大学物理学教程

University Physics

鲍世宁 黄敏 应和平 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

大学物理学教程

University Physics

鲍世宁 黄敏 应和平 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学教程 / 鲍世宁，黄敏，应和平编著．—杭州：浙江大学出版社，2014.1

ISBN 978-7-308-12769-1

Ⅰ．①大… Ⅱ．①鲍… ②黄… ③应… Ⅲ．①物理学—高等学校—教材 Ⅳ．①04

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第002405号

大学物理学教程
鲍世宁　黄敏　应和平 编著

责任编辑　徐素君（sujunxu@zju.edu.cn）
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路148号　邮政编码　310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
封面设计　杭州林智广告有限公司
排　　版　杭州林智广告有限公司
印　　刷　浙江印刷集团有限公司
开　　本　889mm×1194mm　1/16
印　　张　16
字　　数　400千
版 印 次　2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-12769-1
定　　价　68.00 元

前 言

PREFACE

物理学研究的是物质的基本结构以及物质运动的普遍规律，它是一门严格的、精密的基础学科。物理学基础的厚薄直接影响到大学本科生以后的工作适应能力和发展。随着科学技术的发展，学科的方向日趋综合，新型的交叉学科不断出现并迅速发展。近代物理学的概念、研究方法和实验技术，在各研究领域得到了广泛的应用。物理学、尤其是近代物理学已经深入到多个微观领域，已经成为各类人才所必须具备的基础知识。

《大学物理学教程》是为非物理类的理、工、医、农大学本科生所编写，涵盖了这些学校本科生应该掌握的物理学各个部分知识。本教程从现代科学技术的发展以及各学科人才培养的需求出发，对物理学课程的框架做了相应的调整。在内容上，不论是否为原普通物理学、经典物理学的内容还是近代物理学的内容，只要是当今大学生应该掌握的物理学基础内容，都经过精心选择、重新组织和整理后，编在本教程中。

《大学物理学教程》包括了力学、热学、电磁学、光学和近代物理学五个部分，共计二十五章。鲍世宁编写热学篇、光学篇和近代物理学篇，黄敏编写力学篇和电磁学篇；鲍世宁负责全书的插图制作和修改，黄敏负责全书的思考题、习题内容，应和平对全书做检查和修改工作。本教程在大学物理学基本要求的基础上，结合科学技术的发展，全面系统并简明扼要地反映了物理学的主要进展。研读本书的读者不仅可以学到比较完整系统的物理知识，还将在科学的思维方法与研究方法方面得到训练与启迪。

关于本书，欢迎读者给予批评指正。

作者

2013.12

目录

第1篇 力　学

第2篇 热　学

第3篇 电磁学

第1篇

力学

Dynamics

在物质多种多样的运动形式中，最简单、最基本的运动形式是物体之间或物体各部分之间相对位置随时间的改变，称为**机械运动**。例如，天体的运动、机器的运转、河水的流动、车辆的行驶等，都是机械运动。研究物体机械运动及其规律的学科称为**力学**。力学的发展已有几百年的历史，目前已形成了许多独立的分支。本篇我们主要介绍17世纪以来以牛顿定律和守恒定律为基础的**经典力学，**亦称**牛顿力学**。它适用于物体速度远小于光速的情况。当物体速度接近光速时，牛顿力学不再适用，而必须用相对论力学(见本教材第5篇，第1.2章)；在亚原子领域，则需用量子力学(见本教材第5篇，第4章)或量子场理论。从运动形态来看，可以把力学分为静力学、运动学和动力学三部分，静力学在一些工程类力学书中有详尽的介绍，本教材不做讨论。我们仅对牛顿力学中的运动学和动力学问题，采用微积分和矢量代数这两个数学工具重新进行解析。

第1章　质点运动学

§1-1 质点运动的描述

质点　参考系

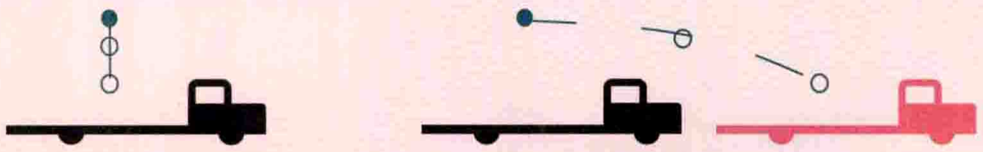
研究具体的物理问题时，常常需要抓住事物的主要因素，忽略次要因素，把复杂的研究对象简化成理想化模型，这是我们物理学中一种重要的研究方法。质点，就是力学中第一个重要的理想模型。

实际物体均有形状及大小，但在有些问题中，物体的形状及大小对问题的讨论影响不大，可以忽略，这时便可将物体视为一个只有质量而无形状、大小的几何点（又称为物理点），叫做**质点**。在如下情况下我们就可以把运动物体当做质点来处理。

（1）物体做平动时，物体内各点具有相同的速度和加速度，我们可以把它当做一个质点来研究其运动。通常把物体的质心当做此质点的位置，想象物体全部的质量都集中在这一点上。

（2）物体的线度比它运动的空间范围小很多，这时也可把物体看做质点。例如，当研究地球绕太阳的公转时，由于地球半径 $\left(6.37\times10^{6}\ \mathrm{m}\right)$ 比地球到太阳的距离 $\left(1.50\times10^{11}\ \mathrm{m}\right)$ 小得多，这时便可将地球视为质点；但若研究地球自转，显然就不能将地球视为质点了。

如图1.1.1所示，一个物体在相对地面匀速直线前进的车厢中自由落下，车厢中的观察者看到物体在做直线运动；但是，地面上的观察者却看到物体在做抛体运动。大量此类观察表明，我们在描述一物体的运动时，必须选择另一物体或一组彼此相对静止的物体做参考。选做参考的物体，称为**参考系**或**参照系**。



（a）以汽车为参照系　　　　（b）以地面为参照系

图1.1.1　运动描述的相对性

选取不同的参考系，对同一物体运动的描述将是不同的。宇宙中所有的物体都处于永不停息的运动中，称为**运动的绝对性**。但是，对于同一物体运动的描述，在不同参照系中会得到不同的结果，这被称为**运动描述的相对性**。**一切物体的运动，既是绝对的，也是相对的。**“绝对”是指运动本身，“相对”是指对运动的描述。

坐标系是参照系的数学表述，亦即选定了原点、轴线及刻度后被数学化了的参照系。最常用的坐标系有：笛卡儿直角坐标系、自然坐标系（见§1-3）、极坐标系和球面坐标系等。

运动学中，参照系和坐标系的选择是任意的，视问题的性质和研究的方便，一般选地面为参照系。

位置矢量　运动方程

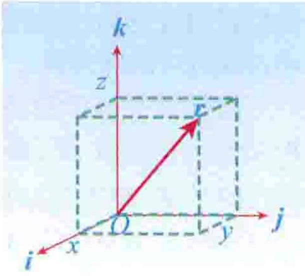


图 1.1.2　位置矢量

物体的运动大体上可分为:平动、转动和振动三种类型。相对而言,对物体平动的描述最为简单,所以我们从描述物体的平动开始,将对物体转动和振动的描述留在第5章和第6章再讨论。

为了描述一运动质点的位置,我们选定一直角坐标系,$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示 x , y , z 三个方向的单位矢量,如图 1.1.2 所示。坐标原点 O 指向质点的矢量 $\boldsymbol{r}$,称为**位置矢量**,简称**位矢**或**矢径**。坐标 x , y , z 就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴的投影,因而有

$$\boldsymbol{r}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

位置矢量的大小即 $\boldsymbol{r}$ 的模,为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.1.2}$$

位置矢量的方位可用方向余弦来确定,即

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r} \tag{1.1.3}$$

式中的 α , β , γ 分别是位矢 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴之间的夹角,且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 。

位置矢量随时间变化的函数关系称为**运动方程**,即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,其分量式可写成

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

运动质点在空间经过的路径称为**轨道(或轨迹)**。从运动方程分量表达式(1.1.4)中消去时间参数 t ,可得到 (x,y,x) 之间的函数关系,即 $f(x,y,z)=0$,称为**轨道方程**或**轨迹方程**。

位移矢量

位移的概念是为了描述质点空间位置的变化而引入的。如图 1.1.3 所示,设 t 时刻质点位于 P_1 点,其位置矢量为 $\boldsymbol{r}_1(t)$,经过时间 Δt 后,即 $t+\Delta t$ 时刻,质点沿图中曲线运动到 P_2 点,相应的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_2(t+\Delta t)$ 。那么,在 Δt 时间内质点空间位置的变化可用矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示,称为质点的**位移矢量**,简称**位移**。在图中是由起始点 P_1 指向终止点 P_2 的一段有向线段。

由矢量的减法运算法则,有

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{1.1.5}$$

若 P_1 , P_2 两点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{r}_1=x_1\,\boldsymbol{i}+y_1\,\boldsymbol{j}+z_1\,\boldsymbol{k}\,,\qquad \boldsymbol{r}_2(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}_2=x_2\,\boldsymbol{i}+y_2\,\boldsymbol{j}+z_2\,\boldsymbol{k}$$

则位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}=\Delta x\,\boldsymbol{i}+\Delta y\,\boldsymbol{j}+\Delta z\,\boldsymbol{k} \tag{1.1.6}$$

在国际单位制中,位置和位移的单位都为米 (m) 。

位移不同于位置矢量。在质点运动过程中,位置矢量表示某个时刻质点的位置,它描述了该**时刻**质点相对于坐标原点的位置状态,是描述**状态**的物理量。位移则表示**某段时间**内质

点位置的变化，它描述该段时间内质点状态的变化，是与运动**过程**对应的物理量。

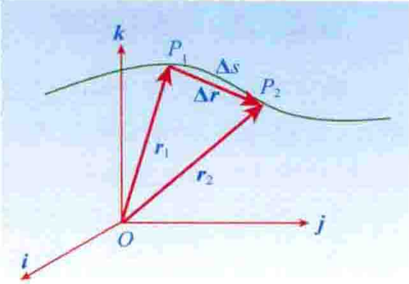


图 1.1.3 位移矢量

位移也不同于质点所经历的**路程**。质点从 P_1 运动到 P_2 所经历的路程 Δs，是图 1.1.3 中轨道上从 P_1 到 P_2 的一段曲线的长度，路程是标量，恒为正。在一般情况下，路程 Δs 与位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$（图 1.1.3 中 P_1 和 P_2 之间的弦长）并不相等。只有当质点做单方向的直线运动时，路程与位移的大小才是相等的。此外，在时间间隔 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下，P_2 无限靠近 P_1，弦 P_1P_2 与曲线 P_1P_2 的长度很难区分，这时，路程 $\mathrm{d}s$ 与位移的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 相等，即 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。

速度矢量

速度的概念是为了描述质点位置变化的快慢程度而引入的。

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.1.7}$$

实际上，平均速度只是质点运动快慢程度的一种粗略描述方法。参看图 1.1.4，观察时间 Δt 越短，平均速度越能逼真地反映质点在 t 时刻的运动快慢程度。当 $\Delta t \to 0$ 时，比值 $\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$ 将无限接近于一确定的极限值，这一极限值就是质点在 t 时刻运动快慢的确切描述；定义为质点在 t 时刻的**瞬时速度**，简称**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示。即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.8}$$

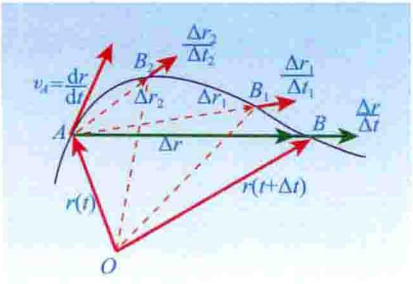


图 1.1.4 速度矢量

速度 $\boldsymbol{v}$ 等于位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的一阶导数。速度是矢量，其方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向相同，为运动轨迹上相应点的切线方向，并指向运动的前方。速度的单位为米每秒 (m/s)。

另外，我们定义质点所走路程对时间的导数为质点的**瞬时速率**（简称**速率**），即

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.9}$$

因为 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以 $|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$，即质点速度矢量的大小等于速率。今后，我们对速率和速度的大小这两个概念不再区分。

在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.10}$$

加速度矢量

当质点做曲线运动时，一般来讲，速度的大小和方向总是在不断地变化，为了定量描述各时刻速度变化的快慢程度，我们引入加速度的概念。

设质点沿曲线轨道运动，t 时刻到达 P 点，速度为 $\boldsymbol{v}(t)$，$t+\Delta t$ 时刻到达 Q 点，速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$。如图 1.1.5 所示，在 Δt 时间内速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$，与平均速度的定义相似，定义 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 为 Δt 时间内的平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}$，即

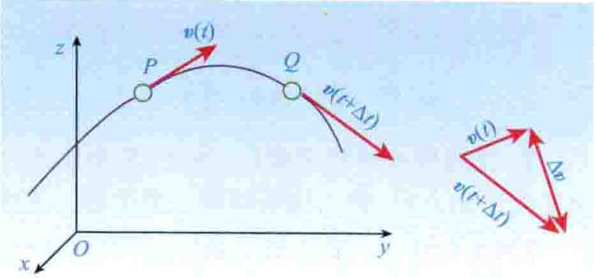


图 1.1.5 加速度矢量

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.1.11}$$

平均加速度只反映了 Δt 时间内速度的平均变化率。

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限值叫做**瞬时加速度**，简称**加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.12}$$

可见，加速度 $\boldsymbol{a}$ 是速度矢量对时间的一阶导数，或等于位置矢量对时间的二阶导数。加速度也是矢量，其方向与速度增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 的方向相同，国际单位为米每平方秒 $(\mathrm{m/s^2})$。

在直角坐标系中，加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1.1.13}$$

加速度是一个很重要但又较难掌握的概念，在牛顿力学的发展过程中发挥了重要的作用，为此有必要做进一步的说明。

(1)加速度反映的是速度的变化。因此，它只与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 有关，而与速度 $\boldsymbol{v}$ 本身并无关系。也就是说，无论速度多大，只要它不发生变化，加速度总等于零；反之，无论速度多么小(甚至为零)，只要它发生变化，就一定有加速度，并且加速度还可能很大！

(2)速度是矢量，包含大小和方向两个因素，只要任一因素发生变化，都表明速度发生了变化，都会有加速度产生。

至此，我们已引入了四个物理量——**位置**、**位移**、**速度**和**加速度**来描述质点的运动，并且我们可以看到这四个物理量都具有：**矢量性**、**瞬时性**、**相对性**和**独立性**。

§1-2 质点运动学的两类基本问题

一般可以把质点运动学所研究的问题分为两类：

1. 已知质点的运动方程(即位矢)，求质点在任意时刻的速度和加速度，称为**运动学第一类问题**。求解这一类问题的基本方法是求导。

【例 1.1.1】 已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+\left(2-t^2\right)\boldsymbol{j}$ (SI)，求：(1)质点在 $t=1$ s 时的位置矢量及 0~1 s 内的位移；(2)质点运动的轨道方程；(3)第 1 秒末质点的速度及加速度。

解 (1) $\boldsymbol{r}_{(t=1\,\mathrm{s})}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$，$\boldsymbol{r}_{(t=0\,\mathrm{s})}=2\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$，0~1 s 内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{(1)}-\boldsymbol{r}_{(0)}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$

(2)由运动方程知 $\begin{cases}x=2t\\ y=2-t^2\end{cases}$，消去 t 得 $y=2-\dfrac{x^2}{4}$，为该质点运动的轨道方程

（3）$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$，则 $t=1\,\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{v}\big|_{t=1\mathrm{s}}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s})$

$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}$，则 $t=1\,\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{a}\big|_{t=1\mathrm{s}}=-2\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s^2})$

2. 已知质点的加速度（或速度）及初始条件（$t=0$ 时的速度或位矢），求质点在任意时刻的速度或运动方程，称为**运动学第二类问题**。求解这一类问题的基本方法是积分。

【例 1.1.2】 一质点沿 x 轴运动，其加速度随时间的变化关系为 $a=3+2t$ (SI)，如果初始时质点的速度 $v_0=5\,\mathrm{m/s}$，求 $t=3\,\mathrm{s}$ 时，质点速度的大小。

解 由加速度的定义，有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3+2t$$

分离变量求积分，得

$$\int_5^v \mathrm{d}v=\int_{t=0}^{t=3}(3+2t)\mathrm{d}t=\left(3t+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=3}=18$$

所以

$$v-5=18\text{，即 } v=23\,\mathrm{m/s}$$

【例 1.1.3】 一质点沿 x 轴作直线运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为：$a=4+3x^2$ (SI)。若质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解 由已知条件及加速度的定义，得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v=4+3x^2$$

分离变量得

$$v\mathrm{d}v=\left(4+3x^2\right)\mathrm{d}x$$

两边取定积分

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x\left(4+3x^2\right)\mathrm{d}x \rightarrow \frac{1}{2}v^2=4x+x^3$$

由此得质点在任意位置处的速度

$$v=\sqrt{8x+2x^3}$$

§1–3 圆周运动

在描述质点的圆周运动及更一般的曲线运动时，加速度分别用切向加速度和法向加速度表示，不仅简单，而且物理意义明确。

下面先给出自然坐标系的概念，然后以圆周运动为例，给出适用于一般曲线运动的切向加速度和法向加速度的表达式。

我们把沿着质点的运动轨道所建立的坐标系称为**自然坐标系**。同时规定两个正交的随质点位置变化而改变方向的单位矢量，一个是指向质点运动方向的切向单位矢量，用 $\boldsymbol{e}_t$ 表示，另一个是垂直于切向并指向轨道凹侧的法向单位矢量，用 $\boldsymbol{e}_n$ 表示。

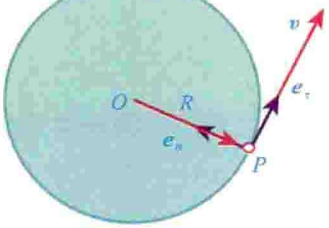


图 1.1.6 自然坐标系

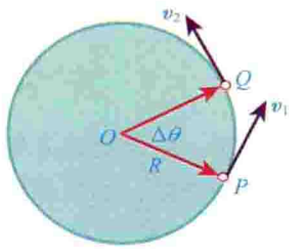


图 1.1.7 自然坐标系中的速度

如图 1.1.6 所示，一质点沿半径为 R 的圆周运动，某一时刻质点的速度为 $\boldsymbol{v}$，可表示为

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t \tag{1.1.14}$$

一般来讲，做圆周运动时质点速度的大小和方向均可发生变化，于是有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

从上式看出，加速度 $\boldsymbol{a}$ 可用两个矢量来表示。

第一项 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$ 是由于速度大小变化引起的，其方向为 $\boldsymbol{e}_t$ 的方向，指向切线方向，故称为**切向加速度**，用 $\boldsymbol{a}_t$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t\ ,\qquad a_t=|\boldsymbol{a}_t|=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.15}$$

第二项中 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$ 是切向单位矢量对时间的变化率，由图 1.1.7 可以看出，当 $\Delta t\to 0$ 时，矢径 $\boldsymbol{R}$ 转过的角度 $\Delta\theta\to 0$，这时 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_t$ 垂直并指向圆心，故与 $\boldsymbol{e}_n$ 方向一致。由矢量关系得：$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t|=|\boldsymbol{e}_t|\mathrm{d}\theta$，因 $\boldsymbol{e}_t$ 是单位矢量，有 $|\boldsymbol{e}_t|=1$，则 $|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t|=\mathrm{d}\theta$，于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t=\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_n$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_n=\frac{R\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_n=\frac{v}{R}\,\boldsymbol{e}_n$$

至此第二项可表示为：$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n$，由于这个加速度的方向指向圆心，故称为**法向加速度**，用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示。

$$\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n\ ,\qquad a_n=|\boldsymbol{a}_n|=\frac{v^2}{R} \tag{1.1.16}$$

法向加速度是由于速度方向的变化引起的。

质点做一般圆周运动的加速度表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n \tag{1.1.17}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_t^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \tag{1.1.18}$$

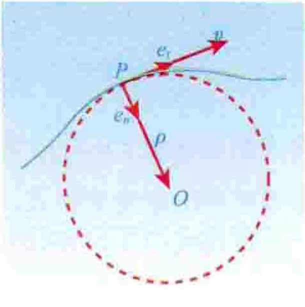


图 1.1.8 任意的曲线运动

加速度的自然坐标表示法具有鲜明的物理意义：**切向加速度**反映了**速度大小**的变化，而**法向加速度**反映了**速度方向**的变化。

尽管切向加速度和法向加速度是从变速圆周运动中得出的，但可以证明，对于任意的曲线运动都可以理解为曲率半径变化的圆周运动（如图 1.1.8），式（1.1.15）、（1.1.16）仍然适用，只要用曲线的曲

率半径 ρ 来代替圆周半径 R 即可，即

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t,\qquad \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1.1.19}$$

【例 1.1.4】 已知一质点运动方程为 $x=4t$，$y=6t^2$。求：(1)质点的速度及加速度；(2)质点的切向加速度、法向加速度；(3)轨道的曲率半径。

解 (1) $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+12t\boldsymbol{j}$，　　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=12\boldsymbol{j}$

(2)任一时刻速率　$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^{\,2}+v_y^{\,2}}=\sqrt{4^2+(12t)^2}=4\sqrt{1+9t^2}$

切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4\sqrt{1+9t^2}\right)=\dfrac{36t}{\sqrt{1+9t^2}}$

法向加速度 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^{\,2}}=\sqrt{12^2-\dfrac{1296t^2}{1+9t^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{1+9t^2}}$

(3)轨道的曲率半径 $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{16\left(1+9t^2\right)}{12/\sqrt{1+9t^2}}=\dfrac{4}{3}\left(1+9t^2\right)^{\frac{3}{2}}$

§1–4 相对运动

在§1–1 节中曾指出，运动是绝对的，而运动的描述是相对的。选择不同的物体做为参照系来描述同一物体的运动，所观测到的运动状态是不相同的。

下面我们来讨论同一质点相对于两个不同参照系的位矢、运动速度及加速度之间的关系。

如图 1.1.9 所示，参考系 S' 相对于参考系 S 以速度 $\boldsymbol{u}$ 平动。固定在这两参考系中的坐标系分别为 $O\text{-}xyz$ 和 $O'\text{-}x'y'z'$。

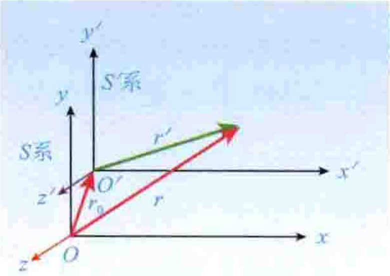


图 1.1.9　相对运动

设一质点在空间运动，当它位于 P 点时，相对 O 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，相对 O' 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}'$，两者间的关系为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{1.1.20}$$

将式(1.1.20)两边分别对时间 t 求一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t},\ \text{即}\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}' \tag{1.1.21}$$

式中，$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 为质点在 S 系中的速度，习惯上称为**绝对速度**；$\boldsymbol{v}'=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$ 为质点在 S' 系中的速度，称为**相对速度**；$\boldsymbol{u}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}$ 为 S 系相对于 S' 系的速度，称为**牵连速度**。式(1.1.21)称为相对平动参考系中的速度变换式。它可表述为**绝对速度等于牵连速度和相对速度的矢量和**。

再将式(1.1.21)两边分别对 t 求导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t},\ \text{即}\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}' \tag{1.1.22}$$

式中，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 为质点在 S 系中的加速度，习惯上称为**绝对加速度**。$\boldsymbol{a}'=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$ 为质点在 S' 系中的加速度，称为**相对加速度**。$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 为 S 系相对于 S' 系的加速度，称为**牵连加速度**。式(1.1.22)称为相对平动参考系中的加速度变换式。它可表述为**绝对加速度等于牵连加速度和相对加速度的矢量和**。

若 S' 系相对于 S 系做匀速直线运动，$\boldsymbol{u}=$ 常量，则 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$，即在两个相对做匀速直线运动的参考系中，质点具有相同的加速度。

本章小结

1. 描述质点运动的四个物理量

   位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$

   位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t)=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}$

   速度矢量 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k}$

   加速度矢量 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\boldsymbol{k}$

   研究质点运动要特别注意各物理量的矢量性、瞬时性、相对性和独立性。

2. 质点运动学的两类基本问题

   第一类问题：已知运动学方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，通过求导得到速度和加速度；

   第二类问题：已知加速度（或速度）及初始条件（$t=0$ 时的速度或位矢），通过积分求得速度或运动方程（位矢）。

3. 质点作圆周运动时加速度

   分别用切向加速度和法向加速度表示，不仅简单，而且物理意义明确。

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_t^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

   对于一般的曲线运动，仍可以把加速度表征为切向加速度和法向加速度的矢量和，只不过在表示法向加速度时要用曲线的曲率半径 ρ 来代替圆周半径 R 即可。即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

4. 运动是绝对的，但对运动的描述具有相对性

   绝对速度等于牵连速度和相对速度的矢量和，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}'$。

   绝对加速度等于牵连加速度和相对加速度的矢量和，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'$。

思考题

1. 什么是理想化模型？它们在研究问题时有何实际意义？写出物理学中你所知道的理想化模型。
2. 为什么在研究物体运动时要引入参考系和坐标系？
3. 位移和路程有何区别？在什么情况下，位移大小与路程相等？
4. 速度与速率有何区别？物体能否具有恒定的速率而有变化的速度？如果物体具有恒定的速度，是否可能仍有变化的速率？
5. 质点的加速度越大，质点的速度也越大，这句话是否正确？
6. 汽车仪表盘的速度仪显示的速度是什么速度？试分析。
7. 一人站在地面上用枪瞄准挂在树上的木偶，当扣动扳机使子弹从枪口射出时，木偶恰好从树上由静止自由落下，试说明为什么子弹总能射中木偶？
8. 物体做曲线运动时，加速度通常可分为法向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 和切向加速度 $\boldsymbol{a}_n$，它们分别反映速度哪方面的变化？什么样的运动只有 $\boldsymbol{a}_t$ 而没有 $\boldsymbol{a}_n$？什么样的运动只有 $\boldsymbol{a}_n$ 而没有 $\boldsymbol{a}_t$？
9. 下列说法是否正确？(1)质点做圆周运动时的加速度指向圆心；(2)匀速圆周运动的加速度为常量；(3)只有法向加速度的运动一定是圆周运动；(4)只有切向加速度的运动一定是直线运动。
10. 曲线运动中，速度方向沿轨道切线方向，故加速度方向也沿轨道切线方向，对吗？

习 题

1. 一质点作直线运动，其运动方程为 $x=1+4t-t^2$，其中 x 以 m 计，t 以 s 计。求：(1)第3秒末质点的位置；(2)前3秒内的位移大小；(3)前3秒内经过的路程(注意质点在何时速度方向发生变化)；(4)通过以上计算，试比较位置、位移、路程三个概念的差别。
2. 一质点沿 x 轴作直线运动，位置与时间的函数关系式为 $x=At^2+B$，其中 $A=2.10\,\mathrm{m/s^2}$，$B=2.80\,\mathrm{m}$。求：(1)从 $t=3\,\mathrm{s}$ 到 $t=5\,\mathrm{s}$ 的位移；(2)从 $t=3\,\mathrm{s}$ 到 $t=5\,\mathrm{s}$ 的平均速度；(3) $t=5\,\mathrm{s}$ 时的速度和加速度。
3. 已知一质点运动方程为：$\boldsymbol{r}=2t\,\boldsymbol{i}+\left(2-t^2\right)\boldsymbol{j}$ (SI)。求：(1)该质点轨迹方程；(2)质点从 $t=1\,\mathrm{s}$ 到 $t=2\,\mathrm{s}$ 的位移矢量；(3)质点分别在 $t=1\,\mathrm{s}$ 和 $t=2\,\mathrm{s}$ 时的速度和加速度矢量。
4. 一质点在 $x-y$ 平面上运动，运动方程为：$\begin{cases}x=2t\\y=19-2t^2\end{cases}$，式中 x，y 的单位是 m，t 的单位是 s。试求：(1) $t=2\,\mathrm{s}$ 时的位置矢量；(2) $t=1\,\mathrm{s}$ 至 $t=2\,\mathrm{s}$ 之内的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 及平均速度；(3) $t=2\,\mathrm{s}$ 时的速度与加速度。
5. 已知一质点的运动学方程为：$\boldsymbol{r}=t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}$(SI)。求：(1) $t=10\,\mathrm{s}$ 时的位置矢量及 0~10 s 内的位移矢量；(2)质点运动的轨迹方程；(3)第5秒末质点的速度和加速度。
6. 一质点沿 x 轴方向作一维直线运动，其加速度随时间的变化关系为：$a=3+2t$ (SI)，如果 $t=0$ 时质点的速度 $v_0=5\,\mathrm{m/s}$，求 $t=3\,\mathrm{s}$ 时，质点的速度。