XIANXINGDAISHU

线性代数

关家骥 文如庆 等 编

中南工业大学出版社

线性代数

关家骥　文如庆　等编

中南工业大学出版社

湘新登字010号

线性代数

关家骥　　文如庆　　等编
责任编辑：谢贵良

*

中南工业大学出版社出版发行
长沙市华中印刷厂印装
湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092　1／16　印张：8.75　字数：221　千字
1992年12月第1版　　　　1993年3月第2次印刷
印数：1001－5200

*

ISBN 7－81020－506－4／O.062
定价：4.10元

前　言

本书是根据1987年国家教委批准的高等工业学校《数学课程教学基本要求》中有关线性代数部份的内容编写而成。

为适应需要较多数学内容的专业选用，书中列出了一些带有“*”的内容，预计讲完全书需50学时左右。大专班可选用前四章，约需22学时左右（带“*”内容不讲），一般工科本科专业可选用前六章内容，约需34学时左右（带“*”内容不讲）。

本书的编写分工是：第一章和第二章的前三节文如庆、第二章的后三节和第三章徐星尧，第四章关家骥，第五章和第六章晏玲俐，第七章李世华。

由于编者水平有限，虽试用多次，但书中缺点、错误难免，欢迎读者指正。

编　者

一九九一年十月

目 录

第一章　　行列式

§1-1　n阶行列式

1-1-1、二、三阶行列式

行列式作为一个重要数学工具在各个学科中都会经常用到它，特别在线性代数中更是起着重要作用，我们首先简要地介绍二阶与三阶行列式。

我们知道，任何一个二元一次方程组经过变形后都可化为一般形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

如果$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，经过计算可得这个方程组的唯一解为:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了简便与容易记忆，我们定义二阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

它共有两项，每一项是两个数的乘积，这两个数在每行每列中各占一个，且一项前加正号，另一项前加负号。

为了记忆方便，可用对角线法则，即这个行列式等于主对角线(由左上角到右下角)的两元素(数)相乘之积减去次对角线(由左下角到右上角)的两元素(数)相乘之积，见下图:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix}$$

于是上面二元一次方程组的解可写为:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地，对于一般的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

为了简便地写出它的解，可引进三阶行列式的概念。

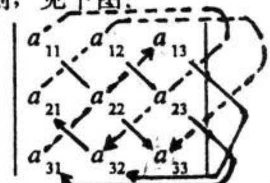
定义三阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31}$$

它共有六项，每一项是三个数的乘积$a_{1i}a_{2j}a_{3k}$，并带有一定的符号，其中第一个下标表明该元素(数)所在的行数，称为行标。第二个下标表明所在的列数，称为列标。

为了便于记忆也可用对角线法则，见下图：



凡是实线上三个元素相乘所得到的项的前面带正号；虚线上三个元素相乘所得到的项前面带负号。

如果上面三元一次方程组的系数列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D \neq 0$$

则这两个方程组的唯一解可写为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

例 1 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

解：系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

该方程组的唯一解为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0&2&1\\1&-1&1\\3&-1&2\end{vmatrix}}{D}=-\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&3&2\end{vmatrix}}{D}=-\frac{1}{2}\qquad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\2&-1&1\\1&-1&3\end{vmatrix}}{D}=\frac{3}{2}$$

从上面的例子可看出，利用二、三阶行列式来求解系数行列式不等于零的二、三元一次方程组是很方便的。要把这个方法推广到解任意个未知数的一次方程组就需要给出 n 阶行列式的定义。

由上可知二阶与三阶行列式具有一个共性，就是每一项都是所有不同行、不同列的元素之乘积，而行列式的展开式是所有这些项的代数和。(注意，由于数的乘法满足是交换律，这里元素按行的自然顺序排列是人为的。)因此，二阶行列式恰有 2! 项，三阶行列式恰有 3! 项(第二下标的全排列数)。

另外一个重要问题是行列式的各项都带有符号，这些正、负号是根据什么规律确定的呢？由于各项的第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带符号只与第二个下标的排列有关，为了把二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，需要引进排列逆序数的概念。

1-1-2、排列的逆序数

定义 1: 在 1，2…n 的一个全排列(称为 n 级排列)中，若排在前面的一个数大于排在它后面的一个数，则称这两个数构成一个逆序。排列中逆序的总数，称为此排列的逆序数。

例 1 在 4 级排列 3412 中，3 与 4，1 与 2 不构成逆序，但 3 与 1，3 与 2，4 与 1，4 与 2 构成逆序，所以 4 级排列 3412 的逆序数为 4。

一般地，设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 1，2，…n 的一个 n 级排列，若记 $t(P_1P_2\cdots P_n)$为此 n 级排的逆序数，则按定义易知有：$t(P_1P_2\cdots P_n)=t_1$(P_1 后面比 P_1 小的数的个数)+t_2(P_2 后面比 P_2 小的数的个数)+……+t_{n-1}(P_{n-1} 后面比 P_{n-1} 小的数的个数)。

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例 2 求(1)35412，(2) 243615，(3) 123…n 的逆序数，并说明奇、偶性。

解：(1) $t(35412)=2+3+2+0=7$, 35412为奇排列。

(2) $t(243615)=1+2+1+2+0=6$, 243615为偶排列。

(3) $t(123\cdots n)=0$, 12…n为偶排列。

例 3 选择 i 与 j 使由九个不同的自然数所成的排列 1274i56j9 成偶排列。

解：由题意 i,j 仅有两种可能：(1) i = 3，j = 8；(2) i = 8，j = 3。而

$t(127435689)=0+0+4+1+0+0+0+0=5$

$t(127485639)=0+0+4+1+3+1+2+0=10$

所以 i = 8，j = 3 时，即 127485639 为偶排列。

一排列中两数互换位置，其它数字不动，得另一排列，这种改变叫对换。

例如，排列 2431 经过 1 与 2 对换后，得排列 1432，易知 2431 为偶排列，经对换后而成的排列 1432 是奇排列。一般地，有以下结论：

定理 1 排列经一次对换改变其奇偶性。

一般规定把 n 个自然数，按由小到大的标准次序排列称为标准排列。

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数。

1-1-3 n 阶行列式的定义

前面已知一个三阶行列式是六项的代数和，每一项$a_{1i}a_{2j}a_{3k}$的前面带有符号，现在容易看出，各项所带的符号可以由第二个下标排列 ijk 的奇偶性来决定：当 ijk 是偶排列时，对应的项前带正号；当 ijk 是奇排列时，相应次前带负号。若用 t 表排列 ijk 的逆序数，则各项所带的符号为$(-1)^t$。 ijk.

由此三阶行列式可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

这里“$\sum$”是对所有三级排列 ijk 求和。

容易验证二阶行列式也可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1i}a_{2j}$$

这里 t 为排列 i j 的逆序数，“$\sum$”是对所有二级排列 i j 求和。

这样一来，我们很自然地把行列式的概念推广到 n 阶去。

定义 2 设有 n^2 个数，排列成 n 行 n 列如下：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{3}$$

作出其中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，各乘积前所带的符号为$(-1)^t$，即得形如：

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\ (t = t(p_1p_2\cdots p_n))$$

的项，然后对所有 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，这个和称为与(3)式中数表相应的 n 阶行列式，记为：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{4}$$

主对角线(左上角到右下角)上(下)方元素全为零的行列式称为下(上)三角行列式。

例 4 试证明下(上)三角行列式等于主对角线元素的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{5}$$

证: $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

由于对a_{ij}，当$j>i$时，$a_{ij}=0$，所以D中不为零的元素应满足$p_k\leqslant k$，即$p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，$\cdots p_n\leqslant n$，在排列$p_1p_2\cdots p_n$中能满足上述关系的排列只有$12\cdots(n-1)n$。

即 $D=(-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

特别有对角行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{6}$$

上述行列式定义，是把 n 个元素的行标按标准顺序排列的，由于数的乘法可交换，所以这 n 个元素的次序可以任意写，一般乘积的项可写:

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列，把它们的逆序数分别记为 t_1 与 t_2，利用排列的性质可得如下结果:

定理 2 n 阶行列式可写为:

$$D=\sum(-1)^{t_1+t_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

推论 n 阶行列式也可定义为:

$$D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

其中 t 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

证: 按定理 2 所述，可用一系列元素对换，把$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$变为$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$即得。

§ 1–2 行列式的性质

直接从定义来计算高阶行列式是很困难的，但若能灵活运用行列式的性质便可大大简化高阶行列式的计算。下面我们介绍行列式的一些基本性质。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。即，若设:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(D'称为D的转置行列式),则 $D = D'$

上述性质表明，行列式的行与列处于同等地位，因此，对行成立的结论，对列也成立。

性质 2 行列式中两行(列)互换后，行列式仅变号。

证: 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 中第 i 行与第 j 行元素互换而成，若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则当$k \neq i$、j时，$b_{kp} = a_{kp}$；当$k = i$、j时，$b_{ip} = a_{jp}$，$b_{jp} = a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} + b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}(-1) a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

推论 两行(列)相同的行列式必为零。

证: 互换这相同的两行，有$D = -D$，故$D = 0$。

性质 3 用数 k 乘某一行(列)中所有元素，等于用数 k 来此行列式(或行列式中某行(列)所

有元素的公因子可提到行列式符号外面). 即若设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D_1=kD$

推论 有一行(列)的元素全为零的行列式必等于零.

性质 4 两行(列)元素成比例的行列式必等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2$$

性质 6 把行列式某行(列)各元素都 k 倍后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变。即:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1$$

在计算行列式时为了检验可注明步聚，为方便起见，采用以下记号:

用 r_i 表示行列式的第 i 行，以 C_i 表示第 i 列，交换 i，j 两行记为 $r_i<\!\!-\!\!-\!\!>r_j$，交换两

列记为 $C_i \longleftrightarrow C_j$，第 i 行乘以 k，记为 $r_i \times k$，i 列乘以 k，记为 $C_i \times k$，以数 k 乘第 j 行加到第 i 列行上记为 r_i+kr_j，以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上记为 C_i+kC_j。

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

解：可利用行列式性质把 D 化为上三角行列式来计算：

$$D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \longleftrightarrow r_4} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \longleftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+8r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 30$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$d=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：

$$d \xlongequal[(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} (n-1)b+a & (n-1)b+a & (n-1)b+a & \cdots & (n-1)b+a \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i - br_1}{=} \quad [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

$$= [a+(n-1)b] \cdot (a-b)^{n-1}$$

§1-3 行列式按行(列)展开

我们知道，在计算行列式时，阶数越低，则计算就越容易，下面我们来介绍把高阶行列式转化为低阶行列式的方法:

定义 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，把a_{ij}所在的第 i 行与第 j 列的元素都划去，剩下的元素(按原顺序)组成的 n−1 阶行列式称为a_{ij}的余子式。记为M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,\,1} & \cdots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & \cdots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \cdots & a_{n,\,n} \end{vmatrix}$$

而把$(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

定理 1 在D中，若第 i 行元素除a_{ij}外，其他都是零，则$D=a_{ij}A_{ij}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}$$

定理 2 (行列式按行列展开的法则)行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,\ 2\cdots n)$$

$$(=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,\ 2\cdots n))$$

证:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$ 证毕。

定理 3 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,\ i\neq j$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0,\ i\neq j$$

证明: 由行列式性质 2 的推论知两行元素对应相等的行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

另一方面, 根据定理2按第j行元素展开, 有

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

所以

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$ 证毕

把定理 2 与定理 3 结合起来可综述为:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

若令:

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 当 i=j 时 \\ 0, & 当 i\neq j 时 \end{cases}$$

则有:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}$$

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

解: