

HOPE

北京希望电脑公司计算机技术丛书

高等数学竞赛



例



海洋出版社

内容简介

高等数学竞赛题300例分析

吴令文 编著

海洋出版社

1993年·北京

内 容 简 介

本书汇集了国内外大专生高等数学竞赛题300例,每题都附有分析与解答,全书共有六章。第一章列出竞赛题,第二章至第四章为三百题解题分析。内容包括函数、极限、连续、微分学、积分学、级数、微分方程,书后还备有提高题。第六节编写了四份模拟试题及四份部分省、市、院、校数学竞赛试题。一些必要的概念与定理以附录的形式出现。

本书可作为高等数学学习题参考书,可供非理科大学生参加高等数学竞赛前作为培训材料,也是参加硕士研究生高等数学入学考试的参考材料。

需要本书的读者,可直接与北京8721信箱联系, 邮码: 100080 电话: 2562329

(京新登字087号)

高等数学竞赛题300例分析

吴令文 编著

陈必胜 审

海洋出版社出版(北京市复兴门外大街1号)
海洋出版社发行 常熟市教育印刷二厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张: 18.5 字数: 430千字
1993年3月第一版 1993年3月第一次印刷
印数: 1-5000

ISBN 7-5027-3527-5/G·1085 定价: 15.00元

张辉 序

目 录

第一章 选例	(1)
第二章 函数、极限、连续	(27)
第一节 函数与作图	(27)
第二节 函数与极限	(36)
第三节 函数与连续	(49)
第四节 综合题	(55)
第三章 微分学	(62)
第一节 导数与微分	(62)
第二节 微分中值定理	(70)
第三节 泰勒定理	(76)
第四节 导数应用	(80)
第五节 综合题	(89)
第四章 积分学	(96)
第一节 不定积分	(96)
第二节 定积分	(101)
第三节 定积分定理的应用	(110)
第四节 综合题	(117)
第五节 广义积分	(124)
第六节 含参量正常积分	(130)
第七节 重积分	(137)
第八节 曲线积分与曲面积分	(151)
第九节 积分与场论	(165)
第十节 综合题	(172)
第五章 级数与微分方程	(179)
第一节 数项级数	(179)
第二节 函数项级数	(188)
第三节 傅里叶级数	(196)
微分方程	(205)
综合题	(217)
13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n}$	(231)
数学竞赛模拟试卷一	(231)
14. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n}$	(237)
数学竞赛模拟试卷二	(237)
数学竞赛模拟试卷三	(244)

第四节	高等数学竞赛模拟试卷四.....	(251)
第五节	1991年江苏省普通高校非理科专业本科高等数学竞赛试题.....	(256)
第六节	1991年江苏省普通高校非理科专业专科高等数学竞赛试题.....	(260)
第七节	1991年高等数学竞赛试题(上海交通大学).....	(262)
第八节	第三届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛题.....	(268)
附录		(274)
(1)		附录 第一章
(2)		附录 第二章
(3)		附录 第三章
(4)		附录 第四章
(5)		附录 第五章
(6)		附录 第六章
(7)		附录 第七章
(8)		附录 第八章
(9)		附录 第九章
(10)		附录 第十章
(11)		附录 第十一章
(12)		附录 第十二章
(13)		附录 第十三章
(14)		附录 第十四章
(15)		附录 第十五章
(16)		附录 第十六章
(17)		附录 第十七章
(18)		附录 第十八章
(19)		附录 第十九章
(20)		附录 第二十章
(21)		附录 第二十一章
(22)		附录 第二十二章
(23)		附录 第二十三章
(24)		附录 第二十四章
(25)		附录 第二十五章
(26)		附录 第二十六章
(27)		附录 第二十七章
(28)		附录 第二十八章
(29)		附录 第二十九章
(30)		附录 第三十章
(31)		附录 第三十一章
(32)		附录 第三十二章
(33)		附录 第三十三章
(34)		附录 第三十四章
(35)		附录 第三十五章
(36)		附录 第三十六章
(37)		附录 第三十七章
(38)		附录 第三十八章
(39)		附录 第三十九章
(40)		附录 第四十章
(41)		附录 第四十一章
(42)		附录 第四十二章
(43)		附录 第四十三章
(44)		附录 第四十四章
(45)		附录 第四十五章
(46)		附录 第四十六章
(47)		附录 第四十七章
(48)		附录 第四十八章
(49)		附录 第四十九章
(50)		附录 第五十章
(51)		附录 第五十一章
(52)		附录 第五十二章
(53)		附录 第五十三章
(54)		附录 第五十四章
(55)		附录 第五十五章
(56)		附录 第五十六章
(57)		附录 第五十七章
(58)		附录 第五十八章
(59)		附录 第五十九章
(60)		附录 第六十章
(61)		附录 第六十一章
(62)		附录 第六十二章
(63)		附录 第六十三章
(64)		附录 第六十四章
(65)		附录 第六十五章
(66)		附录 第六十六章
(67)		附录 第六十七章
(68)		附录 第六十八章
(69)		附录 第六十九章
(70)		附录 第七十章
(71)		附录 第七十一章
(72)		附录 第七十二章
(73)		附录 第七十三章
(74)		附录 第七十四章
(75)		附录 第七十五章
(76)		附录 第七十六章
(77)		附录 第七十七章
(78)		附录 第七十八章
(79)		附录 第七十九章
(80)		附录 第八十章
(81)		附录 第八十一章
(82)		附录 第八十二章
(83)		附录 第八十三章
(84)		附录 第八十四章
(85)		附录 第八十五章
(86)		附录 第八十六章
(87)		附录 第八十七章
(88)		附录 第八十八章
(89)		附录 第八十九章
(90)		附录 第九十章
(91)		附录 第九十一章
(92)		附录 第九十二章
(93)		附录 第九十三章
(94)		附录 第九十四章
(95)		附录 第九十五章
(96)		附录 第九十六章
(97)		附录 第九十七章
(98)		附录 第九十八章
(99)		附录 第九十九章
(100)		附录 第一百章

第一章 选 例

对以下函数作图

1. $f(x) = \cos(2\arccos x), -1 \leq x \leq 1$

2. $y = e^{\log \sqrt{2}(\sin x + \cos x)}$

3. $f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

4. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2^n} x$

5. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2^n} - 1}{x^{2^n} + 1} \cdot x$

6. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$

7. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^{2^n} - e^{2^n x}}$

8. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin \pi x)^n + \sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}, [-1, 1]$

9. $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$

10. $f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$

11. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

12. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right]$

13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{n} \right)^n, |a| < 1$

14. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[(n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k - 1)^{-\frac{1}{k}} \right]$

大英3

物2

线

力学

①

工程测

实验

报告7本

$1 - (1 - \frac{1}{n})^{\alpha} = n^{1-1992-\alpha}$
 $1 - (1 - \alpha \cdot \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = n^{1-1992-\alpha}$
 $\frac{1}{n} \alpha + o(\frac{1}{n}) = n^{1993-\alpha}$

$x \rightarrow 0$
 15. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1992}}{n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha}}$ 为异于零的有限数, 试求 α 及此极限值. $\Rightarrow \alpha = 1993$

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$
 16. 证数列 $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$ $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ $a_2 > a_1$
 有极限并求之. $a_n > a_{n-1}$
 $2 + \frac{1}{a_n} < 2 + \frac{1}{a_{n-1}}$

17. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{m \rightarrow +\infty} [\cos(\pi n! x)^{2m}] \right\}$, n, m 为自然数.

18. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n$ 不存在, n 为自然数.

19. 设数列 $\{U_n\}$ 由关系式 $U_1 = b$,
 $U_{n+1} = U_n^2 + (1-2a)U_n + a^2$ ($n \geq 1$)

所确定, 问 a, b 是什么数时, 数列 $\{U_n\}$ 收敛, 其极限等于什么?

20. 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $x_0 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \dots$
 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}$
 $= \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}}$ $x_{n+1}(x_n+1) = x_n+2$

21. 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, 则
 $\frac{1}{n(n+1)} < n + S_n, n > 1$
 $(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}} < n - S_n$. $e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

22. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$
 $= \frac{\sqrt{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}}{\sqrt{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}}$

23. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\lg x) - \sin(\sin x)}{\lg x - \sin x}$
 $= \frac{\lg x + o(\lg x) - \sin x + o(\sin^2 x)}{\lg x + o(\lg x) - \sin x + o(\sin^2 x)}$

24. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$
 $= \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \cdot \left[1 - \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$

25. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{\frac{1}{x^3}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^3} \ln(1 - x + \sin x)}{\frac{1}{x^3}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x+\sin x} (1 - \cos x)}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

26. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x}$
 $\int_0^x \sin^2 t dt$
 $\int_0^x t(t - \sin t) dt$
 $\frac{1}{\sin t \sqrt{\sin x}}$ $\frac{1}{\cos x} (\sin x - \sin x \cos x)$

27. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
 $f'(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^4 + y^2} - \frac{x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{1+t^2} = 2$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^2} = 1$

试证沿任一射线 $L_\theta: x = t\cos\theta, y = t\sin\theta$ ($t > 0$), $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 都存在且等于零, 但是全面极限却不存在。

29. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

试证沿曲线族 $y = cx^{\frac{m}{n}}$ (m, n 为互质的正整数, c 为非零常数) 中任一条路径, 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 存在且恒等于零, 但全面极限不存在。

30. 证明 $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} 2mn \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2}$ 不存在。

31. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}$ ($x > 0$)

(1) 求 $f(x)$ 。

(2) $f(x)$ 在定义域内是否连续?

32. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $g(0) = 1$ 。

(1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

(2) 求 $f'(x)$ 。

(3) 讨论 $f'(x)$, 在 $x=0$ 的连续性。

33. 下面命题是否成立?

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 定义, 在 $x=0$ 连续, 则存在 $d > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(-d, d)$ 内连续。

34. 讨论函数 $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$ 的连续区间, 如有间断点指出类型。

35. 指出 $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ ($x > 0$) 的间断点, 并说明属于哪一种类型。

36. 设 $f(x)$ $[0, 1]$ 上连续, 又设 $f(x)$ 只取有理数, 且 $f(\frac{1}{2}) = 2$, 证 $f(x) \equiv 2$ 。

37. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \geq a, f(b) \leq b$, 证明存在 $c \in [a, b]$, 使 $f(c) = c$ (c 称为不变点)。

38. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A < B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 。

证明: 任给 $y_1 \in (A, B)$, 存在 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(x_1) = y_1$ 。

39. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任意 x_1, x_2 , 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|$ ($q > 0$) 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 证明至少存在 $c \in (a, b)$, 使 $f(c) = 0$.

40. 举出一个函数的例子, 使它在 $x=0, x=\pm 1, x=\pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, x=\pm n, \pm \frac{1}{n} \dots$ 处有无穷间断点, 在所有其他实数值 x 处都连续.

41. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(x^2) = f(x)$ ($x > 0$) 求证 $f(x)$ 为常数函数.

42. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!)$

43. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{(2 + \sqrt{3})^n\}$, 其中 $\{x\} = x - [x]$

44. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

45. 设 $f(x), g(x)$, 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, 证明至少存在 $c \in [a, b]$, 使 $f(c) = g(c)$.

46. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

47. 是否存在这样的函数 $f(x)$, 它在 $[0, 1]$ 上每点处的值处处有限, 但在这个闭区间上点点的任何邻域内无界.

48. 求证方程 $x^3 + px + q = 0$ ($p > 0$) 有且只有一个根.

49. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 试证对于一切 x 满足 $f(2x) = f(0) \cdot e^x$ 的充要条件为 $f(x) = f(0) \cdot e^x$.

50. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) \geq 0, f(0) = f(1)$, 证明存在 $x \in [0, 1]$, 使 $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

51. 求函数 $y = x^2 \cos 2x$ 在 $x = 0$ 的 10 阶导数.

52. 设
$$f(x) = \begin{cases} x^k \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0; \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

问 k 何值时, 在 $x = 0$ 处可导, 且导函数连续.

53. 设
$$f(x) = \begin{cases} x^k \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0; \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处多次可微, 多少次连续可微 (其中 k 为固定常数).

54. 求 $(x^{n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$

55. (1) 设 $f(x) \equiv 25$, 求 $f[f'(x)]$.

(2) 设, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f'[f(x)]$.

56. 设 $y = f(x) = \int_1^x \sin(\sin t) dt$, 求 $\frac{df^{-1}}{dy} \Big|_{y=0}$. 其中 f^{-1} 是 f 的反函数.

57. 设 $z = f(x, y)$, $x = g(y, z)$, 求 $\frac{dz}{dy}$.

58. 设 $f(x, y, z) = \sin[x \sin(y \sin z)]$, 求 $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$.

59. 设 $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \\ z = u \cdot v \end{cases}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

60. 设 $F(x, x+y+z, xz+yz)$, 并且 F 对其中变量有二阶连续偏导数, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 并整理结果 (求得 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 后, 可以用它来表示 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$).

61. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续可微, 对 (a, b) 上任何两点 x 和 y , 存在唯一点 z , 使

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$$

证明: $f(x)$ 或是严格凸函数, 或是严格凹函数

62. 若实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n+1}a_n = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

63. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在一点 $c \in (a, b)$, 有 $f'(c) + f(c)g'(c) = 0$.

64. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x),$$

则至少存在一个 c , 使 $f'(c) = 0$

65. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$,

证明存在 $c > 0$, 使 $f'(c) = \frac{1-c^2}{(1+c^2)^2}$.

66. 若 $a^2 - 3b < 0$, 则实系数方程

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

只有唯一实根

67. 设 $0 \leq b \leq a$, 证明不等式

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$$

68. 证明对 $[a, b]$ 上连续可微的函数 $f(x)$, 如果 $f(a) = f(b) = 0$, 则

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

69. 设函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且 $0 < x_1 < x_2$, 证明

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \right| = f(c) - cf'(c), \quad c \in (x_1, x_2).$$

70. 试证 $\sin 1 = \cos \ln c$, 其中 $1 < c < e$.

71. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上三阶可微, 且 $f''(x)$ 及 $f(x)$ 有界, 则 $f'(x)f''(x)$ 也有界.

72. 设 $f(x)$ 两次可微, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{[0,1]} f(x) = -1$,

证明 $\max_{[0,1]} f''(x) \geq 8$.

73. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1)$, 且 $|f''(x)| \leq 2$,

证 $|f'(x)| < 1$.

74. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $x \in [0, 2]$ 时, $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$,

证 $|f'(x)| \leq 2 \quad x \in [0, 2]$.

75. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $c \in (a, b)$, 使

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

76. 设 $f(x)$ 二阶可导, 证下面两个命题:

1) $f''(x) > 0$

2) 曲线 $y = f(x)$ 是上凹的, 且对任给 x_1, x_2 有

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

是等价的.

77. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\max_{[0,1]} f(x) = \frac{1}{4}$, $|f''(x)| \leq 1$,

试证 $|f(0)| + |f(1)| \leq 1$

78. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上三阶连续可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0, \quad \text{证明}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

79. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上其有连续三阶导数, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(\frac{1}{2}) = 0$, 证明在 $(0, 1)$ 内至少存在 c , 使 $|f'''(c)| \geq 24$.

80. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷次可微, 且

1. 存在 $L > 0$, $|f^{(n)}(x)| \leq L$ (对 $x \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$),

2. $f(\frac{1}{n}) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

证明 $f(x) \equiv 0$.

81. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 经过点 $x_0 \in (a, b)$ 时, 导数 $f'(x)$ 变号, 且 $f'(x_0) = 0$, 证明存在点 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$.

82. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f'(0) \cdot f'(1) < 0$, 证明在 $(0, 1)$ 上可找到 c , 使 $f'(c) = 0$.

原书缺页

原书缺页

114. 提出下面一连串推理中的错误

由分部积分法 ($U = \frac{1}{\sin x}$, $dV = \cos x dx$) 得出

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 2 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \dots$$

$$= n + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

因此有结论, $0 = 1 = 2 = \dots = n$.

115. 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, 求 $f(x)$.

求下列定积分:

116. $\int_0^1 \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} dx$ $d(\quad)$

117. $\int_{-2}^{-3} \min(|x|, x^2) dx$

118. $\int_0^a \ln(1 + \tan x) dx$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0}$

119. $\int_0^1 x \arcsin 2\sqrt{x(x-1)} dx$

120. $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

121. $\int_0^1 x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

122. $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$

123. $\int_0^a x^2 \cdot \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx, a > 0$

124. $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$

125. 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\sqrt{3}}}{(\sin x)^{\sqrt{3}} + (\cos x)^{\sqrt{3}}} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos x)^{\sqrt{3}}}{(\cos x)^{\sqrt{3}} + (\sin x)^{\sqrt{3}}} dx$

$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$

$\ln 3 \frac{e^t-1}{e^t+1}$

$\frac{1+x}{1-x} = e^t$

$\int_0^{\ln 3} \frac{e^t-1}{e^t+1} \cdot t d(\frac{e^t-1}{e^t+1}) = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 3} t d(\frac{e^t-1}{e^t+1})^2$

$\int_0^{\ln 3} \frac{e^t-1}{e^t+1} \cdot t d(\frac{e^t-1}{e^t+1}) = \frac{1}{2} \left[\ln 3 \cdot \frac{1}{4} - \int_0^{\ln 3} \left(\frac{e^t-1}{e^t+1} \right)^2 dt \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ln^3}{4} - \int_0^{\ln 3} 1 - 4 \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{\ln^3}{4} - \ln 3 + 4 \frac{1}{e^t+1} \right]_{\ln 3}^0$

$= \frac{1}{2} \left[-\frac{3\ln^3}{4} - 1 + 2 \right]$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3$

126. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1994x}{\sin x} dx$

127. 证 $\int_0^{\sqrt{2}\pi} \sin x^2 dx > 0$

128. 求 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi - 2x)} dx$

129. $\int_{-\pi}^{5\pi} (\cos x \cos 2x \cos 4x + \sin x \sin 2x \sin 4x) dx$

130. 证不等式

$\ln \sqrt{2n+1} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$

131. 设 $F(x) = \sin \left[\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin^3 t dt \right) dy \right]$, 求 $F'(x)$

132. 求在 $[0, +\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$, 如已知作自变量代换 $u = \int_0^x f(t) dt$ 后, 这函数成为 e^{-u}

133. 证明函数 $y = f(x) = e^{x^2} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增.

134. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 证明

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt, & a < x \leq b, \\ f(a), & x = a, \end{cases}$$
 在 $[a, b]$ 上连续且单调递增.

135. 对 $x \geq 0$, 证 $f(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt$ (n 为自然数) 的最大值不超过

$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

136. 确定常数 a, b 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ax - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{b+3t} dt = 2$

137. 证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 0$.

138. 证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$

$$= \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n=2m \text{ 时} \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1 \text{ 时} \end{cases}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \frac{\pi}{2}$

139. 计算 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin^{2n} \theta d\theta$.

2) $\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx$

140. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内不变号, $m \leq f(x) \leq M(x)$, 则存在 $l: m \leq l \leq M$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = l \int_a^b g(x)dx$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $c \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

141. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且任给 $t \in [0, 1]$ 及任给 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 有 $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ $f'' > 0$ 凸函数

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

根据不等式证明

142. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 任给 $x \in [0, 1]$, 且 $0 < m \leq f(x) \leq M$

证明

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \right) \left(\int_0^1 f(t)dt \right) < \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

143. 已知 $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x dx > 0, n \geq 1$

证

$$(1) f(n+1) < f(n)$$

$$(2) f(n) + f(n-2) = \frac{1}{n-1}, n > 2$$

$$(3) \frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}, n > 2$$

144. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(1) - f(0) = 1$.

证

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$$

145. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0, \quad \int_0^1 x f(x) dx = 1$$

求证存在一点 $x \in [0, 1]$, 使 $|f(x)| > 4$.

146. 设 $f(x)$, $g(x)$ 和它们的平方在 $[a, b]$ 上可积

证明

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

147. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $0 < f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$

证

$$\left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 \geq \int_0^1 [f(t)]^3 dt$$

148. 设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) = f(b) = 0$,

证

$$\int_a^b |f''(x)| dx \geq \frac{4}{b-a} \max_{[a,b]} |f(x)|$$

149. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上定义, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 又满足方程

$$f(x) = \sqrt{\int_0^x f(t) dt}$$

试求出 $f(x)$

150. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上单调递增, 又设

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0, \quad F(0) = f(0+0)$$

求证 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增且 $F(x)$ 右连续

151. 讨论 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ ($n \geq 0$) 的敛散性