高等医药学院校教材

高等数学

●主　编：张春华

●副主编：周永治　谢宝兴

济南出版社

高等医药院校教材

高　等　数　学

主　编　张春华

副主编　周永治　谢宝兴

编　委　刘明芝　林　莉　周金汤

阎雪隐　于鹤丹　李大庆

严云良　周　喆　周仁郁

丁美华　陈志军

济 南 出 版 社

1990年·济南

高等医药院校教材
高等数学
主编 张春华
*
济南出版社出版发行
（济南市经二路纬三路182号）
莱芜市印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 20印张 365千字
1990年7月第1版 1990年7月第1次印刷
ISBN7—80572—226—9／0·2
定价：7.00元

编 写 说 明

本书是根据卫生部1982年颁布的有关教学计划的要求，由全国十二所中医院校中具有多年教学经验的教师联合编写。作为高等医药院校的“高等数学”教材，也可作为医务人员自学“高等数学”用书。

全书共分十章，包括空间解析几何、微积分、微分方程、矩阵的基本知识和计算方法等内容，需用100学时左右。

在保证本学科的科学性和系统性的前提下，本书编写中注意了与中学数学的衔接，突出了高等数学在中西医药中的应用，选编了有关的新的内容、例题和习题。

为了适应不同学校的要求和读者的不同水平，本书有些内容，例如有星号部分为选学内容，作为读者在学习期间的补充读物。书中每章都配有习题，书后附有答案，以供教师教学时选用，也便于读者自己练习。

参加本教材编写的有：刘明芝（湖南中医学院）、林莉（天津中医学院）、周金汤（福建中医学院）、阎雪隐（辽宁中医学院）、于鹤丹（黑龙江中医学院）、李大庆、严云良（浙江中医学院）、周喆（长春中医学院）、周仁郁（成都中医学院）、谢宝兴（河南中医学院）、周永治（南京中医学院）、张春华、丁美华（山东中医学院）、陈志军（北京中医学院）。由于我们水平所限，编写时间仓促，本书中一定有不少缺点与错误，恳请读者批评指正。

编　者

1990年4月

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象，而极限的方法则是基本的研究方法．本章将在高中代数的基础上简要地介绍变量、函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数的连续性的定义及其性质．

§1　函　　数

1.1　函数的概念

（一）常量和变量

我们观察和研究某一变化过程时，常会遇到两种不同的量：一种是在该过程中保持同一数值的量，称为**常量**；另一种是在该过程中可以取不同数值的量称为**变量**．

例如，在生物学中，在一定容积的培养基中成批培养细胞，观察用这种方法进行的细胞培养过程中，固定的容积是常量，细胞的数目及培养基中营养物质是变量．

一个量是常量还是变量，应根据变化过程作具体分析．例如，一个人在从小孩长成大人的整个过程中，身高是个变量，但在某一天的身高变化很微小，在这一天中的身高就可以当作常量．一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于所讨论的问题来说可以看作不变，就可以把这个变量看作常量．

（二）函数的概念

先看几个例子

例1　底半径为a，高为h的圆柱形容器中，盛溶液的容积V随溶液的高度x的变化规律为

$$V=\pi a^2 x \qquad (0\leqslant x\leqslant h)$$

例2　在板蓝根注射液含量稳定性的研究中测得pH＝6.28，温度78°C下保温时间与含量破坏百分比的数据见表．

板蓝根注射液含量破坏百分比与保温时间(hr)的关系

保暖时间(hr) x	32	64	96	128
含量破坏百分比 y	4.55	12.27	15.45	18.18

例3　根据静脉注射，肌肉注射青霉素G钠盐10万单位的血清中药浓度的图象（图1—1）分析，可得如下结论：

（1）静脉注射液使血液中青霉素G钠盐含量迅速提高、在$\frac{1}{4}$小时血清中的浓度可达到高峰，但很快下降，3小时后就很难测到．

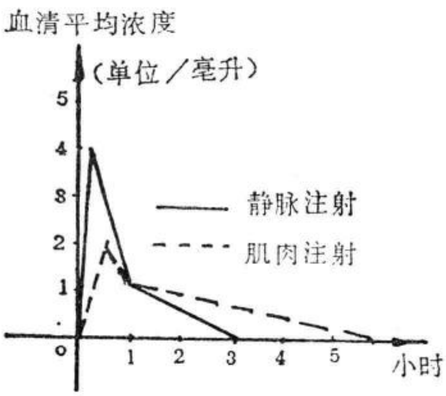


图1—1

（2）青霉素G钠盐肌肉注射后，被组织吸收进入血液，血清中的浓度半小时左右可达高峰（比静脉注射慢，且高峰低），在血中存留的时间比静脉注射长，但数小时后也测不到了。

因此，临床上常用静脉滴注法以获得血中持久而较高的浓度来达到较快的疗效。

上面几个例题，虽然在实际意义上各有不同，变量之间的对应关系也是用不同方式表达的，但它们都表达了两个变量之间变化的相依关系及其取值范围，由此抽象出函数概念的数学定义。

定义1 假设在一个过程中有两个变量x和y，变量x的变化范围是数集D. 如果对于D中x的每一个值，按照某一确定的对应法则f，变量$y\in M$都有一个确定的值与它相对应，则称f是确定在数集D上的**函数**. 记作

$$f: D\to M$$

其中集合D称为函数的**定义域**. D中的任一数x根据法则f所对应的y，记作$f(x)$，称为f在x的**函数值**. 全体函数值的集合

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}\subset M$$

称为函数f的**值域**. x称为**自变量**，y称为**因变量**.

由函数定义知，定义域及对应关系确定了，函数也就完全确定了.因此，把定义域、对应规则f称为函数的两个要素.

在定义1中，对应规则f称为函数，$f(x)$称为函数值. 严格说来，对应规则不是数，是某种规则，而函数值是数，这两者是不同的. 例如，$y=\sin x$，无论y或$\sin x$都不能说是x的函数，而是函数值，函数是$\sin$. 但是为了叙述上方便，习惯上把函数与函数值不加区分，函数可以用f，也可以用$f(x)$或$y=f(x)$来表示，函数值用$f(x)$表示.

如例1中，函数$V=\pi a^2 x$的定义域是$0\leqslant x\leqslant h$，对应规则是$\pi a^2(\quad)$. 例2中的定义域是$\{32, 64, 96, 128\}$，对应规则为列出的表格. 例3实际上是两个函数，读者可以自己讨论它们的定义域及对应规则.

例4 有人根据在一项生理学研究中测得的血液中胰岛素浓度$c(t)$（单位/毫升）随时间t（分钟）变化的数据，建立了如下经验公式：

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)} & t>5 \end{cases}$$

其中k为常数.

这里浓度$c(t)$是时间t的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的.象这种在定义域的不同部分内用不同的解析式表示的函数，称为分段函数. 计算分段函数的函数值时，特别要注意自变量所取的值在哪个范围. 如例4中，当$t=2$时，对应的浓度$c(2)=2(10-2)=16$；当$t=10$时，对应的浓度$c(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

（三）函数的表示法

由前面的几个例子可以看到，变量间的函数关系可用各种不同的方法来表示。在实际应用中，常采用下列三种方法：

（1）**解析法** 用包含着变量的方程，也就是用数学式子表达变量之间的函数关系，这种方法叫做解析法或公式法。例1、例4都是用解析法表示的函数。这种表示法的优点是简单、全面，式子本身既给出函数同时又是研究所给出的函数的重要工具，且适宜于进行理论分析和研究。缺点是不直观，每一个函数值也都要临时进行计算。

（2）**列表法** 把一系列自变量的值以及与之对应的函数值列成一个表格来表示它们之间的函数关系，这种表示函数的方法叫做列表法。例2是用列表法表示的函数。我们用过的对数表、三角函数表、平方表等等都是用列表法表示的函数的实例。列表法的优点是可以不用计算而能从表上直接读出函数值，使用方便。但表中所列的值不完全，且一般都是近似值，不便于看出规律，不适宜作理论研究。

（3）**图示法** 借助坐标系用图形（一般是曲线）表示变量间的函数关系的方法叫图示法。例3是用图示法表示的函数关系。图示法直观、明显，函数特征一目了然，对问题的研究有一定的启发性，但精确度不够。

在实际问题中，上述三种方法经常结合起来应用。

（四）函数的几种特性

（1）函数的有界性

设函数$y=f(x)$定义在区间I上，若存在某一常数K，对一切$x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant K \quad (f(x)\geqslant K)$$

则说$f(x)$在I上有上（下）界，数K为它的一个上（下）界。

若函数$f(x)$在I上既有上界，又有下界，则称$f(x)$为I上的**有界函数**。

例如，对于任意的x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以$y=\sin x$，$y=\cos x$在整个数轴上是有界的。$y=x^3$在$(-\infty, +\infty)$上无界。$y=x^2$在$(-\infty, +\infty)$上有下界而无上界。

（2）函数的奇偶性

设x和$-x$是函数$y=f(x)$的定义域内任意两点，若总有$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$叫做**偶函数**；若总有$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$叫做**奇函数**。

偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于原点。例如，函数$y=x^2$及$y=\cos x$都是偶函数；$y=x^3$及$y=\sin x$都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$是非奇非偶函数。

（3）函数的单调增减性

若函数$f(x)$在区间I上随着x的增加而增加，即对于I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时总有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称$f(x)$在区间I上**单调递增**（**单调递减**）、单调递增或递减函数统称为**单调函数**。

例如，函数$y=x^3$在$(-\infty, +\infty)$上单调递增；$y=x^2$在$(-\infty, 0)$上是递减的，在$(0, +\infty)$上是递增的，但在整个定义域上不是单调的。

（4）函数的周期性

设x是函数$y=f(x)$定义域内任一点，若存在一个不等于零的数k，使得当$x+k$也属于

定义域时有$f(x+k)=f(x)$，则称$y=f(x)$是以k为周期的周期函数,k为它的一个周期。显然，若k为$f(x)$的一个周期，则$-k\pm 2k$、$\pm 3k$……也都是它的周期，故周期函数一定有无限多个周期。

如果周期函数$f(x)$的所有周期中有一个正的最小周期，如k，则称k为$f(x)$的基本周期，简称周期。例如，函数$y=\sin\omega x(\omega\neq 0)$，$x\in(-\infty,+\infty)$是以$k=\frac{2\pi}{|\omega|}$为周期的函数。

（五）反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要选定其中一个为自变量，则另一个就是因变量．例如，函数$y=ax+b$中，x是自变量，y是因变量．如果从这个函数中把x解出，得$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$，把它表示成了$y$的函数，则称$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$是$y=ax+b$的反函数．一般地说，设函数$y=f(x)$的定义域是$D$，值域是$M$，如果对于$y$在$M$中的每一个值，都可通过关系式$y=f(x)$确定$x$在$D$中的一个值，就得到了定义在$M$上以$y$为自变量,$x$为因变量的函数$x=\varphi(y)$．称它是函数$y=f(x)$的反函数．也可记作$x=f^{-1}(y)$．$y=f(x)$叫做直接函数．事实上$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数．

习惯上，自变量用x表示，因变量用y表示，按此函数$y=f(x)$的反函数可改写为

$$y=f^{-1}(x)\quad 或\quad y=\overline{f}(x).$$

例如，直接函数$y=\sin x$，$y=a^x$的反函数分别为$y=\arcsin x$，$y=\log_a x$．当函数与其反函数均以x为自变量时，反函数的图象与原来函数的图象对于直线$y=x$是对称的。

1.2 初等函数

（一）基本初等函数

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，因为这些函数的对应法则都是初等数学中的基本运算，如乘幂、开方、指数、对数等．这些函数读者在初等数学中已经接触过，为了便于今后应用，再简单概括如下：

（1）常量函数　$y=c$　$x\in(-\infty,+\infty)$　其中c是常量．它的图象是通过点$(0,c)$且平行于x轴的直线．

（2）幂函数　$y=x^\alpha$　（α为任意实数）下面只讨论α是有理数的情形．

1°当α为正整数时，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$．α为奇数时，$y=x^\alpha$是递增的奇函数；α为偶数时是偶函数．图形总是通过点$(0,0)$、$(1,1)$．

2°当α为负整数时，它的定义域是不为零的一切实数．$|\alpha|$为奇数时，函数为奇函数，图形通过点$(1,1)$与$(-1,-1)$；$|\alpha|$为偶数时，为偶函数，图形通过点$(1,1)$与$(-1,1)$．

3°当α为分数时，情况较为复杂，作为例题，读者可自行讨论函数$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$，$y=x^{-\frac{1}{3}}$．

（3）指数函数　$y=a^x$　$(a>0,a\neq 1)$其定义域为$(-\infty,+\infty)$图象通过点$(0,1)$．当$a>1$时递增，当$0<a<1$时递减．

（4）对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq 1)$　对数函数是指数函数的反函数．所以它的定义域为$(0,+\infty)$，它与相应的指数函数具有相同的单调性．

（5）三角函数

三角函数主要是

正弦函数 $y=\sin x \quad x\in(-\infty, +\infty)$

余弦函数 $y=\cos x \quad x\in(-\infty, +\infty)$

正切函数 $y=\operatorname{tg}x \quad x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$

余切函数 $y=\operatorname{ctg}x \quad x\neq n\pi \quad n=0, \pm1, \pm2, \cdots$

正弦、余弦函数都是以2π为周期的有界周期函数，正弦函数为奇函数，余弦函数为偶函数。正切函数与余切函数都是周期为π的周期函数，且是奇函数。

（6）反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x \quad x\in[-1, 1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数 $y=\arccos x \quad x\in[-1, 1]$，$y\in[0, \pi]$

反正切函数 $y=\operatorname{arctg}x \quad x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

反余切函数 $y=\operatorname{arcctg}x \quad x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in(0, \pi)$

上述各反三角函数的值域范围，称为它们的主值区间，所以反三角函数是严格单调且有界。

（二）复合函数

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量并不直接依赖于自变量x，而是通过另一个变量联系起来。

例如，某汽车行驶了10小时，每公里耗油为0.2升，行驶速度为60公里/小时。于是汽车在行驶过程中，耗油量y是行驶距离s的函数

$$y=f(s)=0.2s,\ s\in[0, +\infty]$$

而行驶距离s又是行驶时间t的函数

$$s=g(t)=60t \qquad t\in[0, 10]$$

因此，汽车的耗油量y通过中间变量s与时间t建立了函数关系

$$y=0.2s=0.2\times60t=12t \qquad t\in[0, 10]$$

也就是 $\qquad y=f(s)=f[g(t)]$

由此看到y与t的对应关系，是由两个函数$y=f(x)$与$s=g(t)$复合而成，一般有如下定义：

定义2 已知函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当x在$\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的u值，使函数$y=f(u)$是有定义的，则y通过u和x建立了函数关系

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]=F(x)$$

这个函数称为由$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$经过复合运算所得到的y为x的**复合函数**。其中u称为中间变量。

例5 设 $y=\sqrt{1+u}$，$u=\cos x$，求y关于x的复合函数。

解 对于自变量x的任意值，u的取值恒在$[-1, 1]$内，它对于$y=\sqrt{1+u}$总是有定义的，因此可以将$u=\cos x$代入$y=\sqrt{1+u}$得

$$y=\sqrt{1+u}=\sqrt{1+\cos x}$$

这就是所求的y关于x的复合函数.

例 6 指出函数$y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}$是怎样复合而成的.

解 $y=e^u$, $u=\operatorname{arctg}v$, $v=\sqrt{w}$, $w=x^2-1$.

复合函数的复合过程是由里到外，而剖析复合层次的过程是由外到里的. 如例 6

$$\overset{\text{函数的复合过程}}{\longrightarrow}$$

$$w=x^2-1 \quad v=\sqrt{w} \quad u=\operatorname{arctg}v \quad y=e^u$$

$$\underset{\text{剖析过程}}{\longleftarrow}$$

（三）初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算步骤所得的能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}+5$, $y=\sqrt{x^2-1}+\log_a(x+\sqrt{x^2+b^2})$, $y=\varphi(t)=\operatorname{tg}t-\sqrt{t}\cos t$, $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$都是初等函数.

注意: 分段函数是一个函数，但它不是初等函数. 事实上它不能在它的定义域内用一个初等的解析式表示变量之间的关系，因而不可能由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而得.

今后我们讨论的函数绝大多数都是初等函数.

*1.3 函数尺、曲线直线化和经验公式

根据观察或实验所得的变量间对应的近似值（称为实验数据），求出的这些变量之间的函数关系的解析式，叫做经验公式. 在理论研究中，经验公式是实践与理论之间的必要纽带. 例如，药代动力学中，对药物在体内隔室中各种数量（浓度、效应）随时间变化的规律等研究都经历了实践——经验公式——理论解释的发展过程.

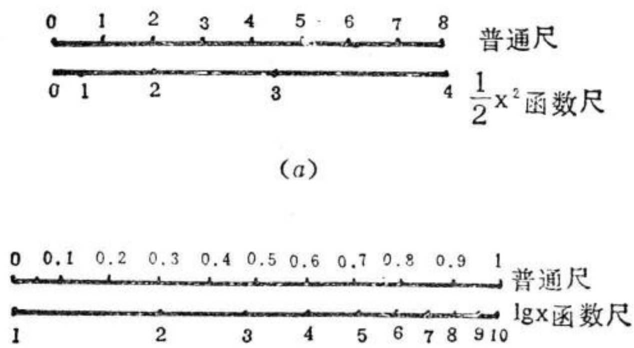
许多问题中的经验公式可借助变量代换或函数尺，再通过曲线直线化得到解决. 本节将介绍这些内容.

（一）函数尺

在寻找经验公式时，常需要作变量代换，如有时需要令$X=\dfrac{1}{2}x^2$. 如果使用均匀的普通尺，当给定一个x的数值时，必须算一下相应的$\dfrac{1}{2}x^2$，才能从普通尺上找到相应的点，十分不便. 于是考虑将普通尺改进，在普通尺度的与0点之间的距离分别为$\dfrac{1}{2}(0)^2$个单位，$\dfrac{1}{2}(1)^2$个单位，$\dfrac{1}{2}(2)^2$个单位等等的点，不标记X的数值，而标记x的数值0，1，2，…等. 这样按$\dfrac{1}{2}x^2$的大小定点却标以x值的尺子就称为$\dfrac{1}{2}x^2$函数尺〔图1—2(a)〕.

只要事先将$\frac{1}{2}x^2$函数尺的刻度做得足够细致，给出任一个x值时，使用$\frac{1}{2}x^2$函数尺就能很快查出相应的$\frac{1}{2}x^2$所在的位置。

一般地，如果以$f(x)$定点，而标以x值的尺子就称为$f(x)$函数尺。函数尺的应用很广，图1—2(b)就是手拉计算尺中经常采用的对数尺。利用函数尺可以制作各种坐标纸，最常见的有单对数坐标纸和双对数坐标纸。



(b)

图1—2

单对数坐标纸（图1—3）又称半对数坐标纸，两个坐标轴中的一个是普通尺，另一个是对数尺。对数尺上标记1，2，3，…10处实际长度是lg1，lg2，lg3，…，lg10；从1至10是变量的一个数量级。一把对数尺上若重复2次出现图1—3那样的刻度，则表示变量可在两个数量级（例如1至10和10至100）范围内取值；若重复出现3次或更多次则类推。使用时，若第一级刻度表示0.1，0.2，0.3，…，1.0，则其上一级的刻度应当表示高一个数量级的数值1，2，3，

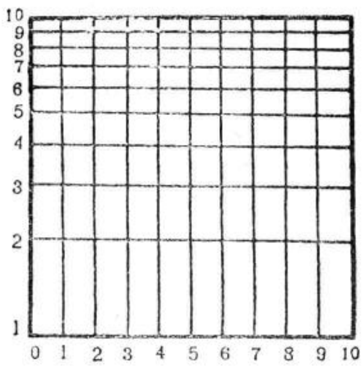


图1—3

…，10类似地，若第一级表示10，20，30，…，100，则其上级应表示100，200，300，…，1000等等。总之，对数坐标上的1，2，3，…，10，可以代表1×10^n，2×10^n，3×10^n，…，10^{n+1}等，其中n为正整数，表示数量级。n可视问题不同而灵活选取，但“1”只能表示1×10^n，而不能表示0或2×10^n，3×10^n等。同样，“2”只能表示2×10^n，“3”只能表示3×10^n，…。初学者务必注意。

双对数坐标纸（图1—4）的两个坐标轴都是对数尺，使用时注意事项同上。

（二）曲线直线化

曲线直线化指的是对呈曲线关系的变量作适当的代换，使代换后的变量之间呈直线

关系.

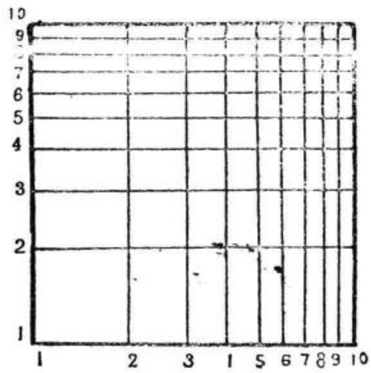


图 1—4

（1）指数函数图形的直线化

指数函数的图象是指数曲线，考虑将指数函数 $y=ae^{bx}$

两边取对数，得

$$\lg y=0.4343bx+\lg a$$

令 $Y=\lg y$

则 $Y=0.4343bx+\lg a$

显然Y是关于x的线性函数. 如果将y轴取为对数刻度，而x轴仍取等分刻度（普通坐标的刻度），在这样的坐标系中作出的函数图象是直线，就把指数曲线直线化了.

例7 作$y=e^x$（$x\geqslant 0$）的图象，并直线化.

解 将$y=e^x$（$x\geqslant 0$）两边取对数，得

$$\lg y=0.4343x$$

作变换，取$Y=\lg y$，便有

$$Y=0.4343x$$

列出x、y及$Y=\lg y$的对应数据见表.

x和y及$Y=\lg y$的对应数据表

x	0	1	1.5	2	2.5	3.0	…
y	1	2.7183	4.4817	7.3891	12.182	20.086	…
$Y=\lg y$	0	0.4343	0.6515	0.8686	1.0856	1.3027	…

按表中x及y的对应值在一般直角坐标系中作图，得到$y=e^x$的曲线（图1—5）

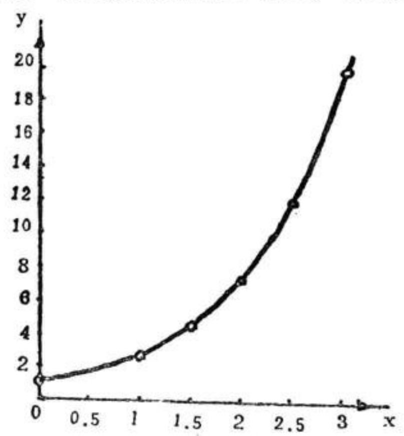


图 1—5

以Y对X作图，便得到一条直线（图1—6），这样就将曲线$y=e^x$直线化了.