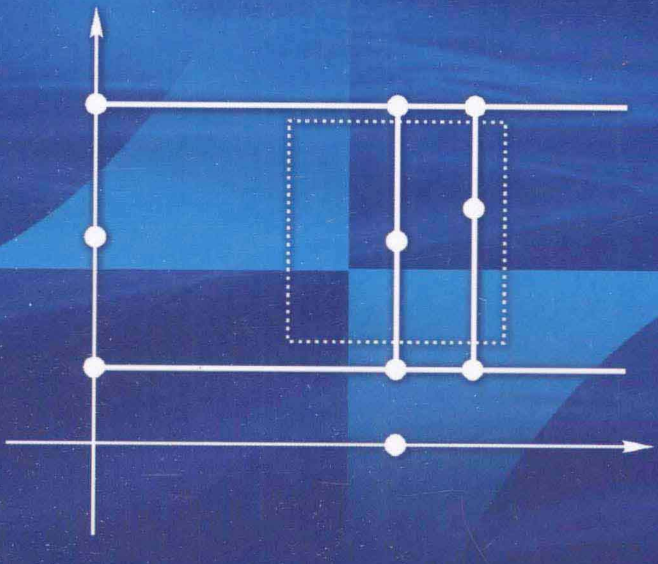
数学分析

典型例题解析

思路·方法·知识点

（第2册）

李惜雯 李 田 编著



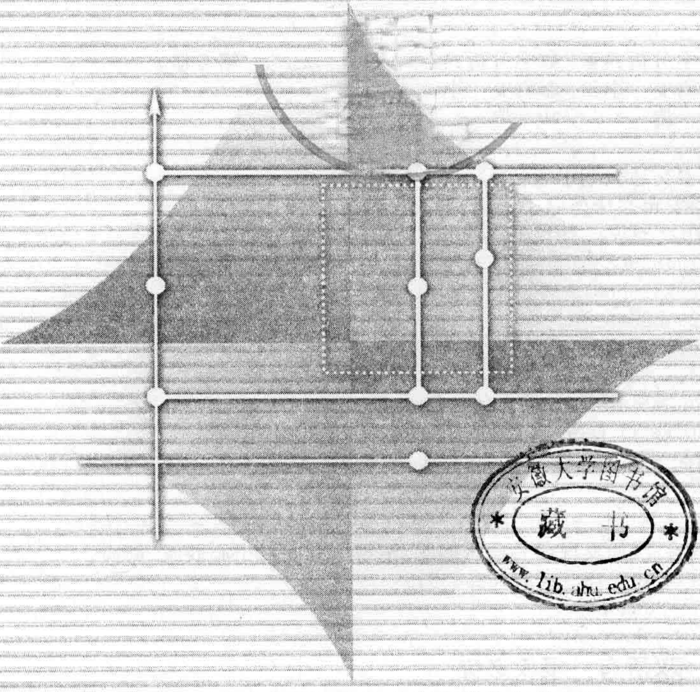
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

数学分析典型例题解析

思路·方法·知识点

(第2册)

李惜雯 李 田 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据综合大学数学类各专业用数学分析课程教学大纲编写的。

本书侧重理论分析，每道题后有注释，对该题所用概念、知识及解题思路进行深入分析和讨论。全书共有10章，分为三册。第1册内容为一元函数部分；第2册内容为多元函数的极限、连续及微分，广义积分与级数部分；第3册内容为含参变量积分，重积分与第一型线、面积分，第二型线、面积分与场论初步。

本书可作为综合大学、师范类院校数学类各专业学生学习数学分析课程的参考书，数学分析习题课教材；可作为全日制理工科各专业学生学习工科数学分析、高等数学课程及中青年教师从事本类课程教学的参考书；也可作为报考数学类各专业研究生考生的数学分析参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析典型例题解析：思路·方法·知识点.第2册/李惜雯编著.
—西安：西安交通大学出版社，2013.11
ISBN 978-7-5605-5505-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数学分析-高等学校-题解
Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第184426号

书　　名	数学分析典型例题解析：思路·方法·知识点(第2册)
编　　著	李惜雯　李田
责任编辑	叶　涛
出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址	http://www.xjtupress.com
电　　话	(029)82668357　82667874(发行中心) (029)82668315　82669096(总编办)
传　　真	(029)82668280
印　　刷	陕西长盛彩印包装有限公司
开　　本	700mm×1 000mm　1/16　**印张** 19　**字数** 357千字
版次印次	2013年11月第1版　2013年11月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-5505-8/O·437
定　　价	45.00元

读者购书、书店添货，如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

目 录

第 1 册要目

第 3 册要目

第 6 章　多元函数的极限、连续与微分

6.1　平面点集论

6.1.1　基本要求

1. 掌握 n 维欧氏空间的概念，特别是 $n=2$ 的情形；

2. 掌握 $\mathbf{R}^2$ 中点集的有关概念：邻域，内点，外点，聚点，边界点，开集，闭集，交集，并集，余集等概念、性质及其证明；

3. 掌握 $\mathbf{R}^2$ 的完备性定理(Cauchy 收敛原理)的表述、证明及其应用；

4. 掌握闭集套定理的表述、证明及其应用；

5. 掌握紧致性定理的表述、证明及其应用；

6. 掌握 $\mathbf{R}^2$ 中有限覆盖定理的表述、证明及其应用.

6.1.2　内容提要

1. **定义 1**(n 维欧氏空间)　n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作成的有序数组 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为(n 维)点，数 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 称为点 M 的第 j 个坐标. 这种点 M 的全体所构成的集合称为 n 维欧氏空间，记为 $\mathbf{R}^n$.

2. **定义 2**($\mathbf{R}^n$ 中的距离)　设 $M_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),M_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，称 $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$ 为点 M_1 与点 M_2 的距离，记为 $d(M_1,M_2)$.

3. **定义 3**($\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛)　设 $P_0\in\mathbf{R}^n,P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中一点列. 若对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 K，使得只要 $k>K$，就有 $d(P_k,P_0)<\varepsilon$，则称 k 趋于无穷时，点列 $\{P_k\}$ 以点 P_0 为极限，记为 $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0$，或 $P_k\to P_0(k\to\infty)$.

4. **定理 1**　设 $P_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),P_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，则当 $k\to\infty$ 时，

$$P_k\to P_0\Leftrightarrow x_j^{(k)}\to x_j^{(0)}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

5. **定义 4**(邻域)　设 $P_0\in\mathbf{R}^n,\varepsilon>0$，称点集 $\{P\in\mathbf{R}^n\mid d(P,P_0)<\varepsilon\}$ 为点 P_0 的 ε 邻域，记作 $U(P_0,\varepsilon)$. 称点集 $\{P\in\mathbf{R}^n\mid 0<d(P,P_0)<\varepsilon\}$ 为 P_0 的去心 ε 邻域，记作 $U^*(P_0,\varepsilon)$.

以下设点集 $E\subset\mathbf{R}^2$.

6. **定义 5**(内点,内部)　设 $P \in E$,如果 $\exists \delta > 0$,使得 $U(P,\delta) \subset E$,则称点 P 为点集 E 的内点. 由 E 的全体内点作成的集合称为点集 E 的内部,记作 E°.

7. **定义 6**(外点,外部)　设点 $P \notin E$,如果 $\exists \delta > 0$,使得 $U(P,\delta) \cap E = \varnothing$($\varnothing$ 表示空集),则称 P 点为点集 E 的外点. 由 E 的全体外点作成的集合称为点集 E 的外部.

8. **定义 7**(边界点,边界)　设 $P \in \mathbf{R}^2$,若对任意的 $\delta > 0$,有 $U(P,\delta) \cap E \neq \varnothing$,且 $U(P,\delta) \not\subset E$,则称 P 为点集 E 的边界点. E 的全体边界点作成的集合称为点集 E 的边界,记作 ∂E.

9. **定义 8**(开集)　若 $E = E^{\circ}$,则称 E 为开集.

10. **开集的性质:**

性质 1　$\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 均为开集;

性质 2　有限个开集的交集为开集;

性质 3　任意多个开集的并(和)集为开集.

11. **定义 9**(聚点,孤立点)　设 $M_0 \in \mathbf{R}^2$,如果 $\forall \varepsilon > 0$,$U^{\circ}(M_0,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$,则称 M_0 为点集 E 的聚点. 设 $N_0 \in E$,如果 $\exists \delta > 0$,使得 $U^{\circ}(N_0,\delta) \cap E = \varnothing$,则称 N_0 为点集 E 的孤立点.

12. **定理 2**　P_0 为点集 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ 存在互异点列 $\{P_k\} \subset E$,使得 $P_k \to P_0$ $(k \to \infty)$.

13. **定义 10**(闭包)　点集 E 并上它所有聚点的集合称为 E 的闭包,记为 $\bar{E}$.

14. **定义 11**(闭集)　若 $E = \bar{E}$,则称点集 E 为闭集.

15. **闭集的性质:**

性质 1　$\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 均为闭集;

性质 2　有限个闭集的并集为闭集;

性质 3　任意多个闭集的交集为闭集.

16. **定义 12**(余集)　在 $\mathbf{R}^2$ 中去掉集合 E 的集合称为 E 的关于 $\mathbf{R}^2$ 的余集,记作 $\mathbf{R}^2 \backslash E = E^c$.

17. **定理 3**　E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集 $\Leftrightarrow E^c$ 为开集.

18. **定义 13**(道路连通集)　设 $E \subset \mathbf{R}^2$,如果 $\forall M_1, M_2 \in E$,总存在完全位于 E 内的连续曲线 C,使之连接 M_1 与 M_2,则称 E 为连通集(道路连通).

19. **定义 14**(区域)　道路连通开集称为区域. 若 D 为区域,则 $\bar{D}$ 称为闭区域.

20. **Cauchy 收敛原理:**设 $\{P_n\} \subset \mathbf{R}^2$,则 $\{P_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,存在自然数 N,使得 $\forall n, m > N$,有 $d(P_n, P_m) < \varepsilon$.

21. **闭集套定理:**设 $\{\Omega_i\}$ 为非空闭集列,且满足条件:

(1)　$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \Omega_{n+1} \supset \cdots$;

(2)　$\operatorname{diam}\Omega_i = \sup\limits_{M_1, M_2 \in \Omega_i} d(M_1, M_2) \to 0 (i \to \infty)$;(diam$\Omega$ 称为集合 Ω 的直径)

则存在唯一点 M_0,使得 $\{M_0\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\Omega_i$.

22. **紧致性定理**:有界点列必存在收敛子列.

23. **定义 15**(开覆盖) 设 D 为一开集族,F 为一点集,如果 $\forall P\in F$,存在一个开集 $G\in D$,使得 $P\in G$,则称开集族 D 是点集 F 的一个开覆盖.

24. **有限覆盖定理**:设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭集,开集族 D 为 E 的一个开覆盖,则必存在 D 中的有限个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_k$,使得 $E\subset\bigcup_{j=1}^{k}G_j$.

6.1.3 例题解析

例 6-1 在 $\mathbf{R}^2$ 中证明定理 1.即,设 $P_k=(x_k,y_k)$,$P_0=(x_0,y_0)$,证明

$$P_k\to P_0\Leftrightarrow\begin{cases}x_k\to x_0\\ y_k\to y_0\end{cases}\quad(k\to\infty).$$

证 ($\Rightarrow$)因为 $\forall\varepsilon>0$,存在自然数 K,使得只要 $k>K$,就有

$$\left.\begin{matrix}|x_k-x_0|\\ |y_k-y_0|\end{matrix}\right\}\leqslant\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}=d(P_k,P_0)<\varepsilon$$

故有$\begin{cases}x_k\to x_0\\ y_k\to y_0\end{cases}\quad(k\to\infty)$.

($\Leftarrow$)因为 $\forall\varepsilon>0$,存在自然数 K_1,K_2,使得

$$\text{当 }k>K_1\text{ 时有 }|x_k-x_0|<\frac{\varepsilon}{2};\text{当 }k>K_2\text{ 时有 }|y_k-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故只要 $k>K=\max(K_1,K_2)$,就有

$$d(P_k,P_0)=\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}\leqslant|x_k-x_0|+|y_k-y_0|<\varepsilon.$$

即 $P_k\to P_0(k\to\infty)$. ■

注 1. 本证明用到 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^1$ 中点列收敛的定义及距离的三角不等式等知识点.

2. 本定理指出,$\mathbf{R}^2$ 中的点列 $\{P_k\}$ 的收敛性问题等价于其各坐标分量作成的实数点列 $\{x_k\}$ 与 $\{y_k\}$ 同时收敛性问题.且若 $P_k\to P_0$,则 P_0 的坐标分量恰是 P_k 各坐标分量的极限.据实数点列极限性质可见,平面点列极限若存在,必唯一.求 $\{P_k\}$ 的极限问题归结为求实数点列极限问题.

3. 比较点列极限定义与邻域定义可知,$\mathbf{R}^2$ 中点列 $\{P_k\}$ 以 P_0 为极限的几何意义为:对预先任意给定的邻域 $U(P_0,\varepsilon)$,至多除去 $\{P_k\}$ 中的有限个点 $P'_1,P'_2,\cdots,P'_k$,其余将全部进入 $U(P_0,\varepsilon)$ 内(图 6.1).进而可推出,对全体 $\{P_k\}$,$d(P_k,O)$ 有界.即收敛点列 $\{P_k\}$ 必有界:$\exists M>0$,使 $\forall k\in\mathbf{Z}^+$,$d(P_k,O)\leqslant M$.如对 $\varepsilon_0>0$,只要取

$M = \max(d(P_0, O) + \varepsilon_0, d(P'_1, O), \cdots, d(P'_k, O))$
即可.

4. 本定理的证明方法及上述讨论对 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{P_k\}$ 同样成立. 故当 $\{P_k\} \subset \mathbf{R}^n$ 时,本定理也成立.

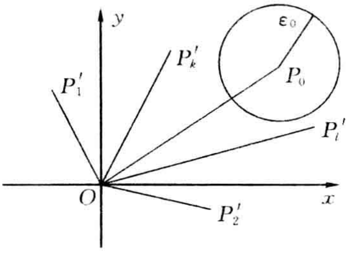


图 6.1　收敛点列必有界

例 6 - 2　证明:(1) 有限个开集的交集为开集;(2) 任意多个开集的并(和)为开集.

证　(1)　设开集 $E_1, E_2, \cdots, E_k \subset \mathbf{R}^n$,$E = \bigcap_{j=1}^{k} E_j$.

$\forall P \in E$,有 $P \in E_j(j = 1, 2, \cdots, k)$. 因为 E_j 为开集,所以 $\exists \delta_j > 0$,使得

$$U(P_j, \delta_j) \subset E_j(j = 1, 2, \cdots, k).$$

现取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$,则

$$U(P, \delta) \subseteq U(P, \delta_j) \subset E_j \quad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

故 $U(P, \delta) \subset \bigcap_{j=1}^{k} E_j = E$. 由 $P \in E$ 的任意性及开集的定义得,$E = \bigcap_{j=1}^{k} E_j$ 是开集.

(2)　设 $D = \{E_\alpha\}$ 为一开集族,I 为指标集,$\alpha \in I$,$E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$.

$\forall P \in E$,必存在 $\alpha_0 \in I$,使得 $P \in E_{\alpha_0} \subset E$. 因为 E_{α_0} 为开集,所以存在 $\delta > 0$,使得 $U(P, \delta) \subset E_{\alpha_0} \subset E$. 由 $P \in E$ 的任意性及开集的定义知,$E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是开集. ■

注　1. 本证明用到集合的交、并(和)概念及开集的定义等知识点.

2. 在(1)的证明中,通过取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$,证明了有限个开集之交仍为开集. 易于看出,此证法不能推广到 k 为无穷的情形. 因为当 k 为无穷时,$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots)$ 可以不存在,而可有 $\inf(\delta_1, \delta_2, \cdots) = 0$ 的情形发生. 事实上,k 为无穷时,结论可以不成立. 例如开集族 $\left\{U\left(P, \frac{1}{j}\right)\right\}$ 之交集:$\{P\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} U\left(P, \frac{1}{j}\right)$ 不是开集. 这正是因为 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$ 不存在,$\delta_j \to 0 = \inf\{\delta_1, \delta_2, \cdots\}$. 即只能说有限个开集之交为开集,而任意多个开集之交不一定是开集.

3. 任意多个开集的并集为开集,这里"任意多个"包含不可数无穷多个的情形,因为证明中并没有限制指标集为自然数集. 例如,对 $r \in (0, 1) = I$,开集族 $\{U(0, r)\}$ 包含了不可数无穷多个开集,其并集仍为开集.

4. 开集的上述运算性质是很重要的基本性质,应当完全掌握.

例 6 - 3　证明 $\partial E = \overline{E} \backslash E^0$.

证 1° $\forall q\in\partial E$,由边界点定义,$\forall\delta>0$,$U(q,\delta)\cap E\neq\varnothing$,且在$U(q,\delta)$内有非 E 中的点 $\Rightarrow q\notin E^0$.

若 $\exists\delta_0>0$,使得 $U^*(q,\delta_0)\cap E=\varnothing$,则 $q\in E\subset\overline{E}$ 为 E 的孤立点,故有 $q\in\overline{E}\backslash E^0$.

若 $\forall\delta>0$,$U^*(q,\delta)\cap E\neq\varnothing$,则 q 为 E 的聚点.由 $\overline{E}$ 的定义,$q\in\overline{E}$.故 $q\in\overline{E}\backslash E^0$.

由 $q\in\partial E$ 的任意性知,$\partial E\subseteq\overline{E}\backslash E^0$.

2° $\forall p\in\overline{E}\backslash E^0$,则 $p\in\overline{E}$,$p\notin E^0$.由 $\overline{E}$ 的定义,若 $p\notin E$,则 p 为 E 的聚点,即 $\forall\delta>0$,$U^*(p,\delta)\cap E\neq\varnothing$,且 $U(p,\delta)$ 内有非 E 中的点.由边界点定义,$p\in\partial E$.

若 $p\in E\subset\overline{E}$,则 $\forall\delta>0$,$p\in U(p,\delta)\cap E$,即 $U(p,\delta)\cap E\neq\varnothing$.又因为 $p\notin E^0$,所以 $\forall\delta>0$,$U(p,\delta)$ 内有非 E 中的点.由边界点定义,$p\in\partial E$.由 $p\in\overline{E}\backslash E^0$ 的任意性,$\overline{E}\backslash E^0\subseteq\partial E$.

综合 1°,2° 得 $\partial E=\overline{E}\backslash E^0$. ■

注 1. 本例证明用到边界点定义,聚点定义,孤立点定义,闭包定义,内部、内点的定义等知识点.特别地,用到非内点定义的数学表述.

2. 本证明是分为 1°、2° 两部分进行的,这是证明集合等式的通用方法,即要证明集合等式 $A=B$,必须证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.即 $\forall\alpha\in A\Rightarrow\alpha\in B$,且 $\forall\beta\in B\Rightarrow\beta\in A$.

3. 由本题可见,点集 E 的边界是 E 的内部 E^0 的关于 E 的闭包 $\overline{E}$ 的余集.故可有 $\overline{E}=E^0\cup\partial E$.值得注意的是,在此关系中,可有 $E^0=\varnothing$,即可有 $\overline{E}=\partial E$ 成立.由于 $E^0=\varnothing$ 并不蕴含着$(\overline{E})^0=\varnothing$,所以可有$(\partial E)^0\neq\varnothing$.这一结果与我们通常关于“边界”的理解似乎不相符,但我们必须严格按“边界”的概念来理解它.例如 $E=\{P=(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x,y$ 均为有理数$\}$.易见 $E^0=\varnothing$.由有理数在实数中的稠密性可知 $\overline{E}=\mathbf{R}^2$.由本题结果可得 $\partial E=\overline{E}=\mathbf{R}^2$,所以$(\partial E)^0=(\overline{E})^0=\mathbf{R}^2$.由边界的定义不难检验,$\mathbf{R}^2$ 中任一点是 E 的边界点,即 $\mathbf{R}^2=\partial E$.由此还说明,一般情况下,$E^0\neq(\overline{E})^0$.

例 6-4 证明:E 为闭集 $\Leftrightarrow\mathbf{R}^2\backslash E$ 为开集.

证 ($\Rightarrow$) 因为 E 为闭集,所以 $E=\overline{E}$.

$\forall p\in\mathbf{R}^2\backslash E$,有 $p\notin E=\overline{E}$.由例 6-3 的注 3,$p\notin E=\overline{E}=E^0\cup\partial E$,故 p 为 E 的外点.即 $\exists\delta>0$,使得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$,此即 $U(p,\delta)\subset\mathbf{R}^2\backslash E$.由 $p\in\mathbf{R}^2\backslash E$ 的任意性及开集的定义知,$\mathbf{R}^2\backslash E$ 为一开集.

($\Leftarrow$) 因为 $\mathbf{R}^2\backslash E$ 为开集,所以 $\forall p\in\mathbf{R}^2\backslash E$,$\exists\delta>0$,使得 $U(p,\delta)\subset\mathbf{R}^2\backslash E$.注

意 $E\cap(\mathbf{R}^2\setminus E)=\varnothing$，得 $U(p,\delta)\cap E=\varnothing$. 由外点的定义，$p$ 为 E 的外点. 由 $p\in\mathbf{R}^2\setminus E$ 的任意性，知 $\mathbf{R}^2\setminus E$ 为 E 的外部. 故 $E=(\mathbf{R}^2\setminus E)^c=E^0\cup\partial E=E$，即 E 为闭集. ■

注 1. 本题用到闭集的定义，余集的定义，外点与外部的定义及例 6-3 的注 3 等知识点.

2. 由本例结果，也可以如下定义闭集：其余集 $E^c=\mathbf{R}^2\setminus E$ 为开集的点集 E 称为闭集. 由本例可见，此定义与本节关于闭集的定义是等价的.

例 6-5 证明闭集的性质：

(1) $\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是闭集；

(2) 有限个闭集的并(和)是闭集；

(3) 任意多个闭集之交是闭集.

证 (1) 因为$(\mathbf{R}^2)^0=\mathbf{R}^2$，$\varnothing^0=\varnothing$，故 $\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 为开集. 又因为 $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}^2=\varnothing$，$\mathbf{R}^2\setminus\varnothing=\mathbf{R}^2$，故由例 6-4 的结果知，$\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 均为闭集.

(2) 设 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 为闭集，为证 $\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 为闭集，来证 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 为开集. 为此，证明等式 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j=\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$.

一方面，$\forall p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$，$p\notin\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$，即 $\forall j\in\{1,2,\cdots,k\}$ 有 $p\notin F_j\Rightarrow p\in\mathbf{R}^2\setminus F_j(j=1,2,\cdots,k)$. 所以，$p\in\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$. 由 $p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 的任意性，$\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j\subseteq\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$.

另一方面，$\forall p\in\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$，有 $\forall j\in\{1,2,\cdots,k\}$，$p\in\mathbf{R}^2\setminus F_j\Rightarrow p\notin F_j(j=1,2,\cdots,k)\Rightarrow p\notin\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$. 故 $p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$. 由 $p\in\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$ 的任意性，$\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)\subseteq\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$.

综上述两方面的结果，$\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j=\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)$.

由于 F_j 为闭集，据例 6-4 的结果，$\mathbf{R}^2\setminus F_j$ 为开集$(j=1,2,\cdots,k)$. 再由开集的性质知，$\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)=\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 为开集 $\Rightarrow\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 为闭集.

(3) 设$\{F_\alpha\}$为一闭集族，$\alpha\in I$. 为证 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 为一闭集，只要证明 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 为开集. 为此，证明 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$.

因为 $\forall p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$，有 $p\notin\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$，则必存在 $\alpha_0\in I$，使得 $p\notin F_{\alpha_0}\Rightarrow$

$p\in \mathbf{R}^2\setminus F_{\alpha_0}$，故有 $p\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$. 由 $p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 的任意性，$\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$.

另一方面，$\forall p\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$，必存在 $\alpha_0\in I$，使得 $p\in\mathbf{R}^2\setminus F_{\alpha_0}$，即存在 $\alpha_0\in I$，使得 $p\notin F_{\alpha_0}\Rightarrow p\notin\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$. 所以 $p\in\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$. 由 $p\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$ 的任意性，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)\subseteq\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$.

综上述两方面的结果得 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$.

因为 $\forall\alpha\in I,F_\alpha$ 为闭集 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha$ 为开集，故由开集性质，$\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$ 为开集. 再由例 6－4 的结果，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 为闭集. ■

注 1. 本题用到开集的性质(例 6－2)，余集的概念及例 6－4 的结果等知识点.

2. 对本题 2，3 小题，利用例 6－4 的结果，只需证明 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}F_j$ 与 $\mathbf{R}^2\setminus\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 为开集. 为此，转化为两个集合等式的证明：

$$\mathbf{R}^2\setminus\bigcup_{j=1}^{k}F_j=\bigcap_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j),\quad \mathbf{R}^2\setminus\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha).$$

这种转化是解决问题的关键. 由 F_j 与 F_α 的性质及开集性质，此二等式右端显然是开集，从而使原问题迎刃而解.

3. 值得注意的是，在证明等式

$$\mathbf{R}^2\setminus\bigcup_{j=1}^{k}F_j=\bigcap_{j=1}^{k}(\mathbf{R}^2\setminus F_j)\quad 与\quad \mathbf{R}^2\setminus\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(\mathbf{R}^2\setminus F_\alpha)$$

时，并没有用到 F_j，F_α 为闭集的条件，所以此二等式对一般集合也是成立的. 此性质可简单说成：并集的余集等于余集的交集，而交集的余集等于余集的并集. 这两条集合运算性质是十分有用的，应当熟练掌握.

4. 本题所给出的闭集性质中，关于并集的结论是：有限个闭集的并为闭集，即不能保证无限多个闭集之并集为闭集. 例如闭集族 $\left\{\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]\right\}_{n=2}^{\infty}$ 的并集 $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]=(0,1)$ 不再是闭集. 关于交集的结论是：任意个闭集的交为闭集，这里的“任意个”不仅可包含无穷多，而且可包含不可数无穷多，因为在证明中我们没有用到指标集 I 为自然数集，即这里允许 I 为不可数集. 例如可取 $I=(0,1)$.

例 6－6 证明下列各题：

(1) P_0 是集合 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ 存在互异点列 $\{P_n\}\subset E$，使得 $P_n\to P_0(n\to\infty)$.

(2)　E 为闭集 $\Leftrightarrow \forall \{P_n\} \subset E$,若 $P_n \to P_0(n \to \infty)$,则 $P_0 \in E$.

证　(1)　由 $P_n \to P_0(n \to \infty)$ 的定义及聚点的定义,充分性显然.

下面证必要性.

设 P_0 是 E 的一个聚点,由定义,$\forall \delta > 0, U^*(P_0,\delta) \cap E \neq \varnothing$.

第一步,取 $\delta_1 > 0$,由 $U^*(P_0,\delta_1) \cap E \neq \varnothing$,$\exists P_1 \in U^*(P_0,\delta_1) \cap E$.

第二步,取 $\delta_2 = \dfrac{1}{2}d(P_1,P_0)$,$\exists P_2 \in U^*(P_0,\delta_2) \cap E$.

注意 $U^*(P_0,\delta_2)$ 的开性,必有 $P_2 \neq P_1, \delta_1 > \delta_2 > 0$.

⋮

第 $n+1$ 步,取 $\delta_{n+1} = \dfrac{1}{2}d(P_n,P_0)$,$\exists P_{n+1} \in U^*(P_0,\delta_{n+1}) \cap E$.

显然,$P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1}$ 互异,且 $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \delta_{n+1} > 0$.

如此无限进行下去,得互异点列 $\{P_n\} \subset E$. 由 $\delta_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}d(P_1,P_0) \to 0(n \to \infty)$ 及点列极限的定义,$P_n \to P_0(n \to \infty)$. 必要性得证.

(2)　($\Rightarrow$) 现设 $\{P_n\}$ 是 E 中任一收敛点列,且 $P_n \to P_0$,来证必有 $P_0 \in E$.

假定不然,则必存在一个 E 中的互异收敛点列 $\{P'_n\}$,使得 $P'_n \to P'_0$ $(n \to \infty)P'_0$,但 $P'_0 \notin E$. 由本例(1)题结论知,P'_0 是 E 的聚点,故 $P'_0 \in \bar{E}$. 因为 E 是闭集,即 $E = \bar{E}$,由此,应有 $P'_0 \in E$,与假定矛盾. 故假定有误. 必要性得证.

($\Leftarrow$) 假定 E 不是闭集,即 $E \neq \bar{E}$. 因为 $E \subset \bar{E}$,由 $\bar{E}$ 的定义,至少有一个 E 的聚点 $P'_0 \notin E$. 由本例(1)题的结论,存在互异点列 $\{P'_n\} \subset E$,使得 $P'_n \to P'_0$ $(n \to \infty)$. 由已知,$P'_0 \in E$,与假定矛盾,故假定有误. 充分性得证.

注　1. 本题用到聚点的定义,点列收敛的定义,闭包的定义及闭集的定义等知识.

2. 本题的结论给出了闭集的本质:该点集的任一收敛点列的极限仍属于此点集. 即闭集对极限运算是封闭的,这正是区分闭集与非闭集的关键.

3. 在第(1)小题中,要求 $\{P_n\} \subset E$ 是互异点列,这是因为在聚点的定义中要求:若 P_0 是 E 的聚点,则 $\forall \delta > 0, U^*(P_0,\delta) \cap E \neq \varnothing$. 由 $\delta > 0$ 的任意性可知,在 P_0 的任意邻域内有无数多 E 的互异点,故作为充要条件,这里强调 $\{P_n\} \subset E$ 是互异点列是不可少的. 正因为这一条,点集 E 的孤立点不是 E 的聚点,只能是边界点,这是值得注意的.

例 6-7　设 $A, B \subset \mathbf{R}^2$,证明下列各题:

(1)　$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$;

(2)　$(A \cup B)^0 \supset A^0 \cup B^0$;

(3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(5) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$;

(6) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

证 (1) 首先注意$(A \cap B)^0 \subset A^0$. 事实上,由内部的定义,$\forall P \in (A \cap B)^0 \subseteq A \cap B \subset A$,$P$ 为 $A \cap B$ 的内点,即 $P \in A \cap B \subset A$,且 $\exists \delta > 0$,使得 $U(P,\delta) \subset A \cap B \subset A$. 故 P 为 A 的内点,即 $P \in A^0$. 由 $P \in (A \cap B)^0$ 的任意性,得 $(A \cap B)^0 \subset A^0$. 同理可得$(A \cap B)^0 \subset B^0$. 所以$(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$.

另一方面,$\forall P \in A^0 \cap B^0$,有 $P \in A^0 \subset A$,$P \in B^0 \subset B$. 所以 $P \in A \cap B$. 且因为 P 既是 A 的内点,又是 B 的内点. 故 $\exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$,使得 $U(P,\delta_1) \subset A$,$U(P,\delta_2) \subset B$.

现取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$,可有 $U(P,\delta) \subset A$ 且 $U(P,\delta) \subset B$,于是 $U(P,\delta) \subset A \cap B$. 故 P 为 $A \cap B$ 的内点,即 $P \in (A \cap B)^0$. 由 $P \in A^0 \cap B^0$ 的任意性得 $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$.

综上述两方面可得$(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

(2) $\forall P \in A^0 \cup B^0$,则至少有 $P \in A^0$ 或 $P \in B^0$ 之一发生. 设 $P \in A^0$ 发生(同理可证 $P \in B^0$ 的情形),由 $A^0 \subset A$ 得 $P \in A \subset A \cup B$. 由 P 为 A 的内点,$\exists \delta > 0$,使得 $U(P,\delta) \subset A \subset A \cup B$. 由内点的定义,$P$ 为 $A \cup B$ 的内点,即 $P \in (A \cup B)^0$. 注意 $P \in A^0 \cup B^0$ 的任意性,$A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0$.

(3) $\forall P \in \overline{A \cap B}$,由例 6-3 的注释 3 及本例第(1)小题结论,有

$$P \in \overline{A \cap B} = (A \cap B)^0 \cup \partial(A \cap B) = (A^0 \cap B^0) \cup \partial(A \cap B).$$

则 $P \in A^0 \cap B^0$ 或者 $P \in \partial(A \cap B)$.

若 $P \in A^0 \cap B^0$,有 $P \in A^0 \subset \overline{A}$ 且 $P \in B^0 \subset \overline{B}$,即 $P \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

若 $P \notin A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$,则必有 $P \in \partial(A \cap B)$. 由边界的定义,P 为 $A \cap B$ 的边界点,故 $\forall \delta > 0$ 有 $U(P,\delta) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$. 由 $A \cap B \subset A$ 且 $A \cap B \subset B$ 得,$U(P,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 且 $U(P,\delta) \cap B \neq \varnothing$. 再由 $\delta > 0$ 的任意性知,P 或者为 A 的孤立点 $\Rightarrow P \in A \subset \overline{A}$,或者为 A 的聚点 $\Rightarrow P \in \overline{A}$. 且同时也有 P 或者为 B 的孤立点 $\Rightarrow P \in B \subset \overline{B}$,或者为 B 的聚点 $\Rightarrow P \in \overline{B}$. 于是,总有 $P \in \overline{A}$ 且 $P \in \overline{B}$,即 $P \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

即只要 $P \in \overline{A \cap B}$,就有 $P \in \overline{A} \cap \overline{B}$. 由 $P \in \overline{A \cap B}$ 的任意性,$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(4) $\forall P \in \overline{A \cup B}$,由例 6-3 的注释 3,$P \in (A \cup B)^0 \cup \partial(A \cup B)$,即 $P \in (A \cup B)^0$ 或者 $P \in \partial(A \cup B)$.

若 $P \in (A \cup B)^0$,由$(A \cup B)^0 \subset A \cup B$ 知 $P \in A \cup B$,即 $P \in A \subset \overline{A}$ 或者 $P \in B \subset \overline{B}$,所以 $P \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

若 $P \notin (A \cup B)^0$，则必有 $P \in \partial(A \cup B)$. 即 $\forall \delta > 0, U(P,\delta) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$，则至少有 $U(P,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 与 $U(P,\delta) \cap B \neq \varnothing$ 之一发生.

不妨设 $U(P,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 发生. 注意第(2)小题结果，$(A \cup B)^0 \supset A^0 \cup B^0$. 所以由 $P \notin (A \cup B)^0$，必有 $P \notin A^0 \cup B^0$，即 $P \notin A^0$ 且 $P \notin B^0$.

当 $U(P,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 时，因为 $\bar{A} = A^0 \cup \partial A$，且 $A \subset \bar{A}$，所以 $U(P,\delta) \cap \partial A \neq \varnothing$. 由 $\delta > 0$ 的任意性，$P \in \partial A \subset \bar{A}$. 故 $P \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

同理可证，当 $U(P,\delta) \cap B \neq \varnothing$ 时，$P \in \partial B \subset \bar{B} \Rightarrow P \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

由 $P \in \overline{A \cup B}$ 的任意性，得 $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

反过来，$\forall P \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow P \in \bar{A}$ 或者 $P \in \bar{B}$. 现设 $P \in \bar{A} = A^0 \cup \partial A$.

若 $P \in A^0$，由 $A^0 \subset A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ 知 $P \in \overline{A \cup B}$.

若 $P \notin A^0$，则有 $P \in \partial A$. 即 $\forall \delta > 0, U(P,\delta) \cap A \neq \varnothing$. 由 $A \subset A \cup B$ 知，$U(P,\delta) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$，则或者 $P \in A \cup B \subset \overline{A \cup B}$，或者 $P \notin A \cup B$，但由 $\delta > 0$ 的任意性知 P 必为 $A \cup B$ 的聚点 $\Rightarrow P \in \overline{A \cup B}$.

所以，当 $P \in \bar{A}$，必有 $P \in \overline{A \cup B}$. 同理可证，当 $P \in \bar{B}$，必有 $P \in \overline{A \cup B}$.

由 $P \in \bar{A} \cup \bar{B}$ 的任意性，$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

综上述两方面的结果，$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(5) $\forall q \in \partial(A \cup B)$，来证 $q \in \partial A \cup \partial B$.

因为 q 为 $A \cup B$ 的边界点，所以 $\forall \delta > 0, U(q,\delta) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$，且 $U(q,\delta)$ 内有非 $A \cup B$ 的点. 即 $U(q,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 或者 $U(q,\delta) \cap B \neq \varnothing$，且 $U(q,\delta)$ 内有既非 A 也非 B 的点. 由 $\delta > 0$ 的任意性及边界点定义，若 $U(q,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 发生，则 $q \in \partial A$；若 $U(q,\delta) \cap B \neq \varnothing$ 发生，则 $q \in \partial B$. 由于二者至少一个发生，故 $q \in \partial A \cup \partial B$.

再由 $q \in \partial(A \cup B)$ 的任意性，得 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

(6) $\forall q \in \partial(A \cap B)$，来证 $q \in \partial A \cup \partial B$.

因为 q 为 $A \cap B$ 的边界点，所以，$\forall \delta > 0, U(q,\delta) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$，且 $U(q,\delta)$ 内有非 $A \cap B$ 的点. 注意 $U(q,\delta) \cap (A \cap B) \subset A \cap B \subset A$ 且 $U(q,\delta) \cap (A \cap B) \subset A \cap B \subset B$，故知 $U(q,\delta) \cap A \neq \varnothing$ 且 $U(q,\delta) \cap B \neq \varnothing$. 同时，在 $U(q,\delta)$ 内至少有非 A 的点与有非 B 的点之一情况发生. 若在 $U(q,\delta)$ 内有非 A 的点发生，$q \in \partial A$；若另一种情况发生，$q \in \partial B$. 但二者至少一个发生，故 $q \in \partial A \cup \partial B$.

由 $q \in \partial(A \cap B)$ 的任意性得，$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$. ■

注 1. 本题用到内部、内点的定义，闭集、聚点的定义及边界、边界点的定义，集合等式、包含关系的证明方法等知识点.

2. 本例第(1)、(4)小题为等式. 第(1)小题的结果表明：$\mathbf{R}^2$ 内两集合交的内部等于该两集合内部的交，即取内部与取交可交换次序. 只要反复(有限次地)应用

此结果，即知本例的结论可推广到有限个集合的情形：

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)^0 = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)^0 = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})^0 \cap A_k^0$$
$$= \cdots = A_1^0 \cap A_2^0 \cap \cdots \cap A_{k-1}^0 \cap A_k^0 = \bigcap_{j=1}^{k} A_j^0$$

第(4)小题的结果表明，$\mathbf{R}^2$ 内二集合并的闭包等于该两集合的闭包之并，即取闭包与求并(和)可交换次序. 只要反复应用这一结果，即知这一结论也可推广到有限个集合的情形：

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1}} \cup \overline{A_k}$$
$$= \cdots = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_{k-1}} \cup \overline{A_k} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

3. 本例除第(1)、(4)小题为等式关系外，其余均为包含关系. 下面以第(2)小题为例，来说明相反的包含关系为什么不能成立：

设 $p \in (A \cup B)^0$，则 p 为 $A \cup B$ 的内点，即存在 $\delta > 0$，使得 $U(p,\delta) \subset A \cup B$. 注意不能由此推出 $U(p,\delta) \subset A$ 或者 $U(p,\delta) \subset B$. 从而不能推出 $p \in A^0$ 或者 $p \in B^0$，即不能推出 $p \in A^0 \cup B^0$. 例如：

$$A = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$B = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$$

则 $A \cup B$ 为闭单位圆盘，$(A \cup B)^0$ 为开单位圆盘，$A^0 \cup B^0$ 则为开单位圆盘去掉 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\} \cup \{(x,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 0, x = 0\}$ 后的所余部分(图6.2). 当取 p 为原点(圆心)时，显然有 $p \in (A \cup B)^0$. 但无论取 $\delta > 0$ 多么小，都有 $U(p,\delta) \not\subset A$ 且 $U(p,\delta) \not\subset B$. 即 $p \notin A^0$ 且 $p \notin B^0$，从而 $p \notin A^0 \cup B^0$. 即不能有 $(A \cup B)^0 \subset A^0 \cup B^0$ 成立.

由此例也可看出，不像 $\alpha \in A \cup B \Rightarrow \alpha \in A$ 或者 $\alpha \in B$(α 为一点)，一般地，$E \subset A \cup B$ 不能推出 $E \subset A$ 或者 $E \subset B$(E 为一点集). 这一点请读者注意！

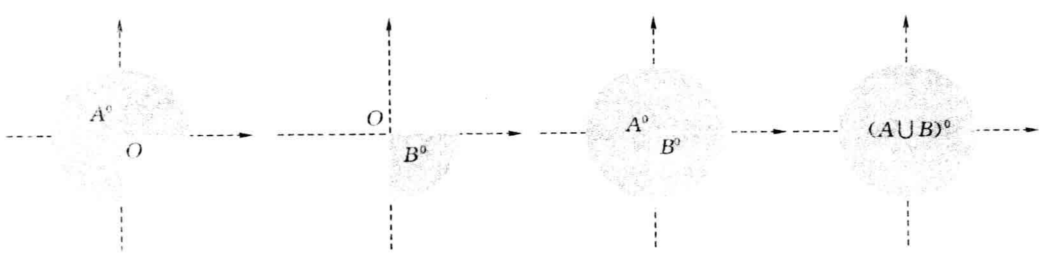


图 6.2 $p = O \in (A \cup B)^0$，$p = O \in A^0 \cup B^0$

4. 在第(3)小题中，相反的包含关系也是不成立的，因为可能发生 $A\cap B=\varnothing$ 的情形，则 $\overline{A\cap B}=\varnothing$，但 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 可以非空. 例如：

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x,y\text{ 为有理数}\},\quad B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x,y\text{ 为无理数}\}$$

则 $A\cap B=\varnothing\Rightarrow\overline{A\cap B}=\varnothing$. 但 $\overline{A}=\overline{B}=\mathbf{R}^2$，从而 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}=\overline{B}=\mathbf{R}^2$. 即只能推断包含关系 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$，而不能保证相反包含关系的成立.

5. 对第(5)、(6)小题，相反的包含关系不成立的例子较为简单. 例如：

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\},B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid (x-1)^2+y^2<1\}$$

则 $\partial A\cup\partial B$ 为此两圆的圆周(图 6.3(a))，

$$\text{而 }\partial(A\cup B)=(\partial A\cup\partial B)\setminus\left(\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=1,x>\frac{1}{2}\right\}\cup\right.$$
$$\left.\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid (x-1)^2+y^2=1,x<\frac{1}{2}\right\}\right)$$

(图 6.3(b))，

$$\partial(A\cap B)=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=1,x\geqslant\frac{1}{2}\right\}\cup$$
$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid (x-1)^2+y^2=1,x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

(图 6.3(c)).

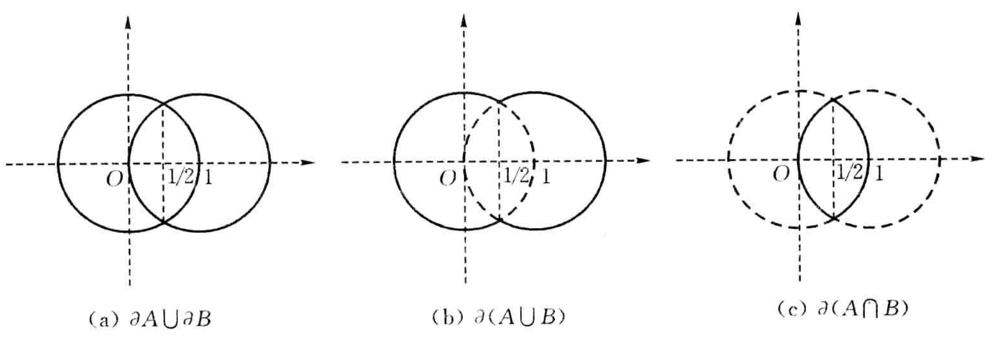


图 6.3 $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B,\partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B$

例 6-8 $\mathrm{diam}E$ 表示集合 E 的直径，其定义为 $\mathrm{diam}E=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}d(P_1,P_2)$. 试证：若 E 为有界闭集，则必存在两点 $P,Q\in E$，使 $\mathrm{diam}E=d(P,Q)$.

证 因为 $\mathrm{diam}E=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}d(P_1,P_2)$，由上确界的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists P_1$，$P_2\in E$，使得

$$\mathrm{diam}E-\varepsilon<d(P_1,P_2)\leqslant\mathrm{diam}E$$

特别地，对任意自然数 n，取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，$\exists P_n,Q_n\in E$，使得