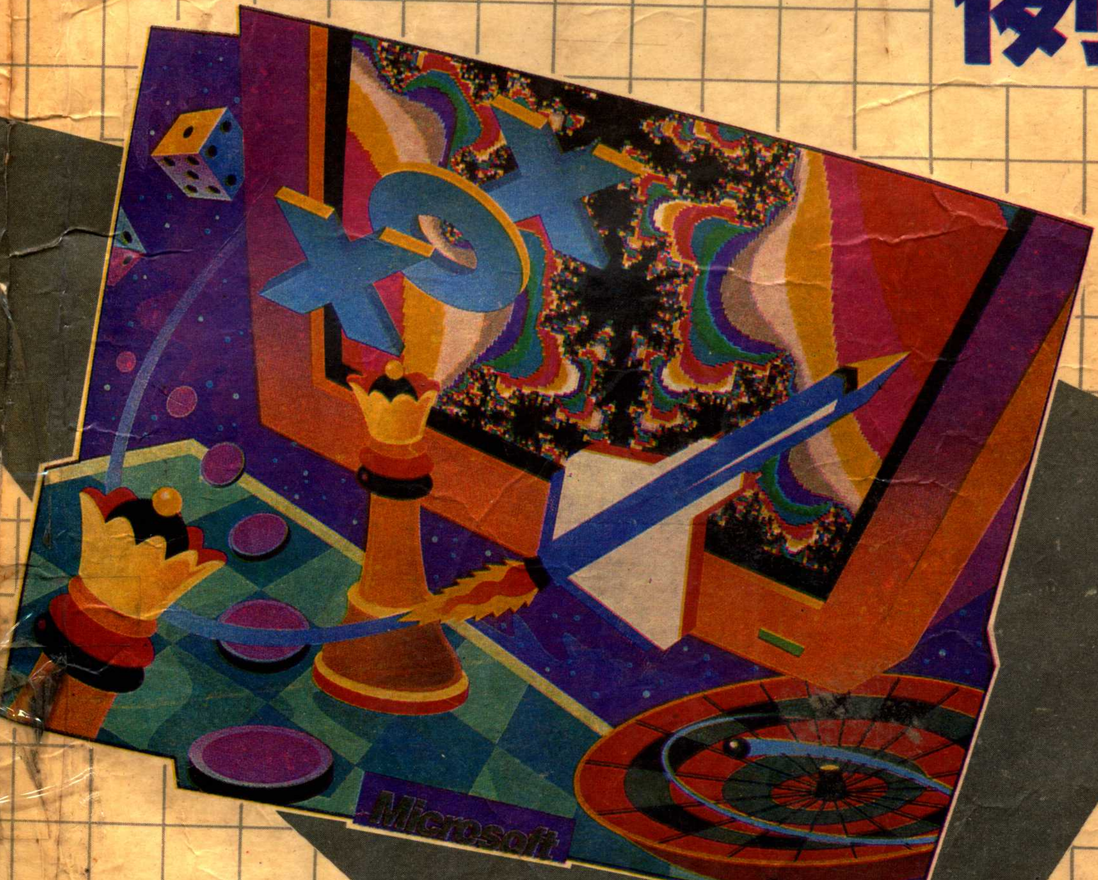
北京希望电脑公司计算机技术丛书

高等数学竞赛300例



海洋出版社

高等数学竞赛题300例分析

吴令文　编著

海　洋　出　版　社

1993年·北京

内 容 简 介

本书汇集了国内外大专生高等数学竞赛题300例，每题都附有分析与解答，全书共有六章。第一章列出竞赛题，第二章至第开章为三百题解题分析。内容包括函数、极限、连续、微分学、积分学、级数、微分方程，书后还备有提高题。 第六章编写了四份模拟试题及四份部分省、市、院、校数学竞赛试题。一些必要的概念与定理以附录的形式出现。

本书可作为高等数学习题参考书，可供非理科大学生参加高等数学竞赛前作为培训材料，也是参加硕士研究生高等数学入学考试的参考材料.

需要本书的读者，可直接与北京8721信箱联系，邮码：100080电话：2562329

（京新登字087号）

高等数学竞赛题300例分析

吴令文　编著

陈必胜　审

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）

海洋出版社发行　　常熟市教育印刷二厂印刷

开本　787×1092　1/16　印张：18.5　字数：430千字

1993年3月第一版　　1993年3月第一次印刷

印数：　1－5000

＊

ISBN 7－5027－3527－5/G·1085　　定价：15.00元

张辉 属人

目 录

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\leq$

第一章 选 例

对以下函数作图

1. $f(x)=\cos(2\arccos x)$.

2. $y=e^{\log_{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)}$.

3. $f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{1}{|x|}}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$

4. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

5. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\cdot x$.

6. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$

7. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{nx}}$.

8. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$, $[-1,1]$.

9. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,dt$.

10. $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

11. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

12. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

13. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{n}\right)^n$, $|a|<1$.

14. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$

$\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n})^{\alpha}} = n^{1992-\alpha}\frac{1}{1-[1-\alpha\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})]} = n^{1992-\alpha}\frac{1}{\frac{1}{n}\alpha+o(\frac{1}{n})} = n^{1993-\alpha}$

15. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{1992}}{n^{a}-(n-1)^{a}}$ 为异于零的有限数，试求 a 及此极限值。 $\Rightarrow \alpha=1992$，$A=\frac{1}{1993}$

$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2$

16. 证数列 2，$2+\frac{1}{2}$，$2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$，……… $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$

有极限并求之。

17. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\lim\limits_{n\to+\infty}[\cos(\pi n!x)^{2m}]\right\}$，$n$，$m$ 为自然数。

18. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在，n 为自然数。

19. 设数列 $\{U_n\}$ 由关系式 $U_1=b$，

$U_{n+1}=U_n^2+(1-2a)U_n+a^2 \quad (n\geqslant 1)$

所确定，问 a、b 是什么数时，数列 $\{U_n\}$ 收敛，其极限等于什么？

20. 设 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$，$x_0=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $\quad n=0, 1, 2, \cdots\cdots$

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{2}$ $\quad = \frac{x_n+2}{x_n+1} = 1+\frac{1}{x_n+1}$ $\quad x_{n+1}(x_n+1)=x_n+2$

21. 设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$，则

$n(n+1)^{\frac{1}{n}}<n+S_n$，$n>1$

$(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}<n-S_n$。

22. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

23. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$

24. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$

25. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{\frac{1}{x^3}}$。

26. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sin^{\frac{3}{2}}t\,dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$

27. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

试证沿任一射线 L_θ：$x=t\cos\theta$，$y=t\sin\theta$ （$t>0$），

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x, y)$ 都存在且等于零，但是全面极限却不存在。

29．设

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, & x\neq0,\\[2ex] 0, & x=\theta.\end{cases}$$

试证沿曲线族 $y=cx^{\frac{m}{n}}$（m，n 为互质的正整数，c 为非零常数）中任一条路径，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x, y)$ 存在且恒等于零，但全面极限不存在。

30．证明 $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\m\to+\infty}} 2mn\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2}$ 不存在。 $2n.$

$\sqrt{1+n^2(1-\cos\frac{\pi}{m})^2}$

31．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$ （$x>0$）

$x<e$. 1.

$x>e$. $\ln x$

$0.$

（1）求 $f(x)$。

（2）$f(x)$ 在定义域内是否连续？

$1-\cos\frac{\pi}{m}\sim\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{m^2}$

$\frac{1}{n}$

32．设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq0,\\[2ex] a, & x=0.\end{cases}$$

$g+\sin x$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数，且 $g(o)=1$。

（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。 $a=g'(0)$

（2）求 $f'(x)$。

（3）讨论 $f'(x)$，在 $x=0$ 的连续性。

33．下面命题是否成立？

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 定义，在 $x=0$ 连续，则存在 $d>0$，使 $f(x)$ 在 $(-d, d)$ 内连续。

34．讨论函数 $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$ 的连续区间，如有间断点指出类型。

35．指出 $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]$（$x>0$）的间断点，并说明属于哪一种类型。

36．设 $f(x)$ $[0, 1]$ 上连续，又设 $f(x)$ 只取有理数，且 $f(\frac{1}{2})=2$，

证 $f(x)\equiv2$。

37．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，

证明存在 $c\in[a, b]$，使 $f(c)=c$（c 称为不变点）。

38．设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A<B=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。

证明：任给 $y_1\in(A, B)$，存在 $x_1\in(-\infty, +\infty)$，使 $f(x_1)=y_1$。

39. 设$f(x)$在 $[a, b]$ 上的任意x_1, x_2, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant q|x_1-x_2| \quad q>0$$

且$f(a)\cdot f(b)<0$，证明至少存在$c\in(a, b)$，使$f(c)=0$.

40. 举出一个函数的例子，使它在$x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm 2$, $\pm\frac{1}{2}$, …, $x=\pm n$, $\pm\frac{1}{n}$ … 处有无穷间断点，在所有其他实数值x处都连续。

41. 设$f(x)$在$(0, +\infty)$上连续，且满足$f(x^2)=f(x)$ $(x>0)$ 求证$f(x)$为常数函数。

42. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(2\pi en!)$

43. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$，其中$\{x\}=x-[x]$

44. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

45. 设$f(x)$, $g(x)$，在 $[a, b]$ 上连续，且$f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，证明至少存在$c\in[a, b]$，使$f(c)=g(c)$。

46. 设$f(x)$在$[0, +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，证明$f(x)$在$[0, +\infty)$上有界。

47. 是否存在这样的函数$f(x)$，它在$[0, 1]$上每点处的值处处有限，但在这个闭区间上点点的任何邻域内无界。

48. 求证方程$x^3+px+q=0$ $(p>0)$ 有且只有一个根。

49. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，试证对于一切x满足$f(2x)=f(0)\cdot e^x$ 的充要条件为$f(x)=f(0)\cdot e^x$。

50. 设$f(x)$在$[0, 1]$上连续且$f(x)\geqslant 0$，$f(0)=f(1)$，证明存在$x\in[0, 1]$，使$f(x)=f(x+\frac{1}{2})$。

51. 求函数$y=x^2\cos 2x$在$x=0$的10阶导数。

52. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^k\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

问k何值时，在$x=0$处可导，且导函数连续。

53. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^k\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

问$f(x)$在$x=0$处多次可微，多少次连续可微（其中k为固定常数）。

54. 求 $(x^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$

55. (1) 设$f(x)\equiv 25$，求$f[f'(x)]$。

(2) 设，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求$f'[f(x)]$.

56. 设 $y=f(x)=\int_1^x \sin(\sin t)\mathrm{d}t$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}$．其中 f^{-1} 是 f 的反函数。

57. 设 $z=f(x、y)$，$x=g(y、z)$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$．

58. 设 $f(x、y、z)=\sin[x\sin(y\sin z)]$，求 $f'(x)$，$f'(y)$，$f'(z)$。

59. 设 $\begin{cases} x=e^u\cos v \\ y=e^u\sin v \\ z=u\cdot v \end{cases}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$．

60. 设 $F(x,\ x+y+z,\ xz+yz)$，并且 F 对其中变量有二阶连续偏导数，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，并整理结果（求得 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 后，可以用它来表示 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$）．

61. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 上连续可微，对 $(a,\ b)$ 上任何两点 x 和 y，存在唯一点 z，使

$$(x\ \ y)\Rightarrow\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$$

证明：$f(x)$ 或是严格凸函数，或是严格凹函数　$-f''(x)\neq 0$

62. 若实数 a_1，a_2，…，a_n 满足

$$a_0+\frac{1}{2}a_1+\cdots\cdots+\frac{1}{n}a_{n-1}+\frac{1}{n+1}a_n=0$$

证明方程　$a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$　在（0，1）因至少有一个根。

63. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在一点 $c\in(a,\ b)$，有 $f'(c)+f(c)g'(c)=0$．

64. 设 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内连续可导，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x),$$

则至少存在一个 c，使 $f'(c)=0$

65. 设 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$，证明存在 $c>0$，使 $f'(c)=\frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$．

66. 若 $a^2-3b<0$，则实系数方程

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$

只有唯一实根

67. 设 $0\leqslant b\leqslant a$，证明不等式

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}.$$

68. 证明对 $[a,\ b]$ 上连续可微的函数 $f(x)$，如果 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

69. 设函数$f(x)$在 $[x_1, x_2]$ 上可微，且$0<x_1<x_2$，证明

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(c)-cf'(c), \quad c\in(x_1, x_2).$$

70. 试证 $\sin 1=\cos\ln c$，其中 $1<c<e$.

71. 设$f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上三阶可微，且$f'''(x)$及$f(x)$有界、则$f'(x)f''(x)$也有界。

72. 设$f(x)$两次可微，且$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{[0,1]} f(x)=-1$，

证明$\max\limits_{[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

73. 设$f(x)$在 $[0, 1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\leqslant 2$，

证 $|f'(x)|<1$.

74. 设$f(x)$在$[0, 2]$上二阶可导，且$x\in[0, 2]$时，$|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，

证 $|f'(x)|\leqslant 2 \quad x\in[0, 2]$.

75. 设$f(x)$在$[a, b]$上二次可导，且$f(a)=f(b)$，则存在$c\in(a, b)$，使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

76. 设$f(x)$二阶可导，证下面两个命题：

1）$f''(x)>0$

2）曲线$y=f(x)$是上凹的，且对任给x_1，x_2有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$$

是等价的 。

77. 设$f(x)$在$[0, 1]$上二阶可导，且 $\max\limits_{[0,1]} f(x)=\frac{1}{4}$ $|f''(x)|\leqslant 1$，

试证 $|f(0)|+|f(1)|\leqslant 1$

78. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上三阶连续可导，且

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$，证明

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty} f''(x)=0 \quad .$$

79. 设$f(x)$在$[0, 1]$上其有连续三阶导数，且$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，证明在$(0, 1)$内至少存在c，使$|f'''(c)|\geqslant 24$.

80. 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上无穷次可微，且

1. 存在$L>0$，$|f^{(n)}(x)|\leqslant L$ （对 $x\in(-\infty, +\infty)$，$n\in N$），

2. $f(\frac{1}{n})=0(n=1, 2, \cdots)$

证明$f(x)\equiv 0$.

81. 设$f(x)$在$[a, b]$上可微，经过点$x_0\in(a, b)$时，导数$f'(x)$变号，且$f'(x_0)=0$，证明存在点x_1，$x_2\in[a, b]$，$x_1<x_2$，使$f(x_1)=f(x_2)$.

82. 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微，且$f'(0)\cdot f'(1)<0$，证明在$(0,1)$上可找到c，使$f'(c)=0$.

原书缺页

原书缺页

114. 提出下面一连串推理中的错误

由分部积分法（$U=\frac{1}{\sin x}$, $dV=\cos x\,dx$）得出

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx = 1+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx = 2+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \cdots$$

$$= n+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

因此有结论，　$0=1=2=\cdots=n$.

115. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$, $x>0$，求 $f(x)$.

求下列定积分：

116. $\int_0^1\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$　$d(\;\;)$

117. $\int_{-2}^{-3}\min(|x|,x^2)dx$.

118. $\int_0^a\ln(1+\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}x)dx$.　$x=a-t$

119. $\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x(x-1)}\,dx$.　$\int_\pi^0\frac{\sin(-2nx)}{\sin x}d(-x)$

120. $\int_1^e\sin(\ln x)dx$.　$\ln 3$　$\frac{e^t-1}{e^t+1}$

令 $\frac{1+x}{1-x}=e^t$

121. $\int_0^{\frac{1}{2}}x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$　$\int_0^{\ln 3}\frac{e^t-1}{e^t+1}\cdot t\,d\left(\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 3}t\,d\left(\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)^2$

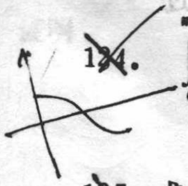
122. $\int_0^\pi\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$　$I_n-I_{n-2}=\int\frac{\sin 2nx-\sin(2n-2)x}{\sin x}dx$　$=\frac{1}{2}\left[\ln 3\cdot\frac{1}{4}-\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)^2dt\right]$

和差化积公式

123. $\int_0^a x^2\cdot\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\cdot dx$, $a>0$.　$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$　$=\frac{1}{2}\left[\frac{\ln 3}{4}-\int_0^{\ln 3}1-4\frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt\right]$

三角替换

124. $\int_0^{n\pi}|\cos x|dx$.　$n\int_0^\pi|\cos x|dx$　$2n$　令　$=\frac{1}{2}\left[\frac{\ln 3}{4}-\ln 3-4\frac{1}{e^t+1}\Big|_0^{\ln 3}\right]$



125. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^{\sqrt{3}}}{(\sin x)^{\sqrt{3}}+(\cos x)^{\sqrt{3}}}dx$.　$=\frac{\pi}{4}$　$=\frac{1}{2}\left[-\frac{3\ln 3}{4}-1+2\right]$

$x=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{(\cos x)^{\sqrt{3}}}{(\cos x)^{\sqrt{3}}+(\sin x)^{\sqrt{3}}}\cdot dx$　$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3$

126. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1994x}{\sin x} dx$.

127. 证 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

128. 求 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi - 2x)} dx$.

129. $\int_{-\pi}^{5\pi} (\cos x \cos 2x \cos 4x + \sin x \sin 2x \sin 4x) dx$.

130. 证不等式

$$\ln\sqrt{2n+1} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx.$$

131. 设 $F(x) = \sin\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right) dy\right]$, 求$F'(x)$.

$e^{-\int_0^t f(x)dt}$

132. 求在$[0, +\infty)$上的可微函数 $f(x)$，如已知作自变量代换 $u = \int_0^t f(t)dt$ 后，这函数成为 e^{-u} .

133. 证明函数 $y = f(x) = e^{x^2} \cdot \int_0^x e^{-t} dt$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增。

134. 设连续函数$f(x)$在 $[a, b]$ 上单调增加，证明

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, & a < x \leqslant b, \\ f(a), & x = a, \end{cases}$$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调递增。

135. 对 $x \geqslant 0$，证 $f(x) = \int_0^x (t - t^2)\sin^{2n} t dt$ （n为自然数）的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

136. 确定常数 a, b 使$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{ax - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{b+3t} dt = 2$.

137. 证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 0$.

138. 证明 $\frac{1}{n+1} < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx < \frac{1}{n-1}$

（1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$

$$= \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n = 2m\text{时} \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1\text{时} \end{cases}$$

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$.

139. 计算 1） $\int_0^{\pi}\theta\sin^{2n}\theta d\theta$.

2） $\int_a^b (x-a)^n(b-x)^n dx$

140. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，并且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内不变号，$m\leqslant f(x)\leqslant M(x)$，则存在 l：$m\leqslant l\leqslant M$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = l\int_a^b g(x)dx$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $c\in(a, b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx .$$

141. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且任给 $t\in[0, 1]$ 及任给 x_1，$x_2\in[a, b]$ 有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$ $f''>0$ 凸函数

证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2} .$$

根据不等式构造

142. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，任给 $x\in[0, 1]$，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$

证明

$$\left(\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(t)dt\right)<\frac{(m+M)^2}{4mM} .$$

143. 已知 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx > 0$，$n\geqslant 1$

证

(1) $f(n+1)<f(n)$

(2) $f(n)+f(n-2)=\dfrac{1}{n-1}$, $n>2$

(3) $\dfrac{1}{n+1}<2f(n)<\dfrac{1}{n-1}$, $n>2$.

144. $f(x)$在［0，1］上有连续导数，且 $f(1)-f(0)=1$.

根据柯西布尼兹不等式

证

$$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1 \ .$$

145. 设$f(x)$在［0，1］上连续，

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\ ,\quad \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1\ .$$ 反证法

求证存在一点 $x\in[0,1]$，，使 $|f(x)|>4$.

146. 设 $f(x)$，$g(x)$和它们的平方在$[a,b]$上可积

证明 $$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

147. 设函数 $f(x)$ 在［0，1］上有连续导数，且 $0<f'(x)\leqslant 1$，$f(0)=0$

证 $$\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2\geqslant\int_0^1[f(t)]^3\mathrm{d}t\ .$$

148. 设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，

证 $$\int_a^b|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{b-a}\max_{[a,b]}|f(x)|\ .$$

149. 设$f(x)$在 $[0,a]$ 上定义，当$x>0$时，$f(x)>0$，又满足方程

$$f(x)=\sqrt{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

试求出$f(x)$

150. 设$f(x)$在 $[0,+\infty]$ 上单调递增，又设

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\quad ,\ x>0\ ,\qquad F(0)=f(0+0)$$

求证$F(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递增且$F(x)$右连续

151. 讨论 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$ $(n\geqslant 0)$的敛散性