下面的结果(见第二章 §3 定理 1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0 \tag{6}$$

什么是素数定理 大家知道,利用古老的 Eratosthenes 筛法,我们可以对很大的 x 求出所有不超过 x 的素数,因而也求出了 $\pi(x)$ 的值. 但是,人们始终得不到一个表示 $\pi(x)$ 的明确的公式或渐近公式. 为此,编制了许多素数表②,希望从这些经验数据中能得到一些启示,发现某种规律.

1800 年左右,根据数值计算,Legendre 提出了一个令人惊奇的精确的渐近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - 1.083\ 66}, x \to +\infty \tag{7}$$

1849 年,F. Gauss 在给 Encke 的一封信中说:1792 至 1793 年间,他通过考察在以一千个相邻整数为一段中的素数个数,发现对于大的值 x 素数的"平均分布密

---

① Euclid 的《几何原本》第九篇中的命题 14 即是这一定理.

② 一本很好的素数表是 D. H. Lehmer 编制的 List of Prime Numbers from 1 to 10 000 671, Carnegie Inst. Publ. 165, Washington, 1914.

度”应是$\frac{1}{\ln x}$,因而提出

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}\, x, x \to +\infty \tag{8}$$

其中

$$\mathrm{Li}\, x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} \tag{9}$$

称为对数积分(见第三章 §1 式(23) 和式(24)). 有时以

$$\mathrm{Li}\, x = \lim_{s\to 0}\left(\int_0^{1-s} + \int_{1+s}^x\right)\frac{\mathrm{d}u}{\ln u} \tag{10}$$

来代替 Li x,两者仅差一常数 Li 2 = 1. 04…. 容易证明:对任意实数 a,有

$$\frac{x}{\ln x + a} \sim \frac{x}{\ln x} \sim \mathrm{Li}\, x, x \to +\infty \tag{11}$$

所以渐近公式(7) 和(8) 基本上是一样的. 不过以后将看到 Gauss 的猜测更为深刻(见后面的式(30) 至式(33)). 我们把命题

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, x \to +\infty \tag{12}$$

或式(8) 称为素数定理. 有时这也叫做不带余项估计的素数定理.

令

$$R(x) = \pi(x) - \mathrm{Li}\, x \tag{13}$$

素数定理就是要证明

$$R(x) = o\left(\frac{x}{\ln x}\right), x \to +\infty \tag{14}$$

如果对 $R(x)$ 的阶作出更精确的估计,就称为带余项估计的素数定理.

从下表①所列出的数据,可清楚地看出素数定理的合理性,以及 Gauss 的猜测更为精确.

表 1

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	Li x	$\frac{\pi(x)\ln x}{x}$	$\frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}\, x}$
1 000	168	145	178	1. 16	0. 94
10 000	1 229	1 086	1 246	1. 13	0. 98
50 000	5 133	4 621	5 167	1. 11	0. 993
100 000	9 592	8 686	9 630	1. 10	0. 996

① 表中的$\frac{x}{\ln x}$及 Li x 的值均为取整的近似值. 它们和 $\pi(x)$ 的比值亦为近似值.

续表 1

x	$\pi(x)$	$\dfrac{x}{\ln x}$	$\mathrm{Li}\, x$	$\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}$	$\dfrac{\pi(x)}{\mathrm{Li}\, x}$
500 000	41 538	38 103	41 606	1.090	0.998
1 000 000	78 498	72 382	78 628	1.084	0.998
2 000 000	148 933	137 848	149 055	1.080	0.999 1
5 000 000	348 513	324 149	348 638	1.075	0.999 6
10 000 000	664 579	620 417	664 918	1.071	0.999 4

Chebyshev **的贡献**　首先对素数定理的研究作出了极为重要贡献的是 Chebyshev. 在 1852 年左右,他证明了存在两个正常数 C_1 与 C_2,使不等式(见第二章 §4 定理 1)

$$C_1 \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant C_2 \frac{x}{\ln x}, x \geqslant 2 \tag{15}$$

成立,并相当精确的定出了 C_1 与 C_2 的数值. 这称为 Chebyshev 不等式. 他还证明了(参见第三章 §3 定理 1)

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \tag{16}$$

由此就可推出(见第三章 §3 推论 2):极限

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

若存在,则必为 1. 这也就是说,如果当 $x \to +\infty$ 时,$\pi(x)$ 有渐近公式,则必为式(12).

Chebyshev 的重要贡献还在于他为了研究素数定理而引进了两个重要的函数

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p \tag{17}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(x) \tag{18}$$

其中 $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^l, l \geqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这两个函数称为 Chebyshev 函数. 这两个函数和 $\pi(x)$ 之间有十分密切的关系(见第二章 §5 定理 1 及第三章 §1 定理 2),他证明了素数定理(12) 等价于命题

$$\theta(x) \sim x, x \to +\infty \tag{19}$$

或

$$\psi(x) \sim x, x \to +\infty \tag{20}$$

而对余项 $R(x)$ 的研究可转化为对余项

$$R_1(x) = \theta(x) - x \tag{21}$$

或

$$R_2(x) = \psi(x) - x \tag{22}$$

的研究.

引进这两个函数,特别是引进 $\psi(x)$ 的好处在于:由算术基本定理可推出 $\psi(x)$ 的下述重要性质(见第二章 §7 定理1)

$$\sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant x} \ln n \tag{23}$$

这样,把一个性状很不清楚的函数 $\psi(x)$ 和我们十分熟悉的对数函数之间建立了一个十分简单的联系. 这个关系式的重要性可从下面的事实看出:从它可以证明 Chebyshev 不等式(15),下面的 Mertens 的素数分布公式(24),(25),(26)以及 Selberg 不等式(39). 因此,素数定理的 Selberg - Erdös 的初等证明(见第五章)的基础也是这一关系式.

在 Chebyshev 工作的基础上,1874 年左右,F. Mertens 证明了有关素数平均分布的三个重要结果(见第三章 §2 定理1、定理2、定理3 及 §5 定理1)

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x + O(1) \tag{24}$$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + A_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \tag{25}$$

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-r}}{\ln x} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right) \tag{26}$$

以上介绍了在素数定理证明之前,关于素数分布方面取得的主要成果,为证明素数定理奠定了必要的数论方面的基础. 本书第二、三章就是讨论这些结果.

为了证明素数定理,除了命题(19)及(20)外,还得到了其他许多与它等价的命题,这些命题本身也是十分重要和有趣的. 这样,素数定理也就转化为证明这些命题,这也是素数定理有如此之多的证明的原因. 第四章及第九章 §5 介绍了几个重要的等价命题.

Riemann 的贡献　1859 年,B. Riemann 发表了题为"论不超过一个给定值的素数个数"的著名论文. 这也是他唯一的一篇研究数论的论文. 他把 Euler 恒等式(3)作为研究的出发点,把这恒等式左边的级数记作 $\zeta(s)$—— 这就是现在所说的 Riemann ζ 函数. 一个重要的不同是:他把 s 看作为复变数,Euler 恒等式对复变数 s 当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时也成立(见第八章 §1 定理2). 他对复变函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s},\mathrm{Re}\ s>1 \tag{27}$$

作了深刻系统的研究,证明(有的是不严格的)了许多重要结果,特别是得到了一个与 $\zeta(s)$ 的零点有关的表示素数个数 $\pi(x)$ 的公式. 他的研究表明:研究素数分布的关键在于进一步探讨复变函数 $\zeta(s)$,特别是它的零点的性质 Riemann 的那些证明不严的结果后来由 J. Hadamard 和 H. von Mangoldt 给出了严格的证明. $\zeta(s)$ 的一些基本性质有:它可以解析开拓到全平面,仅在 $s=1$ 有一个一级极点,留数为 1;它有无穷多个实部不小于 0 的零点,且这些零点都是位于长条 $0\leqslant \mathrm{Re}\ s\leqslant 1$ 中的复零点; $-2,-4,-6,\cdots,-2n,\cdots$ 是它仅有的实部小于 0 的零点,且均为一级零点. Riemann 猜测所有实部不小于 0 的零点都在直线 $\mathrm{Re}\ s=\frac{1}{2}$ 上,这就是至今未解决的著名的 Riemann 猜想.

我们将要证明(见第八章 §1 式(17))

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},\mathrm{Re}\ s>1 \tag{28}$$

由于 Chebyshev 对其所引进的函数 $\psi(x)$ 的研究,从上式也可清楚看出有可能利用函数 $\zeta(s)$ 来研究素数定理.

Hadamard 和 de la Vallée Poussin 的贡献 正是沿着 Riemann 指出的方向,利用高深的整函数理论,在 1896 年,Hadamard 和 de la Vallée Poussin 几乎同时独立证明了素数定理(12). 证明的关键之点是证明了

$$\zeta(1+\mathrm{i}t)\neq 0,\ -\infty<t<+\infty \tag{29}$$

后来,de la Vallée Poussin 于 1900 年证明了带余项的素数定理

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\ x+O(x\exp(-C_3\sqrt{\ln x})) \tag{30}$$

或等价地有

$$\psi(x)=x+O(x\exp(-C_4\sqrt{\ln x})) \tag{31}$$

其中 C_3,C_4 为两个常数.

Landau 不用整函数理论,但仍用较高深的单复变函数论知识,给出了式(30)(或式(31))的一个新证明. 在此之前,Littlewood 宣布利用估计 Weyl 指数和的方法可把式(30)改进为

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\ x+O(x\exp(-C_5\sqrt{\ln x\ln\ln x})) \tag{32}$$

利用 Landau 的方法及 И. М. Виноградов 估计 Weyl 指数和的方法,不断改进了素数定理的余项估计,目前最好的结果是

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\ x+O(x\exp(C_6\ln^{\frac{3}{5}}x(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}})) \tag{33}$$

最后,应该指出:在 Riemann 猜想成立的假定下,von Koch 早在 1901 年证

明了

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\ x+O(x^{\frac{1}{2}}\ln x) \tag{34}$$

而另一方面,Littlewood 于 1914 年证明了:存在一个正常数 C_7,使得有无穷多个 x,使

$$\pi(x)-\mathrm{Li}\ x>\frac{C_7(x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x)}{\ln x} \tag{35}$$

以及存在无穷多个 x,使

$$\pi(x)-\mathrm{Li}\ x<-\frac{C_7(x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x)}{\ln x} \tag{36}$$

这表明素数定理的误差项的变化是十分不规则的,它的阶估计是不会低于$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}$的,这一问题的研究至今尚未解决.

以上结果都是用高深的方法得到的,不属于初等证明的范围,我们仅作简略的介绍,本书也不讨论这些方法和结果.

初等的复变函数论的证明 自从 Hadamard 和 de la Vallée Poussin 证明了素数定理之后,人们一直在寻求一个较为简单的证明. 这方面有 Landau, Hardy -Littlewood 等人的工作. 这种类型的证明要用到的知识是:复变函数论的 Cauchy 积分定理;把 $\zeta(s)$ 解析开拓到 $\mathrm{Re}\ s>0$,$\zeta(1+it)\neq 0$,$\zeta(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 1$ 上的有关阶估计;以及某种类型的 Tauber 型定理(为了建立素数定理的等价命题,而这种命题较易证明). 本书第十一、第十二章就给出了两个这种类型的证明. 第八章讨论了所需要的 ζ 函数的性质,第九章的 §1 及 §2 给出了相应的 Tauber 型定理. 应该指出的是:用到的 ζ 函数的阶估计的结果愈弱,则需要的 Tauber 型定理就愈强.

直到最近用这种方法仅能证明不带余项的素数定理. 1981 年,Čižek 利用第十一章的证明方法,结合熟知的 Fourier 变换的性质(见第十一章 §3),很容易的证明了如下形式的带余项估计的素数定理:

对任意正数 $A>1$,有

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\ x+O(x(\ln x)^{-A}) \tag{37}$$

(见第十一章 §5 定理1). 这一定理最初是由 Wirsing 和 Bombieri 用很复杂的初等方法得到的.

Wiener 的贡献 以上的证明都需要用到 Cauchy 积分定理和较多的 $\zeta(s)$ 的性质. Wiener 首先利用他的一般形式的 Tauber 型定理(见第十四章 §1 定理 2),不用 Cauchy 定理,以及仅需要性质 $\zeta(1+it)\neq 0$(不需要任何阶的估计),

证明了素数定理. 由于他的工作使人们看到素数定理实质上等价于

$$\zeta(1+it) \neq 0 \tag{38}$$

(必要性的证明见第十章 §2 定理1). 由于这里不需要 Cauchy 定理,所以实质上是给出了一个实分析的证明. 应该指出,这里用到了实变函数论和$\mathbb{L}$空间中的 Fourier 变换(见第十三章) 等很深刻的实分析知识.

他的证明后来为 Ikehara,Bochner,Landau 和 Ingham 等人所简化和改进. 本书将给出 Ikehara 的证明(见第九章 §4 定理1 及第十章) 以及 Ingham 的证明(见第十四章 §2 定理1). 利用 Ikehara 的方法,Čižek 也证明了形如(37) 的素数定理.

十分有趣的是 Gerig 仅利用 $\zeta(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, s>1$ 内的性质及简单的调和分析结果,证明了对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\, x+O(x(\ln x)^{-\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

Selberg - Erdös 的贡献 素数定理的证明一定要用到 ζ 函数以及较深的分析工具,这一观点由于 Wiener 的工作,更使人深信不疑了. 因为,既然素数定理实质上等价于一个复变函数 $\zeta(s)$ 的性质(38),而且证明又都是那样不简单,所以从理论的逻辑结构上来说,要去寻找一个不用 ζ 函数,不用分析工具(或只用很少的微积分) 的初等证明,看来十有八九是不可能的. 这种观点为很多数学家所接受. 早在1921年,著名数学家 G. H. Hardy 在哥本哈根数学会发表的演讲中有一段话集中反映了这种看法. 我们把这段话的原文摘录如下:

“No elementary proof of the prime number theorem is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann's zeta function has no roots on a certain line. A proof of such a theorem, not fundamentally dependent upon the ideas of the theory of functions, seems to be extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem cannot be proved in a particular way; but one thing seems quite clear. We have certain views about the logic of the theory; we think that some theorems as we say ‘lie deep’ and others nearer to the surface. If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed, and that it is time for the books to be cast aside and for the theory to be rewritten.”

Hardy 于1947年去世了. 可是就在两年之后,年轻的数学家 Selberg 和 Erdös 就给出了这样的证明! 他们的证明竟是这样的初等:除了需要 e^x,$\ln x$ 等