教育部審定

近世平面幾何學

郭鳳藻
武崇經 編譯

上海商務印書館出版

丙(326)

Modern Plane Geometry
Approved by the Board of Education
Commercial Press, Limited

中華民國八年一月初版
中華民國八年九月再版

(近世平面幾何學一冊)
(每冊定價大洋陸角)
(外埠酌加運費匯費)

編譯者　郭鳳藻　武崇經
校訂者　壽孝天
發行者　商務印書館
印刷所　上海北河南路北首寶山路　商務印書館
總發行所　上海棋盤街中市　商務印書館
分售處　北京　天津　保定　奉天　吉林　龍江　濟南　太原　開封　洛陽　西安　南京　杭州　蘭谿　安慶　蕪湖　南昌　漢口　長沙　常德　成都　重慶　瀘縣　福州　廣州　潮州　香港　桂林　梧州　雲南　貴陽　張家口　新嘉坡　商務印書分館

八三三一自

重譯近世平面幾何學序

幾何一學。淵源甚古。二千五百年前。希臘人台勒斯(*Thales*)時。已卓然成科。爾後碩學輩出。斯學日漸發達。至紀元前第三世紀。誕生三傑。太古幾何學。遂達於極點。三傑者。首歐几里得。(*Euclid*)著幾何原本。將當時幾何學之知識。重爲整頓。加以嚴密之證明。更附以一己所發明者。遂成宏大之著作。迄今學者。仍讀其書不衰。歐氏沒而亞奇默得。(*Archimedes*)阿破羅尼。(*Apollonius*)繼踵以興。咸爲幾何學中之元勳。惟亞氏之事業。偏於度量的幾何學。阿氏則偏於圖形的。兩大分科之基礎。二氏實肇之。自玆以後。八百年間。此種學科。發達甚緩。至紀元後六百四十一年。阿剌伯人略取亞力山大城。縱兵焚掠。千餘年藏書之府。同歸一燼。幾何之學。斬焉中絕。可不爲之太息乎。禍亂相尋。否極而泰。學子漸興。迻譯希臘之遺書而研究之。此學始稍稍恢復。顧皆因仍舊法。鮮新理之發明。至距今三百年前。法人代加德(*Descartes*)出。創坐標之法。以代數應用於幾何。研究之法全變。幾何之學。嶄然一新。世所稱爲解析幾何學者是已。然一方解析幾何學進步時。一方又起一新分科。其導源之星宿海。遠在阿破羅尼。而使之屹然獨立者。厥爲狄薩孤(*Desargues*)及巴斯喀(*Pascal*)二人。其所創之法。今日稱爲近世幾何學。仍就幾何學之本

體而研究之。一切解析法。擯除不用。雖其說見斥於當時。然日後亦駸駸乎盛矣。至距今七十年前。又有一新分科起。將歐几里得書中。關於空間之根本思想。全行顚覆。斥其所論平行線之公理爲謬妄。是爲非歐氏幾何學。故綜前所論。今日幾何學之分科。厥有四焉。一太古人之幾何學。一解析幾何學。一近世幾何學。一非歐几里得幾何學。此四者雖各自爲謀。不相統壹。然往往一方進步。他方卽受其影響。溯自解析幾何學發明以來。純正幾何學。幾爲所壓抑。無甚大之價値。降至近世。非調和比及虛點虛線。依次發見。純正幾何學。遂爛然發大光明。較之解析幾何。毫無遜色。此亦數學界之鉅觀也。是編原本。爲英人李查多生及拉母所合著。日本菊池氏等。譯之成東籍。讀其書。簡明而賅括。誠治近世幾何學者入門之良本。癸丑六月。長晝如年。乃將菊池氏本。每日重譯數頁。作消夏之舉。凡兩閱月而告成功。夫數理奧深。未入其門。恆瞻顧徘徊。而未由盡喩。然旣稍窺崖略。覺興味之盎然。往往兀兀孜孜。有欲罷不能之勢。是固人情之所同乎。中國幾何之學。輸入甚早。歐氏著作。明代曾有譯本。今日固已大盛矣。解析幾何學之譯述。今亦數見不鮮矣。至非歐派及近世幾何學。則不獨無其書。抑且聞其名者絕寡。士生今日。不諳外國文。欲研究高深數學。以饜其拾級而登之希望者。

誠戛戛乎其難哉。夫數學爲各科之本。而近世幾何學。關於物理學者。尤至深且重。亦既譯有專本。庸敢自私。乃因友人之敦促。以重譯之本。公諸世人。異日此學大盛。譯著雲興。頫視此編。當不啻大輅之椎輪。未可知已。然在今日。對於幼稚之數學界。固不無絲毫之裨益也。是用忘其固陋。泚筆以序之。

民國二年九月　　重譯者識

凡例

一幾何雖分四科。然皆互相倚賴。非能絕對的獨立者。故欲學習本書。必於初等幾何學及幾何圓錐曲線。研究有素。方能領解。(見菊池氏緒言及原序。)

一菊池氏原譯。於原書不當及漏略處。皆加註以是正而增補之。譯事精細極矣。今不避僭妄。率爾重譯。殊深愧恧。惟下筆之頃。必期信達。冀無負於著者譯者及讀本書之同學。故迻譯之際。良用兢兢。至偶有須特別說明者。則仿原譯之例。註諸每頁之底。加「重譯者註」四字。以示區別。

一本譯所用術語。悉照原譯。如第八編所論之「因渥留深」。乃譯原文之音。今姑仍之。蓋義譯不能得愜心貴當之名詞時。往往借音譯以濟其窮。中國譯書家。固有此例。佛經涅般般若等語。實開其先。又本書慣用共軛二字。乃相屬之義。按英文 *Conjugate*. 在拉丁文爲 *Conjugo*. *Con* 之意爲共。*jugo* 卽 *jugum*. 當英文之 *yoke*. 譯作軛。言互相連屬。若牛馬之共軛也。至原譯間有不合中國文法處。則皆酌改以求明瞭。

一本譯之成。閱時甚促。且見聞淺陋。深懼謬點滋多。貽誤讀者。如海內數學家。不吝金玉。俯賜斧削。無任懽迎。

緒　　言

本書大旨。已詳原序中。玆不復贅述。惟將迻譯之緣由。及學者應注意之點。一畧陳之。

近世幾何學。爲幾何學之一分科。其發達僅五六十年間事耳。所用之法。簡單而賅括。不惟與解析法不同。(卽異於代數學的)卽較之古代方法。如普通初等幾何學所用者。亦截然各異。應用廣而效力大。實有志數學者。所不可不研究也。(東洋學藝雜誌第百六十二號。余所著「幾何學之發達及分科」一文。曾詳述之。)余昔編纂初等幾何學教科書畢。復著幾何學講義。與之相伴。欲將近世幾何學。一爲論列。後因種種障礙。遲遲未出版。去年英國馬克迷蘭社。以本書原文見贈。余細爲瀏覽。見其書悉依英國幾何學教授法改良協會所議定近世幾何學條目之順序。余對之稍有異見。且書中待商酌之處。亦不能盡免。然以此種科學。我國尙無良本。而本書所依據之條目。乃英國多數富於教授經驗之教員。所公同議定。比較言之。固罕覯之本也。故余遂與理科大學數學選科生數藤斧三郎約。合譯之以公諸世。於原書印刷之誤謬。悉行訂正。而證明說明等之未發揮盡致。及譯者所懷異同之見。槪註諸每頁之底。(不記「原註」及「重譯者註」者。乃原譯者之註也。)我國之習數學而不能直接讀原書者。

得此其不無絲毫之裨助乎。原序曾言讀是書者。(第八編定理 7 以下。)應有幾何學的圓錐曲線論之知識。蓋圓錐曲線之書。英國通例。皆於初等幾何學畢業後習之。而圓錐曲線之性質。雖其淺近者。可依近世幾何學之方法而得。至稍高尙及其餘之大部分。非曾經研究者。不易明了。故如是云云也。本書第八編論複比及「因渥留深」。第九編論射影。余意亦不謂然。蓋必先論射影。然後據之以論複比及「因渥留深」。方爲正當。余以此等之事。乃近世幾何學最重要之部分也。乃爲附錄於後。畧示其綱領。於圓錐曲線論。概不依據。蓋圓錐曲線。爲圓之射影。僅據此已足。其性質固不必述也。就中相反對極。因必關於圓錐曲線之性質。則悉行删去焉。夫據射影法以研究圓錐曲線。爲最有益且富於興味之事。異日有暇。再詳爲論述可耳。

本書所用術語。有用譯音者。有現在尙未底定。不得已乃擇善而從者。未當之處。知所不免。此以付諸識者之論定可已。

明治廿八年八月　　菊池大麓識

原　序

末書爲近世幾何學入門之用。欲讀克來莫拿等之高等數學書者。不可不以本書爲準備。故當著者孜孜兀兀。從事編纂之時。所挾之目的。蓋有二焉。其一歐几里得派及非歐氏派幾何學教授法改良協會所發行之初等平面幾何學教科書。此爲其續編。其二欲自歐氏派之幾何學。進而入於圓錐曲線論及虛點論等之高等圖形的幾何學者。此爲其階梯。最初之七編。論三角形,四角形,圓,調和比(第三編)及幾何學的極大極小(第七編)等。專爲達第一之目的。就中第二編論三角形頗詳盡。其與點及圓關係之處。發揮殆無餘蘊。學者得此。庶於近今所研究者。可窺見其一斑乎。至圓錐曲線。(除圓以外。)自第八編定理7以後。始行提出。則非有初等幾何學的圓錐曲線論之知識者。殆不能領悟也。

射影之理論。在圖形的平面幾何學上。甚爲重要。歸諸立體幾何學者極少。故協會以之入於近世平面幾何學之條目中。本書之順序。全以條目爲根據。於此等處亦不能有二致也。

本書於條目全行採用。此外有重要之理。爲條目所遺漏者。則列諸號外。以示區別。至例及問題。亦爲之增補。附於各編之末。

著者之以條目爲本書編纂之基礎。蓋得協會中評議會之許可者。故對於該會及起草之委員。感激良深。蓋本書之有價值。不外該委員等之所賜也。著者又得岡布理智大學教務長戴勞博士之許可。於其所發明本書第四編定理3之證法。准其採用。而於博士所著「古今圓錐曲線幾何學」。尤受無量之補助。亦不可不有一言以謝之。最後得康德君及諸學友之校正。誤謬之處。藉以稍免。則又他山之助。所當永矢勿諼者也。

千八百九十三年十二月　李查多生及拉母同識

近世平面幾何學目錄

近世平面幾何學

第一編

緒論

幾何學分二類。一度量的。(*metrical*) 一圖形的。(*descriptive*) 前者論線之長短。角及面積之大小。後者論線之位置。方向及交點。點之軌跡。及曲線之性質。✣ 例如「直角三角形。夾直角二邊上正方形之和。等於餘一邊上之正方形。」乃度量的定理也。「相切二圓。連其中心之直線。必過切點。」乃圖形的定理也。

歐几里得及太古人之幾何學。殆全爲度量的。近世幾何學。則概爲圖形的。此其大較也。

近世平面幾何學。※ 所以異於古代之幾何學(卽歐几里得之法)者。以二大原理爲其基礎。卽連續之原理。(*Principle of Continuity*)及雙對之原理(*Principle of Duality*)是也。連續之原理者。乃書中定理。無往不眞。可以普通應用。靡有特例。有時因形勢之變。驟觀之似不眞者。若加以適當之約束。以解釋其形勢。其定理依然存立。不至毀廢。而約束之最要者。厥惟用代數學上＋－二符號。以度線之方向。面積之位置。

✣此專就平面幾何學而言.

※不必爲平面.

與提起虛點虛線之概念是也。學者注意於此。可爲最有益之演習焉。至雙對之原理。暫不詳論。(見第肆編)今唯用簡單數語以明之。蓋各圖形的定理。必有他之定理。與之相伴。成爲雙對。前者一點。後者有一直線對之。前者一直線。後者有一點對之。

直線之性質

(1)在初等幾何學中。有限直線卽分線。(*segment*) 唯考其絕對之長。欲令此線加彼線。或從此線減彼線。必明言之始可。

近世平面幾何學。當度直線之長時。宜併考其線之方向。而用＋－二符號表之。

關於此符號基本之法則如次。

(i) A,B 爲一直線上二點。

$$AB=-BA,\quad BA=-AB。※$$

※原書 AB, BC 等.爲有方向之分線之長.卽有符號之一種幾何量也.然書中之證明.不充分且不穩當之點.數見不鮮.卽本書中 AB, BC 等.及其比 $AB:BC$ 等.皆依代數之定則是也.此本須一一證明始可.其事雖不困難.而書中不揭之.故不如斷然以此等分綫之長.皆表代數學的量.方爲簡單.

直線 AB 上自 A 向 B 度之長爲正量.則自 B 向 A 度之長爲負量.是爲必要.故 AB 爲自 A 向 B 度之代數學的値. BA 爲自 B 向 A 度之代數學的値.與 AB 爲同長.卽其絕對値相等.唯符號異耳.

由是得次之結果。

$$-(-AB)=AB。$$

(ii) A, B, P 爲一直線上任意之三點。

$$AP+PB=AB。✣$$

(2) A 及 B 爲一直線上二定點。則他任意一點 P.其位置可由比 $AP:PB$ 而定之。

若 $AP:PB$ 爲正。則 P 內分 AB。

若 $AP:PB$ 爲負。則 P 外分 AB。

P 之近於 A 或 B.乃從 $AP:PB$ 之算術值。(不關於其符號.)小於 1 或大於 1 而定。

若 $\frac{AP}{PB}=+1$。則 P 卽二等分 AB。

若 $\frac{AP}{PB}=-1$。則 P 距 A,B 二點爲無窮遠。

越 A ※ 無窮遠之點。與越 B 無窮遠之點。爲同一。何則。

P 若在 A.則 $AP:PB$ 爲 0。

P 之動於直線上也。若至 AB 之中點。則 $AP:PB$ 爲 $+1$。

P 若近於 B.則此比逐漸增大。其極限爲 $+\infty$。

✣古代幾何學.必 P 在 AB 之間.此定理始眞.今則不然.以符號之約束.P 點任在何位置.其理常眞.是卽因有約束.定理可以普通應用之一例也.

※越 A (或 B)乃就 AB 之中點言之.

P 過 B 時。則比之符號變。自 $-\infty$ 起。(極限)✣其絕對之值。漸次減少。至距 B 爲無窮遠時。遂爲 -1。

自最初至此處。比值之變化。爲連續性。P 之運動。亦爲連續性。今自越 A 無窮遠之點起。漸次運動至 A。比值乃自 -1 絕對的減少。其極限爲 0。然因比值之變化。始終爲連續性。故依此得次之斷定。不爲無理。卽 P 之運動亦始終連續。越 B 無窮遠之點。與越 A 無窮遠之點爲同一。而直線乃一個連續之軌跡也。※

附言　直線 AB 云者。或爲有限直線 AB，或指連續軌跡之 AB 一部分。二者相混。學者未免生惑。但書中未明言或暗示 AB 之長者。皆指後者言也。

(3)依乘除之法。可將數個比組合之。例如

✣$+\infty$ 及 $-\infty$ 之連續.見菊池大麓澤田吾一合著初等平面三角法教科書第四編 37—38.

※P 若爲越 B 無窮遠之點.則 $AP:PB$ 爲 -1. P 若爲越 A 無窮遠之點.其比值亦爲 -1. 卽比自 0 始.經過 $+1$, $+\infty$, $-\infty$, -1. 而復至 0. 是其變化爲連續性也.此際 P 之運動.自 A 始.經過 AB 之中點.又經過 B. 至越 B 無窮遠之點.更從越 A 無窮遠之點而復至 A.是比 -1 之點有二.而實爲同一之點.故 P 之運動.亦爲連續性.越 A 無窮遠之點.與越 B 無窮遠之點.究爲同點.卽直線乃如環無端也.

$$\frac{a}{p}\cdot\frac{b}{q}\cdot\frac{c}{r}\cdot\frac{d}{s}\cdot\frac{e}{t}=1. \quad 可記爲\ abcde=pqrst.$$

$$\frac{AB}{AC}+\frac{AB}{AD}=2. 可記爲\ \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$

此類甚多。不遑枚舉。其後之方程式。表前之方程式。甚爲便利。而 $a\ b\ c\ d\ e,\ \frac{2}{AB}$ 等。不必爲含有幾何學上意味之量。✣

(4)一直線上數分線間之關係。示之如次。

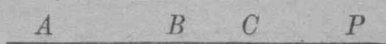
(i) A, B, C 爲一直線上之三點。

$$AB+BC+CA=0。$$

此易明瞭。

(ii) P 爲其直線上任意之他點。

$$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0。$$



何則。 $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB$

$=-AP(AC-AB)-(AB-AP)AC+(AC-AP)AB$

$=-AP\cdot AC+AP\cdot AB-AB\cdot AC+AP\cdot AC+AC\cdot AB-AP\cdot AB=0。$

(iii) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB=-BC\cdot CA\cdot AB。$

左邊 $=AP^2\cdot(AC-AB)-(AB-AP)^2AC+(AC-AP)^2AB$

$=AP^2\cdot AC-AP^2\cdot AB-AB^2\cdot AC+2AP\cdot AB\cdot AC-AP^2\cdot AC$

$+AC^2\cdot AB-2AP\cdot AC\cdot AB+AP^2\cdot AB$

$=AB\cdot AC(AC-AB)=AB\cdot AC\cdot BC=-BC\cdot CA\cdot AB。$

✣此一節。不必如前所述。爲分線之長之代數值。

(iv) 若 P 二等分 BC. 則 $AP=\frac{1}{2}(AB+AC)$。

何則。 $$BP=-CP。$$

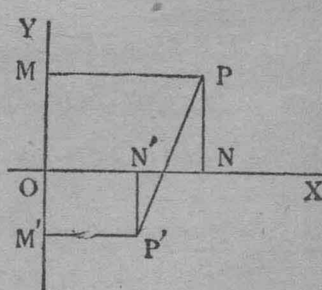
$$\therefore \quad AP-AB=-(AP-AC)。$$

即 $$2AP=AB+AC。$$

(v) 若 A, B, C, D 爲一直線上之四點。P 二等分 AB, Q 二等分 CD. 則 $PQ=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}(AD+BC)$。

何則。
$$\begin{aligned}2PQ&=2PB+2BC+2CQ\\&=AB+BC+BC+CD\\&=AC+BD \text{ 或 } AD+BC。\end{aligned}$$

(5)前諸定理之圖。皆以自左向右度爲正量。此普通之法也。然向何方度爲正。原可隨意選擇之。不過正量既定。則與之反對者。不得不爲負。由是用向 (*sense*) 之一語。以表示其區別。如 AB 及 BA。表同分線相反之向是也。夫向之思想。固唯一直線上之諸分線用之。但亦能應用於平行直線上之諸分線。例如右圖。自 P, P' 二點。向直交二直線 OX, OY 引垂線。則 PN 及 $P'N'$. 有反對之向。PM 及 $P'M'$. 有相同之向。



故 $PM-P'M'=NN'$,

$PN-P'N'=MM'$.

(6)定義 二點間之分線。謂之二點之連線. (*Join*)