加減乘除

加減乘除

翁　爲　編纂
段育華　校訂

商務印書館發行

自序

不佞幼時,嘗聞人言曰,算之爲學深且奧,治之易傷身,某也病,某也夭,皆攻算以致之也,惕焉畏之。後入塾,師授以算,果不解,亦無進步,心愈恐,旣而負笈歐洲,籌備入大學,日夜孜孜,算以外無他事,數閱月,舉凡數學,代數,幾何,三角等等,一一習讀之,應大學試,且錄取矣,然而知其當然,而不知其所以然也。復幾何時,偶讀法國當代大疇人普加賚(今已物化)之書,始恍然有悟,悟其一端,而全體解矣。拳拳之微,輒思貢諸當此,正之有道。奈始也困於求學,繼也迫於謀生。若夫著書,屢作屢輟,雜稿紛如,欲修整之,無餘晷也。客歲夏,商務印書館有刊行常識淺說之議,邀不佞任其一二門之編輯,不佞以數學允之。未幾,常識叢書;中止出版,而吾之數學,四法告終矣,遂持以單獨付印,顏之曰加減乘除。夫四法不過疇事之發端,僅此而爲書,毋乃太陋乎?雖然,四法者,貌淺而理賾,全部算術,基於是矣。是故洞其理,不難一以貫之,苟昧其源,而欲求有心得於高深之計學者,吾未見其有所獲也。惟其淺,故加減乘除,幾乎人人能之。亦惟其賾,故其立法之源,諳者寥寥也。蓋坊間算書,止於示法,爲人師者,又往往不誨人以所以

然。此不佞當日親嘗之苦，而舊時攻算者之所以病且夭者，正坐是也懸斯爲鑑，不佞此作，重在溯源每立一法，必授以綸，反覆丁寧，在所勿忌，讀者或得豁然於數理之萬一乎，是則不佞之願償矣。且也，是書爲淺說體裁，故示法立題，寧詳毋晦，人之以數頁竟篇者，吾數十之，非敢炫長，不爾不澈，區區苦心，在於便初學者之自修云爾。

民國十二年二月三日翁爲記

加減乘除

目　錄

加減乘除

第一章

釋數

§1. 算學之根源　算學根於比較,而比較之心,出於天賦。兒童稍有智識,卽知爭取果食之大者多者,此卽比較心之發現之明證也。比較不外辨識事物之大小,多寡,輕重,蓋吾人在世,無往而不用比較,然事物之簡單者,可憑眼力或體力約略比較之。如兩樹並植,一望而知其孰高孰低。兩石同持,一舉而知其孰輕孰重。雖然,彼此究竟高低輕重,相差若干,尙不知也。至若東城西城,各有樹多株,參差不等,欲知東城各樹之共高,較西城各樹之共高,相差若干,又安能一望而知之。其他事物之精微於此千萬倍者,更無論矣。故不得不立一準確之比較方法,以濟吾人眼力體力之窮焉,此算學之所以設也。

§2. 何謂數學　數學乃全部算學之入手處。立比較之標準,定比較之方法,以樹算學之基。

§3. 數　比較之標準曰數,卽一.二.三.四.五.六.七.八.九.十.百.千.萬等等是也。人類初生,卽立有數,數無解釋,不過爲強立之名目,以誌物之多寡,而作比較之根據而已。

二人採瓜.各盈筐而返,究不知孰多孰少也。欲求比較,勢必將瓜一一取出而數之。然瓜形相彷,若僅一一出之而置於平地,尙不能辨其多寡也。故數之之法,惟有將每瓜之上,作一記號,如第一次取出之瓜,作一一字,第二次取出之瓜,作一二字,第三次作一三字,至取盡而止。苟二人預約在前,每次所作之記號,彼此相同,則觀末瓜之記號,卽知孰多孰少矣。數之發源如此。

一乃數之基。二者,一又一之謂也。三者,一又一又一之謂也。亦卽二又一之謂也。四者,一又一又一又一之謂也,亦卽三又一之謂也。準是以推,每次加一,卽得新數,是故數可多至無窮。

數旣僅爲計物而立之名目及記號,其寫法可以不拘形式,祇求其淸楚簡單而已。現世通行之數字,爲亞拉伯字,其寫法如 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 卽一,二,三,四,五,六,七,八,九也。因其簡單而便於入算,故算學中通用之。

§4. 零 零卽無之意,亦須作一個數目字看。何以故?設甲有錢七枚而乙無錢,倘有人問甲曰,汝有錢若干?甲必答曰,七枚。又問乙曰,汝有錢若干?乙必答曰,無。所問者旣同爲數,則所答者亦必同爲數,故無亦數之一。算學中以零字代無,入算時則以 0 記之。

無中加一仍得一,故一之前爲 0, 書作 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,

§5. 數之進位 數旣多至無窮,若每數立一名,作一

號,勢必不勝其繁,且亦難於記憶,故不得不求一簡便之法。法惟何?曰,將諸數分成若干組,命曰位。每位冠一名.以示區別,而各位之內,均用相同之數字表之,自一至九爲一位,命爲單位。滿十則爲進一位之數,仍以自一至九之各數字記之,而命爲十位。十個十爲百,滿百則又進一位,亦以自一至九之各數字記之,而命爲百位。十個百爲千,滿千則又進一位爲萬位。萬進爲十萬,百萬,千萬。千萬再進爲億。億進爲十億.百億,千億。千億再進爲兆。兆進爲十兆,百兆,千兆。千兆再進爲京。京進爲十京,百京,千京。千京再進爲垓。垓進爲十垓,百垓,千垓。千垓再進爲秭。秭以上爲穰.溝,澗,正,載,極,恒河沙,阿僧秖,那由他,不可思議,無量數。

入算之時,進位之次序,自右而左,如下列所示。

	十		千	百	十		千	百	十		千	百	十		千	百	十					
…………	垓	垓	京	京	京	京	兆	兆	兆	兆	億	億	億	億	萬	萬	萬	萬	千	百	十	單
																		3	6	2	1	9

如有一數三萬六千二百十九,書之之法,祇須將各數字按位寫出之則以 3 列於萬位,以 6 列於千位,以 2 列於百位,以 1 列於十位,以 9 列於單位,如上所示,卽得矣。

迨書之既熟,則不必將單.十,百,千,萬,諸名字寫出,僅將各數字一一順次橫列之,如

36219

觀者卽一望而知其爲三萬六千二百十九矣。

倘數目極大,其最左一數,所佔何位,不能脫口而出者,可由最右一數字起,按單十百千萬諸名目向左默數之,最左一數字所指落之名,卽該數字之位數也。

準上以觀,列數之次序,極關緊要,偶有錯誤,則全數變亂矣。譬如同一3字,置於十位則爲三十,若置於百位則爲三百,其數頓大十倍,若置於千位則爲三千,其數頓大百倍,學者不可不愼。

然有時遇有數位之空者將奈何?曰,書0以補之。如二千七百零九,其十位無數字可記者,書法如下

2 7 0 9

又如四萬八千六百,則百位以下,均爲空位,書法當爲

4 8 6 0 0

又如七萬零九十一,則萬位與十位之間,剩有兩個空位,書法當爲

7 0 0 9 1

進位之法,按十而推,已如上所述。其妙處在於能使浩浩無窮之數目,可以九個數字包括而表明之。不然,一片散沙,末由收束,算法無着手處矣。學者三思之,卽能悟其妙處矣。然則進位又何必以十?此中無理可尋。古今中西,所以一律者,蓋本於人身十指之數。試觀孩童學數,必佐以指,可知古人論數,亦必用指也。

第二章
四法

加法

§6. 何謂加法　譬如有瓜兩堆,第一堆八個第二堆十四個,併成一堆,記其總數,謂之加法。相加之數曰加數,加得之總數曰和。如瓜數八與十四卽加數,加得之總數二十二卽和。

加法之理,已含於數中.如 § 3 所述,二乃一又一之變名,卽一加一之和也,三乃一又一又一之變名,亦卽一加一加一之和也,其餘各數,均可依此類推。是故無論何數,均爲若干個相積而得之和。

§7. 如何方得相加　瓜與瓜相併,仍得瓜數。若瓜與橘相和,則瓜自瓜而橘自橘,無總數之可言也。是故惟同類之物數,可以相加,異數則否,學者誌之。

如僅言某數而不繫以物名,則該數乃虛懸而設,無所指實,謂之不名數,不名數可以相加。凡本書題中有數而不說明數之所指者,均在此例。

§8. 記號　算學處處須求明瞭簡便,使作者省時省力,閱者又能一目了然,不生誤會。故凡文字,可以免省之處,悉用記號以代之。此種記號,萬國一律,非若文字之各

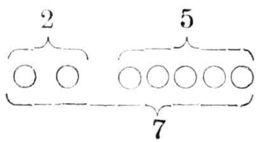
國互異也。

加法之記號爲＋。如以五加七,可書作 5 ＋ 7。加號亦曰正號。

求得之記號爲＝。如五加七得十二,則可書作 5 ＋ 7 ＝ 12, 此之謂等於。＝亦曰等號,因其表明兩端之數相等故也。

§9. <u>單位數與單位數相加</u>　加法入手處,爲記熟任何兩個單位數相加之和,如二加五得七,六加八得十四等等。自一至九之各數互加之和,爲人人所能記,且亦人人知之,今不贅錄。

學者設欲知何以二加五得七,其理可於數中尋得之。試數下圖之圈,自左而右,用筆指着最左一圈時,則口中



呼一,將筆向右移過一圈,則口中呼二,再向右移過一圈呼三,再移一圈呼四,再移一圈呼五,再移一圈呼六,再移一圈爲末圈呼七,則可知圖中共有七圈。今若換一法數之,仍自最左一圈起,呼一,移一圈呼二,移此圈復呼一,再移呼二,再移呼三,再移呼四,再移過末圈呼五,如此則可知圖中有二圈又五圈然圖中圈數,始終未變,故兩次所

得之圈數,亦應相同,由此可知二加五等於七。其實七乃二又五之變名,若曰二又五,則字多而繁,以七字代之,求其簡便也。數乃如此造成,學者可以上章 § 3 參觀之。

學者至此,對於 0 與他數相加時,或尚有疑竇。是不難,0 乃無之記號,已於上章 § 4 申明矣,故以任何一數加無,該數無變更之理,故無論何數與 0 相加,仍爲原數。

§10. <u>加法之兩種性質</u>　加法有兩種特性,今先表明之如下:

(1)　再取上節之圈而照錄之。在上節中,吾人已數得圖中有二圈又五圈,共有七圈。今若再換一法數之,仍自

$$\underbrace{\overbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}^{5}\quad\overbrace{\bigcirc\ \bigcirc}^{2}}_{7}$$

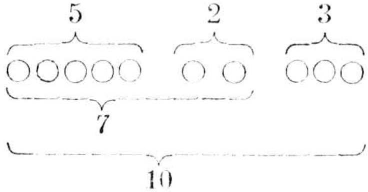
左端起.用筆指着第一圈呼一,移一圈呼二,再移一圈呼三,至呼移五之後,復呼作一,過此一復呼二,二乃末圈,故圖中共有五圈又二圈。由此觀之,五又二與二又五,其義相同,卽二加五或五加二其和同爲七也。今若用等式表明之,爲

$$2+5=5+2.$$

由此可知兩數相加之次序,可以互易,其和不變。此不特兩數爲然,卽以無論若干數相加亦然。

(2)　再取前圖之七圈,於其後再添作三圈,自左至右,

如前法數之，則末圈爲十，即共有十圈也。故可知七加三



爲十。然七乃五加二之和，是故以五與二與三分加，或先求得五與二之和，然後以此和與三相加，所得同爲十。今若用等式表明之，爲

$$5+2+3=7+3。$$

由此可知凡有若干數相加時，可先求其一部份之和，然後以此和與他數相加之。

以上兩條，乃加法之特性，施於單位多位數均無不合，演算之時，時常應用之。其理胎於數，學者細玩以上之圖說，不難索其原也。

§11. <u>多位數相加法</u>　學者既熟悉自一至九之九個數互相加得之和，則可進而討論多位數相加之法矣。夫多位數與多位數相加，驟視之甚難，蓋數既繁冗，心算有所不濟也然若將多位數按位分析之，則每位僅有一個數字，然後以各加數上同位之數字，兩兩單獨相加，則每次所加者，又僅爲單位數字矣。至於兩個單位之和，學者已知之，不難應手而得也。

析位相加之理，已含於數之進位法中。譬如有兩數於

此,第一數56,第二數31,今試依法解剖之,56卽謂該數含有5個十又6個一也,31卽謂該數含有3個十又1個一也,猶之有黃豆兩堆,第一堆56粒,分裝5袋,每袋十粒(卽5個十),5袋之外,又餘散豆6粒(卽6個一),第二堆31粒,分裝3袋,每袋亦是十粒(卽3個十),3袋之外,又餘散豆1粒(卽1個一)。是故此兩堆黃豆相併之時,可將兩堆中不裝袋之散豆,聚在一起,再將裝袋之豆,聚在一起,然後分數之。散豆爲6粒又1粒,卽7粒。裝袋之豆,有5袋又3袋,卽8袋,每袋十粒,故袋內共有80粒。80粒加7粒,卽87粒,此卽兩堆黃豆之總數也。若不將該豆如法裝袋,則相併時,須將兩堆混在一起,然後一一數之,所得雖同,然多費手續矣。

今以56與31兩數相加時,與併豆辦法,同出一轍。卽將該兩數各分爲兩組,一組爲單位數字,卽6與1(卽上說之散豆粒數),一組爲十位數字,卽5與3(卽上說之袋數),然後以單位數與單位數相加得7,此卽和之單位數字(卽上說之散豆總數),以十位與十位數相加得8,此卽和之十位數字(卽上說之總袋數),故兩數之和爲87。倘不如此加法,勢必於56上,疊加31個一,或於31上,疊加56個一,所得仍同,惟滯笨不堪,且遇數之大者,則更不勝其繁矣。析位相加,妙處在此

惟學者當牢記一事,卽無論若干數相加時,祇能將其

同位之數字相加,卽單位與單位相加,十位與十位相加,百位與百位相加等等,否則全盤錯誤矣。

加法之方法既明,玆羅列數題於下,以示演算時之手續。

例題1 以五百二十三與四百六十一相加,求其和?

演算之手續,可分兩大段。第一段爲立式,第二段爲計算。

立式之法,先將五百二十三與四百六十二兩數,用亞拉伯字横書之,使之上下分列,同位相齊,卽以兩個單位數字3與1,同位於一直行上,上下相對,十位數字2與6,亦同位於一直行上,上下相對,百位數字5與4,亦同位於一直行上,上下相對,如下式所示。書畢,於兩數之下,作一横線,線下所以記求得之和。更於線上左端,作一+號,以表明此乃加式。

$$
\begin{array}{rl}
523 & \text{加數} \\
+\quad 461 & \text{加數} \\
\hline
984 & \text{和}
\end{array}
$$

式既立矣,計算繼之,其次序如下:

第一步,從加數之單位入手(單位亦稱末位,因其爲數尾之故也)。卽以3與1相加,得4,書之於横線之下,且與横線上面之單位數字相對,此卽和之單位數字也。

第二步,入於加數之十位。卽以2與6相加,得8,書之於

橫線之下,且與橫線上面之十位數字相對,此卽和之十位數字也。

第三步,入於加數之百位。卽以5與4相加,得9,書之於橫線之下,且與橫綫上面之百位數字相對,此卽和之百位數字也。

至此,加數之各位數字,均已一一加過,演算之手續,已完全告竣。今橫線下之984,卽本題所求之和。讀作九百八十四。

例題2　以二十四與二十八相加,求其和?

本題立式之法,一如前例,先將24與28,上下橫列之,而齊其位,卽使其同位之數字,兩兩相對,如下式所示。次於數下作一橫線,線上左端作一+號,以表明此乃加式。

$$
\begin{array}{rl}
24 & \text{加數} \\
+\ \ \overset{}{\underset{1}{2}}8 & \text{加數} \\
\hline
52 & \text{和}
\end{array}
$$

計算之次序如下:

第一步,從加數之單位着手。卽以4與8相加,得12,12有兩位數字,一係單位,一係十位,其單位數字2,當記於橫線下之單位上,此卽和之單位數字,而12之十位數字1,當記於加數之十位上,卽式中橫線上之小1,至求十位和數字時再倂入之。

第二步,入於加數之十位。卽以2與6相加得4。惟從單

位升入本位之1,應一併加入,故再以4與1相加得5,書於橫線下之十位上,此卽和之十位數字。

至此,加法已畢。橫線下之52,卽本題所求之和,讀作五十二。

學者於此,須注意升位之法。

如本題之兩個單位數字4與8相加,得12。何以1須升入十位計算?則亦有個道理。譬如有黃豆兩堆,第一堆二十四粒,第二堆二十八粒,假定每十粒裝一袋,則24粒分明是兩袋又另四粒,28粒分明是兩袋又另八粒,兩堆相加時,可以先將散豆聚在一起,得12粒,袋豆聚在一起,得4袋,惟12粒散豆,又可以如法另裝一袋,併入袋豆一起。如此則餘散豆兩粒,袋豆五袋,卽五十粒,共計五十二粒,此卽升位之法也。

例題3 以一百六十加七十,求其和?

列式齊位如下式,法與前同。

$$
\begin{array}{rl}
160 & \text{加數} \\
+\ {}_{1}70 & \text{加數} \\
\hline
230 & \text{和}
\end{array}
$$

計算第一步,從單位起。以0與0相加,仍得0,書之於橫線下之單位上,此卽和之單位數字。

第二步,入於十位。以6與7相加,得13,3爲本位數字,書之於橫線下之十位上,此卽和之十位數字,而記其1於加數百位上,至求和之百位數字時,再併入之。