

GAODENG SHUXUE
JIQI MATLAB SHIXIAN

高等数学

及其 MATLAB 实现

任玉杰 张世泽 © 主编

(上册)



中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

014013400

013-39
05
V1

GAODENG SHUXUE
JIQI MATLAB SHIXIAN

高等数学

及其 MATLAB 实现

任玉杰 张世泽 © 主编

(上册)



中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
· 广州 ·



北航

C1700393

013-39
05
V1

003810319

版权所有 翻印必究

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学及其 MATLAB 实现·上册/任玉杰, 张世泽主编. —广州: 中山大学出版社, 2013. 8

ISBN 978 - 7 - 306 - 04560 - 7

I. ①高… II. ①任… ②张… III. ①Matlab 软件—应用—高等数学—教材
IV. ①O13 - 39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 114489 号

出版人: 徐 劲

策划编辑: 赵丽华

责任编辑: 赵丽华

封面设计: 曾 斌

责任校对: 张礼凤

责任技编: 何雅涛

出版发行: 中山大学出版社

电 话: 编辑部 020 - 84111996, 84113349, 84111997, 84110779

发行部 020 - 84111998, 84111981, 84111160

地 址: 广州市新港西路 135 号

邮 编: 510275 传 真: 020 - 84036565

网 址: <http://www.zsup.com.cn> E-mail: zdcbs@mail.sysu.edu.cn

印 刷 者: 佛山市浩文彩色印刷有限公司

规 格: 787mm × 1092mm 1/16 27.5 印张 668 千字

版次印次: 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 1 ~ 2000 册 定 价: 40.00 元

如发现本书因印装质量影响阅读, 请与出版社发行部联系调换

前 言

本套教材分为《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》、《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》、《高等数学及其 MATLAB 实现辅导》和多媒体课件。它是高等数学课程教学内容和体系改革的研究成果，也是根据作者多年来的教学和科研经验，集思广益，广泛吸取国内外一些相关教材之所长，在此基础上把教学内容、教学体系、教学手段改革融为一体的新型改革教材。本套教材在如下几方面进行了新的探索：

(1) 从数学统一性的观点，从全面素质教育的高度，打破了传统的大学数学教学体系，设计了一套新大学课程体系，将计算机数学软件 MATLAB 的相关内容分别融入高等数学、线性代数和概率与数理统计课程之中，增加了实验环节，形成非数学专业的三门必修课——高等数学及其 MATLAB 实现、线性代数及其 MATLAB 实现和概率与数理统计及其 MATLAB 实现。向学生传授一套完整地、科学地解决一类问题的方法，使学生能够适应将来的工作和科研环境需要。

(2) 在计算手段的处理上，采用了手工计算和计算机计算各有侧重的处理手法。在高等数学的内容处理上，采用了以手工计算为主、计算机计算为辅的策略。为了使学生理解和掌握高等数学的理论和方法，在每节都配备了 A 组的基本题和 B 组的提高题，每章还给出了总复习题以供学生进行手工计算，在每章最后加入了用计算机软件 MATLAB 作数学实验的内容，通过计算机模拟仿真，给出极限、连续、微积分中值定理、微积分的几何应用等内容的可视化动态图形，加深学生对它们的理解，并给出了用计算机处理实际问题的算例和程序，使学生了解用计算机软件进行科学计算的方法。

(3) 在内容安排上，考虑到目前我国硕士研究生数学入学考试的要求和师资队伍的结构等问题，将非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容安排在每章的前几节，而数学实验内容安排在每章的最后；在下册还附有近年考研真题，以便学生根据情况选用，拓宽学生的知识视野。

(4) 作者把多年在大学数学实验教学中编写的一些 MATLAB 程序和例题融入到本教材中，书中的数学方法都配备了 MATLAB 计算程序和作图程序，具有科研和实用价值。

(5) 加强数学应用能力和科学计算能力的培养。本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质。把数学建模的最基本的内容和方法融入教材，便于学生在学习微积分的同时学会用数学方法将实际问题转化为数学模型，然后用计算机程序进行科学计算。此外，在教材中除保留了几何应用和物理应用外，还增加了经济应用（如边际分析、资本现值和投资问题等）和上机实验的应用问题。在每章的最后一节中，列举了大量的用 MATLAB 计算和绘图的例题和上机实验的习题，使学生在学会用微积分解决实际问题的同时，也学会用计算机软件解决对应问题的方法，从而培养学生数学应用能力和科学计算能力，使学生能够适应将来的工作和科研

环境。

(6) 在数学实验环节, 作者利用编写的动态演示程序等画图程序, 动态地显示函数和数列求极限的动态变化过程、微积分定理的几何意义等, 从几何方面直观地帮助学生理解有关的概念和定理。用这种将数学软件 MATLAB 融入教学之中, 增加数学实验环节, 加强应用和几何直观, 增加应用性的例题和习题, 每章配有上计算机计算的数学实验课题的手段, 培养学生的科学计算能力, 使学生的知识、能力和素质都能够得到提高。应该说, 这是原有教学过程的一个飞跃。

相应地, 这套教材对教师也提出了更高的要求。教师不但要能讲授知识, 而且要会应用计算机软件, 还要改进教学方法, 能够进行创新研究。这当然有利于教师能力和教学水平的提高。

本书由大连工业大学教授任玉杰博士策划并负责全书大纲的设计、统稿和修改。主编有任玉杰和营口理工学院副校长张世泽, 副主编有辽宁省教育厅王维、北京航空航天大学北海学院教授方有康、中山大学南方学院孙明岩和营口理工学院何万里。本教材各章节执笔人是: 任玉杰编写第二章、第三章 § 3.6、第四章 § 4.10、第五章、第六章、第七章和第八章; 张世泽、王维、辽宁大学研究生刘倩倩和刘绍华编写习题、第三章和第四章; 北京航空航天大学北海学院教授方有康, 营口理工学院教授孙贺琦、何万里、李印和鲁鑫, 中山大学南方学院副教授毛锦庚和教师孙明岩、薄宏、王琳、陈放、谢晓洁、王刻奇、许晴媛、余永龙, 辽宁石油化工大学教授刘国志和副教授苗晨, 大连工业大学教授康健, 沈阳大学教授李艳娟, 广州市政工程设计研究院苏兴杰参编其余部分。

本书编著得到了大连工业大学、北京航空航天大学北海学院、营口理工学院和中山大学南方学院有关领导的大力支持, 还得到了有关同行、作者的硕士研究生导师滕素珍教授和博士研究生导师张鸿庆教授的热情支持和帮助, 在此表示衷心的感谢。本书在中山大学出版社的合作小组的大力支持下, 特别是在编辑赵丽华和有关工作人员的辛勤劳动和精心编校下出版, 在此一并表示真诚的感谢!

教学改革教材应该多模式、多品种, 本书只是对其中一种模式所做的初步探索和尝试, 在内容精简和实现数学机械化以及培养学生数学应用能力和科学计算能力等方面, 我们虽然也作了一些努力, 但仍感觉差距很大。真诚地欢迎同行、读者和专家提出不同的意见, 并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。最后, 我们也真诚地欢迎对本教材有兴趣的同行参加试用。

任玉杰

2013年7月3日

目 录

第一章 预备知识	1	1.5.1 指令行的编辑	36
§ 1.1 集合与区间	1	1.5.2 数组的输入法及其的 运算	36
1.1.1 集合	1	1.5.3 语句、变量和 表达式	39
1.1.2 实数与若干常见 实数集	2	1.5.4 MATLAB 函数及其 运算	40
1.1.3 实数的绝对值和 邻域	3	1.5.5 符号变量和符号表达式 的生成	42
1.1.4 平面上的点与直线	4	1.5.6 符号形式与数值形式的 相互转换	43
1.1.5 方程和不等式	6	1.5.7 解代数方程(组)	45
习题 1.1	8	1.5.8 化简、代换、复合函数 和反函数的运算	48
§ 1.2 函数及其简单性质	10	习题 1.5	54
1.2.1 函数的概念	10	第二章 极限与连续	56
1.2.2 函数的几种简单 性质	12	§ 2.1 数列的极限	56
1.2.3 反函数与复合函数	15	2.1.1 数列的概念	56
习题 1.2	17	2.1.2 数列的极限	56
§ 1.3 初等函数及分段函数举例	18	习题 2.1	61
1.3.1 基本初等函数	18	§ 2.2 函数的极限	62
1.3.2 初等函数	24	2.2.1 趋向于无穷大时的 极限	62
1.3.3 常用的三角函数 公式	25	2.2.2 函数在定点的极限	63
1.3.4 分段函数举例	26	2.2.3 函数的左极限与 右极限	65
习题 1.3	28	2.2.4 函数极限的性质	66
§ 1.4 某些常用经济函数及建立 函数关系举例	29	习题 2.2	67
1.4.1 某些常用经济函数	29	§ 2.3 极限的运算 两个重要 极限	67
1.4.2 建立函数关系举例	32	2.3.1 极限的四则运算	68
习题 1.4	33		
复习题一	34		
§ 1.5 MATLAB 有关函数和代数 方程(组)的计算	35		

2.3.2 判别极限存在的两个 准则·····	70	3.2.1 函数的和、差、积、商的 求导法则·····	116
2.3.3 两个重要极限·····	72	3.2.2 复合函数求导 法则·····	118
习题 2.3·····	76	3.2.3 反函数求导法则·····	120
§ 2.4 无穷小量与无穷大量·····	77	3.2.4 基本求导公式·····	121
2.4.1 无穷小量·····	77	习题 3.2·····	122
2.4.2 无穷大量·····	79	§ 3.3 高阶导数·····	123
2.4.3 无穷小量和无穷大量的 阶·····	79	3.3.1 高阶导数的概念·····	123
2.4.4 关于等价无穷小·····	80	3.3.2 常用函数的高阶 导数·····	125
习题 2.4·····	82	习题 3.3·····	127
§ 2.5 函数的连续性·····	82	§ 3.4 隐函数的导数、参数方程 确定的函数的导数·····	128
2.5.1 连续函数的概念·····	83	3.4.1 隐函数的导数·····	128
2.5.2 初等函数的连续性·····	86	3.4.2 取对数求导法·····	130
2.5.3 间断点的分类·····	87	3.4.3 由参数方程所确定的 函数的导数·····	131
2.5.4 闭区间上连续函数的 性质·····	88	习题 3.4·····	133
习题 2.5·····	90	§ 3.5 微分·····	134
复习题二·····	92	3.5.1 微分的概念·····	134
§ 2.6 MATLAB 求极限的符号 运算·····	94	3.5.2 微分的几何意义·····	136
2.6.1 极限的符号运算·····	94	3.5.3 微分法则·····	136
2.6.2 极限的可视化·····	97	3.5.4 微分形式的 不变性·····	137
习题 2.6·····	102	3.5.5 微分在近似计算中的 应用·····	138
第三章 导数与微分 ·····	106	习题 3.5·····	140
§ 3.1 导数概念·····	106	复习题三·····	141
3.1.1 导数概念的引例·····	106	§ 3.6 导数与微分的 MATLAB 符号 计算·····	143
3.1.2 导数概念·····	107	3.6.1 一元显函数导数的符号 计算·····	143
3.1.3 导数的几何意义、经济 意义和物理意义·····	110	3.6.2 隐函数和参数方程 求导的符号计算·····	149
3.1.4 可导与连续的 关系·····	112	3.6.3 一元函数微分的符号 计算·····	150
3.1.5 单侧导数与可导的 关系·····	112	习题 3.6·····	156
习题 3.1·····	115		
§ 3.2 求导法则及基本导数 公式·····	116		

第四章 中值定理与导数应用	159	4.10.4 函数最值的 MATLAB 实现	206
§ 4.1 中值定理	159	习题 4.10	211
4.1.1 罗尔定理	159	第五章 不定积分	213
4.1.2 拉格朗日中值 定理	160	§ 5.1 不定积分概念	213
4.1.3 柯西中值定理	163	5.1.1 原函数	213
习题 4.1	164	5.1.2 不定积分	213
§ 4.2 罗比塔法则	164	5.1.2 不定积分的几何 意义	214
习题 4.2	168	习题 5.1	214
§ 4.3 函数的单调性判定法	168	§ 5.2 不定积分性质及基本积分 公式	215
习题 4.3	171	5.2.1 不定积分的性质	215
§ 4.4 函数的极值	172	5.2.2 基本积分公式	216
习题 4.4	175	习题 5.2	218
§ 4.5 函数的最大值与最小值 及应用	175	§ 5.3 换元积分法	219
习题 4.5	178	5.3.1 第一换元积分法	219
§ 4.6 函数的凸凹与拐点	180	5.3.2 第二换元积分法	222
习题 4.6	181	习题 5.3	224
§ 4.7 函数图形的描绘	182	§ 5.4 分部积分法	225
习题 4.7	185	习题 5.4	227
§ 4.8 曲率	185	§ 5.5 几种特殊类型函数的 积分	228
习题 4.8	188	5.5.1 有理函数的积分	228
§ 4.9 边际分析与弹性分析 介绍	188	5.5.2 三角函数有理式的 积分	232
4.9.1 边际分析	188	5.5.3 简单无理函数的 积分	234
4.9.2 弹性分析	190	习题 5.5	235
习题 4.9	191	§ 5.6 积分表的使用	236
复习题四	191	习题 5.6	237
§ 4.10 中值定理和导数应用的 MATLAB 实现	193	复习题五	238
4.10.1 中值定理的 MATLAB 实现	193	§ 5.7 不定积分的 MATLAB 符号 计算实验	239
4.10.2 罗比塔法则求极限的 MATLAB 实现	194	5.7.1 用函数 int 进行不定积分 的符号计算	239
4.10.3 函数作图的 MATLAB 实现	199		

5.7.2 用函数 diff 进行不定积分 的符号计算	244	6.6.5 广义积分的 MATLAB 实现	281
习题 5.7	247	习题 6.6	291
第六章 定积分	249	第七章 定积分的应用	295
§ 6.1 定积分概念	249	§ 7.1 平面图形的面积	295
6.1.1 引例	249	习题 7.1	298
6.1.2 定积分的定义	251	§ 7.2 立体的体积	299
习题 6.1	253	习题 7.2	302
§ 6.2 定积分的性质	253	§ 7.3 微元法及其应用	303
习题 6.2	256	7.3.1 微元法	303
§ 6.3 微积分基本公式	257	7.3.2 微元法应用举例	304
6.3.1 积分上限函数	257	习题 7.3	305
6.3.2 牛顿——莱布尼兹 公式	258	§ 7.4 定积分在物理中的某些 应用	305
习题 6.3	260	7.4.1 液体的静压力	305
§ 6.4 定积分的换元与分部 积分法	260	7.4.2 功	306
6.4.1 换元积分法	261	7.4.3 平均值	307
6.4.2 分部积分法	263	习题 7.4	309
习题 6.4	264	§ 7.5 定积分在经济问题中的 应用	310
§ 6.5 广义积分	265	7.5.1 由边际函数求 原函数	310
6.5.1 无穷限广义积分	265	7.5.2 资本现值和投资 问题	312
6.5.2 无界函数广义 积分	267	习题 7.5	313
习题 6.5	269	复习题七	314
复习题六	269	§ 7.6 定积分的应用的 MATLAB 实现	315
§ 6.6 定积分的 MATLAB 符号 计算	271	7.6.1 求平面图形面积	315
6.6.1 定积分的符号 计算	271	7.6.2 求立体的体积	320
6.6.2 定积分的几何意义的 MATLAB 实现	275	7.6.3 定积分在物理中应用	324
6.6.3 定积分的物理意义的 MATLAB 实现	279	7.6.4 定积分在经济问题中 应用	326
6.6.4 变上限积分的 MATLAB 实现	280	习题 7.6	335

第八章 空间解析几何与向量代数·····	339	8.5.1 空间直线方程·····	364
§ 8.1 空间直角坐标系·····	339	8.5.2 两直线的位置 关系·····	367
8.1.1 空间直角坐标系的 建立·····	339	8.5.3 直线与平面的位置 关系·····	368
8.1.2 空间点的直角 坐标·····	339	8.5.4 平面束方程·····	370
8.1.3 空间两点间的 距离·····	341	习题 8.5·····	371
习题 8.1·····	342	§ 8.6 二次曲面与空间曲线·····	372
§ 8.2 向量及其线性运算·····	342	8.6.1 球面·····	372
8.2.1 向量概念·····	342	8.6.2 柱面·····	373
8.2.2 向量的加法和 减法·····	343	8.6.3 旋转曲面·····	374
8.2.3 数乘向量·····	344	8.6.4 空间曲线的一般 方程·····	377
8.2.4 向量的坐标·····	345	8.6.5 空间曲线的参数 方程·····	378
8.2.5 利用坐标作向量的 线性运算·····	346	8.6.6 空间曲线在坐标面上的 投影·····	379
8.2.6 向量的模和方向角·····	347	8.6.7 二次曲面·····	380
习题 8.2·····	349	8.6.8 曲面的参数方程·····	384
§ 8.3 向量的数量积和 向量积·····	349	习题 8.6·····	385
8.3.1 二向量的数量积和 投影·····	349	复习题八·····	387
8.3.2 二向量的向量积·····	352	§ 8.7 用 MATLAB 作空间图形的方法 ·····	388
8.3.3 向量的混合积·····	355	8.7.1 函数 plot3·····	388
习题 8.3·····	356	8.7.2 绘制曲面的网图 函数·····	390
§ 8.4 平面·····	357	8.7.3 绘制旋转曲面和球面的 函数·····	393
8.4.1 平面的点法式 方程·····	358	8.7.4 综合作图·····	394
8.4.2 平面的一般方程·····	360	习题 8.7·····	397
8.4.3 两平面的夹角·····	361	习题参考答案·····	399
8.4.4 两个平面的关系·····	362	参考文献·····	428
8.4.5 点到平面的距离·····	363		
习题 8.4·····	364		
§ 8.5 空间直线及其方程·····	364		

第一章 预备知识

为了数学基础不同的同学能同一起点学习本课程的内容,在学习本课程内容之前,我们安排了高等数学中常用的一些初等数学知识的复习.

§ 1.1 集合与区间

1.1.1 集合

集合是不加定义的原始概念,所谓集合 S 就是具有某种属性的对象的全体. 集合 S 中的每一个体 a , 称为集合 S 的元素, 如果 a 是集合 S 的元素, 记为 $a \in S$, 读作“ a 属于 S ”; 如果 a 不是集合 S 的元素, 则记为 $a \notin S$, 读作“ a 不属于 S ”. 习惯上, 我们常用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合, 而用小写字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素. 我们常用两种方法表示集合, 例如, 由元素 $1, 2, 3, 4, 5$ 构造成的集合 S , 我们可以表示成 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 这种表示集合的方法, 是将集合 S 中的所有元素都列举出来, 称为列举法. 集合 S 也可以用 $S = \{n | n \text{ 是不大于 } 5 \text{ 的正整数}\}$ 的方式表示. 这里我们用一个命题“ n 是不大于 5 的正整数”来描述集合 S 中所有元素 n 的属性, 这种表示集合的方法, 称为描述法. 我们常用描述法来表示一个集合, 即用 $\{x | p(x)\}$ 表示所有满足命题 (或性质) $p(x)$ 的实数 x 组成的集合. 例如, $\{x | x^2 + 1 = 2\}$ 表示所有满足等式 $x^2 + 1 = 2$ 的实数 x 构成的集合.

集合中元素的个数为有限个的集合称为有限集合, 否则称为无限集合. 例如, 集合 $\{x | x^2 + 1 = 2\}$ 为有限集合, $\{x | x = 2n, n \text{ 为自然数}\}$ 为无限集合.

如果集合 A 中的所有元素都属于集合 B , 称 A 包含于 B , 或称 B 包含 A , 记作 $A \subseteq B$. 这时称集合 A 是集合 B 的子集. 若 $A \subseteq B$, 又 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$. 例如,

$$A = \{-1, 1\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}, C = \{x | x^2 + 1 = 2\},$$

则有 $A \subseteq B, A = C$.

不含有任何元素的集合, 称为空集, 空集记为 \emptyset . 例如, 在实数范围内集合 $\{x | x^2 + 1 = 0\}$ 就是空集. 空集是任何集合的子集. 应注意集合 $\{0\}$ 不是空集, 它是含有一个元素“0”的集合.

设 A, B 是两个集合, 由这两个集合中的所有元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

集合 A 和集合 B 的所有公共元素构成的集合称为集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例如, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, A \cap B = \{1, 3\}.$$

1.1.2 实数与若干常见实数集

数轴是研究实数的重要工具, 有关实数的许多性质都可以通过数轴直观地反映出来, 因此, 我们首先建立数轴的概念.

设有一条水平直线, 在这条直线上取一定点 O , 称为原点, 规定一个正方向 (通常规定由原点向右的方向为正方向), 再规定一个长度, 称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.

数轴上任意一点 P 都对应一个实数, 若点 P 就是原点 O , 则这个实数 $x=0$; 若点 P 在原点 O 的右侧, 则点 P 对应的实数 x 就等于用单位长度量线段 OP 得出的长度 $|OP|$, 即 $x=|OP|$; 若点 P 位于原点的左侧, 则 $x=-|OP|$. 反之, 任意一个实数 x 都可以在数轴上找到一点 P , 使得点 P 对应的实数为 x . 这样, 数轴上的点就与全体实数建立了一一对应的关系.

一般, 我们通常用 \mathbf{N} 表示所有自然数构成的集合, 用 \mathbf{Z} 表示全体整数构成的集合, 用 \mathbf{Q} 表示全体有理数构成的集合, 用 \mathbf{R} 表示全体实数构成的集合.

今后我们常要用到实数集 \mathbf{R} 的子集, 最常用的是如下各种区间:

$$(1) \text{ 开区间 } (a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$(2) \text{ 闭区间 } [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$$

$$(3) \text{ 半开半闭区间 } [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

上述区间都为有限区间, 除此之外, 有以下无限区间:

$$(1) [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$

$$(2) (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, (-\infty, -b) = \{x \mid x < -b\}, (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

这里需要说明的是, “ $+\infty$ ” 读作正无穷大, “ $-\infty$ ” 读作负无穷大, “ ∞ ” 读作无穷大, 它们只是一种记号而不是数, 不能参与四则运算.

有时, 我们用字母 I 表示一般区间.

【例 1】 利用区间表示集合 $S = \{x \mid x^2 + x - 12 > 0\}$.

解 将不等式 $x^2 + x - 12 > 0$ 左端分解因式, 化成等价形式:

$$(x-3)(x+4) > 0.$$

此不等式左端是两个因子的乘积, 为了使这个乘积为正数, 必须且只需使它们的符号相同, 即或者 $x-3 > 0$ 且 $x+4 > 0$, 或者 $x-3 < 0$ 且 $x+4 < 0$; 或者 $x > 3$, $x > -4$ 同时成立, 或者 $x < 3$, $x < -4$ 同时成立. 前者意味着 $x \in (3, +\infty)$, 后者意味着 $x \in (-\infty, -4)$. 也就是说, 不论 $x \in (3, +\infty)$ 还是 $x \in (-\infty, -4)$, 都满足不等式 $x^2 + x - 12 > 0$, 因此有

$$(-\infty, -4) \cup (3, +\infty) = \{x \mid x^2 + x - 12 > 0\}.$$

设 S 是一个非空数集, 如果存在正数 M , 使得对于所有的数 $x \in S$ 都有 $|x| \leq M$, 则称 S 为有界数集.

集合 A 中如果有最大的数 b , 则称 b 为集合 A 的最大值, A 的最大值记为 $\max A$; 集合 A 中如果有最小的数 c , 则称 c 为集合 A 的最小值, A 的最小值记为 $\min A$.

例如, 闭区间 $[0, 1]$ 和开区间 $(0, 1)$ 都是有界集. 闭区间 $[0, 1]$ 的最小值和最大值分别

是0和1, 而开区间(0, 1)既无最大值也无最小值. 这说明, 有界数集未必有最大值和最小值.

1.1.3 实数的绝对值和邻域

在研究某些问题时, 常用到实数绝对值的概念. 下面介绍一下实数绝对值的定义及性质.

1. 实数的绝对值

定义1 一个实数 x 的绝对值, 记为 $|x|$, 定义为

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是: $|x|$ 表示数轴上点 x (不论 x 在原点左边还是右边) 与原点之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

$$(1) |x| = \sqrt{x^2};$$

$$(2) |x| \geq 0;$$

$$(3) |-x| = |x|;$$

$$(4) -|x| \leq x \leq |x|;$$

因为 $x > 0$ 时, $-|x| < x = |x|$; $x < 0$ 时, $-|x| = x < |x|$; $x = 0$ 时, $-|x| = x = |x|$.

综上, 有 $-|x| \leq x \leq |x|$.

(5) 如果 $a > 0$, 则有

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

从几何意义上看, $|x| < a$ 表示所有与原点间距离小于 a 的点 x 的集合, 而 $-a < x < a$ 表示所有在点 $-a$ 和 a 之间的点 x 的集合, 所以它们表示的是相同的点集.

同理有

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

(6) 如果 $b > 0$, 则有

$$|x| > b \Leftrightarrow x < -b \text{ 或 } x > b,$$

$$|x| \geq b \Leftrightarrow x \leq -b \text{ 或 } x \geq b.$$

$$(7) |x+y| \leq |x| + |y|.$$

由上面性质 (4) 有

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

两式相加得

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

再由性质 (5) 得

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

$$(8) |x-y| \geq |x| - |y|.$$

由于 $|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$, 所以 $|x-y| \geq |x| - |y|$.

$$(9) |xy| = |x| \cdot |y|.$$

$$(10) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

2. 邻域

由绝对值性质(5)可知, 实数集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

在数轴上是一个以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 称其为点 x_0 的 δ 邻域. 称 x_0 为邻域的中心, 称 δ 为邻域的半径 (如图 1-1 所示).

例如, $|x - 5| < \frac{1}{2}$ 即是以点 $x_0 = 5$ 为中心, 以 $\frac{1}{2}$ 为半径的邻域, 也就是开区间 $(4.5,$

5.5).

有时我们会用到集合

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}.$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 后其余的点所组成的集合, 即集合 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 称其为以 x_0 为中心, δ 为半径的空心邻域 (如图 1-2 所示).

今后如果说 x_0 的某邻域, 就是指某个开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; 说 x_0 的某空心邻域, 就是指区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, δ 是某个确定的正数, 但有时没有必要指出这个正数 δ 的具体数值.

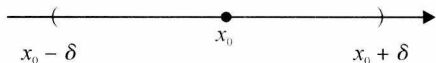


图 1-1

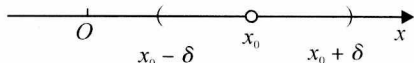


图 1-2

【例 2】 解下列不等式: ① $0 < x^2 < 4$; ② $\left| ax + \frac{1}{2} \right| < 1 (a > 0)$.

解 ① 由 $x^2 < 4$ 知 $|x| < 2$, 即 $-2 < x < 2$. 又由 $0 < x^2$ 知 $x \neq 0$, 所以 $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 2$.

② $-1 < ax + \frac{1}{2} < 1$, $-1 - \frac{1}{2} < ax < 1 - \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{3}{2} < ax < \frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2a} < x < \frac{1}{2a}$.

【例 3】 用区间表示满足不等式 $|x - a| \geq \varepsilon$ (a 为常数, $\varepsilon > 0$) 的所有 x 的集合.

解 由绝对值性质(6)知, $|x - a| \geq \varepsilon$ 等价于

$$x - a \leq -\varepsilon \quad \text{或} \quad x - a \geq \varepsilon,$$

即

$$x \leq a - \varepsilon \quad \text{或} \quad x \geq a + \varepsilon.$$

所以, 满足不等式 $|x - a| \geq \varepsilon$ 的所有 x 的集合, 就是满足 $x \leq a - \varepsilon$ 或 $x \geq a + \varepsilon$ 的所有 x 的集合, 即区间

$$(-\infty, a - \varepsilon] \cup [a + \varepsilon, +\infty).$$

1.1.4 平面上的点与直线

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy 交于点 O , 每条直线当作一条实轴、原点都在

O 处, 并且两条实轴的单位长度相等, 这样就构成了一个平面直角坐标系 xOy . 其中, 水平轴称为 x 轴或者横轴, 竖直轴称为 y 轴或者纵轴. 设 M 是平面上的任意一点, 自点 M 向 x 轴和 y 轴引垂线, 得到垂足 P 和 Q , 由于 P 和 Q 都是实轴上的点, 它们分别唯一地对应实数 x 和 y (如图 1-3 所示).

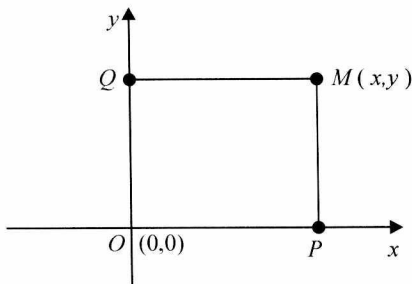


图 1-3

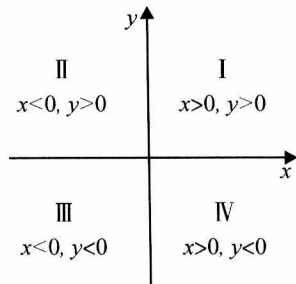


图 1-4

这就是说, 平面上每一点 M 都唯一地对应一个二元有序数组 (x, y) , 其中实数 x 称为点 M 的横坐标, 实数 y 称为点 M 的纵坐标. 反之, 任意给定一个二元有序数组 (x, y) , 可以在平面上找到唯一点 M , 使得点 M 的横坐标和纵坐标分别为 x 和 y . 因此, 在建立了平面直角坐标系后, 平面上的点 M 与有序实数组 (x, y) 之间建立了一一对应关系.

x 轴将平面分成上半平面和下半平面, y 轴将平面分成左半平面和右半平面. 两个坐标轴又将平面分成四个象限, 分别称为第 I、第 II、第 III、第 IV 象限 (如图 1-4).

设 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 是平面上的两点, 连结两点的线段 PQ 的长度 $|PQ|$ 称为 P, Q 两点之间的距离, 我们知道 P, Q 两点之间的距离 $|PQ|$ 为

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

【例 4】 求点 $A(3, -4)$ 到点 $B(-2, 3)$ 的距离, 求任一点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的距离.

解 点 $A(3, -4)$ 到点 $B(-2, 3)$ 的距离为

$$|AB| = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [(-4) - 3]^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$$

点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的距离为

$$|MO| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在以后的学习中经常遇到求平面直线方程问题. 现在给出平面上几种不同形式的直线方程.

直线的点斜式方程, 即已知直线过平面上定点 $M_0(x_0, y_0)$, 直线斜率为 k , 求此直线方程.

在所求直线上任取一点 $M(x, y)$. 我们知道直线斜率 $k = \tan\alpha$, 其中 α 是直线向上方向与 x 轴正向的夹角. 若直线与 x 轴平行或重合则 $\alpha = 0$; 若直线与 x 轴垂直则斜率不存在, 此时直线方程为 $x = a$, 即直线过点 $(a, 0)$ (如图 1-5 所示). 由此可见

$$k = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

即

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

这就是直线的点斜式方程.

由此, 我们易推出直线的以下形式的方程:

(1) 已知直线过两定点 $M(x_1, y_1)$ 和 $M(x_2, y_2)$, 则该直线的两点式方程为

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

(2) 已知直线的斜率为 k , 且与 y 轴的截距为 b , 则该直线的斜截式方程为

$$y = kx + b.$$

(3) 已知直线与 x 轴、 y 轴的截距分别为 a, b ($a \neq 0, b \neq 0$), 则该直线的截距式方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(4) 已知某直线的斜率为 k , 则与它垂直的直线的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 若又知该垂直直线过定点 (x_0, y_0) , 则该垂直的直线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

【例 5】 ①已知直线 l 过点 $(1, 2)$ 和 $(-2, 4)$, 求该直线方程.

②求与直线 l 垂直且过点 $(1, \frac{1}{2})$ 的直线方程.

解 ①直线 l 的斜率为 $k = \frac{4-2}{-2-1} = -\frac{2}{3}$, 所求直线 l 的方程为

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1),$$

即

$$3y + 2x - 8 = 0.$$

②所求直线斜率为 $-\frac{1}{k} = \frac{3}{2}$, 所求直线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 1),$$

即

$$2y - 3x + 2 = 0.$$

1.1.5 方程和不等式

在日常生活和实际工作中, 常遇到一个或多个变量之间的关系用等号或不等号联系起

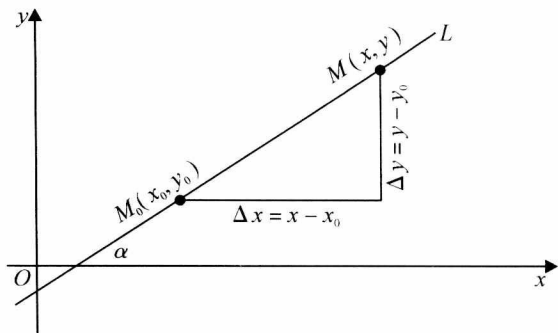


图 1-5

来, 怎样通过已知数量求未知数量, 这就是本节要讨论的方程和不等式.

1. 方程

能够使方程左右两边相等的未知量的取值叫做方程的解. 含有一个未知量的方程的解叫做方程的根.

求方程的解的过程叫做解方程.

(1) 一元一次方程.

形如 $ax + b = 0 (a \neq 0)$ 的方程叫做一元一次方程.

化成 $ax = -b (a \neq 0)$, 得到方程的解 $x = -\frac{b}{a}$.

(2) 一元二次方程.

只含有一个未知量, 并且未知量的最高次幂是二次的方程叫做一元二次方程, 它的一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

一元二次方程的解法主要有因式分解法和公式法.

一元二次方程的求根公式为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

下面举例说明求一元二次方程根的因式分解法和公式法.

【例 6】 解方程 $2x^2 - x - 6 = 0$.

解法一: 原方程分解因式化为: $(x - 2)(2x + 3) = 0$, 则有 $x - 2 = 0$ 或 $2x + 3 = 0$.

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$ 为原方程的根.

解法二: 因为 $a = 2$, $b = -1$, $c = -6$, 所以

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49.$$

由公式法得: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$.

从而得到原方程的两个根为 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

2. 不等式

能够使不等式成立的未知量的值叫做不等式的解.

(1) 一元一次不等式.

含有一个未知量, 并且未知量的最高次幂是一次的的不等式, 叫做一元一次不等式.

解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤类似.

【例 7】 解不等式 $\frac{3x - 1}{2} \leq \frac{6x - 5}{3}$.

解 去分母得 $3(3x - 1) \leq 2(6x - 5)$.

去括号得 $9x - 3 \leq 12x - 10$.

移项, 合并得 $-3x \leq -7$, 即 $x \geq \frac{7}{3}$.