

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

离散数学及其应用

王瑞胡 罗万成 主编
胡章平 杨志刚 汪维华 副主编



清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材 | 计算



离散数学及其应用

王瑞胡 罗万成 主编
胡章平 杨志刚 汪维华 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了信息科学领域离散数学的基础知识和应用方法,全书共分9章,其主要内容有:命题逻辑、谓词逻辑、关系、函数、代数系统、几个特殊的代数系统、图论基础、树、格与布尔代数。

本书在内容安排上,结构新颖,有问题导入式的引言,以此激发学生的学习兴趣和目标关注点;正文内容中穿插提示、拓展等环节,在强调基础知识点的重要性的同时,又对主要内容进行了适度延伸,使得抽象的教材内容更具体化,更具有鲜活的生命力;同时每章都安排了应用环节,突出将离散数学的基本知识与信息科学本身以及生活实际结合起来,通过解决具体的实际问题,增强该门课程讲授内容的现实性和生动性。并结合信息科学专业学生的特点,积极引导學生通过离散数学的基本知识对现实生活中的实际问题进行建模,并编写计算机程序去实现问题解决的自动化,在提高编程能力的同时,也增进了对算法的理解和应用能力。

本书内容丰富,可读性强,可作为应用型普通高等院校计算机科学与技术、信息与计算科学、信息工程等相关本、专科专业学生的离散数学教材,也可供从事计算机、自动控制、电子工程等领域的科学工作者及有关工程技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/王瑞胡,罗万成主编.--北京:清华大学出版社,2014

21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术

ISBN 978-7-302-34158-1

I. ①离… II. ①王… ②罗… III. ①离散数学—高等学校—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第243297号



责任编辑:黄 芝 薛 阳

封面设计:傅瑞学

责任校对:时翠兰

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印刷者:三河市君旺印装厂

装订者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15.25 字 数:368千字

版 次:2014年1月第1版 印 次:2014年1月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:29.00元

出版说明

随着我国改革开放的进一步深化,高等教育也得到了快速发展,各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度,通过教育改革合理调整和配置了教育资源,优化了传统学科专业,积极为地方经济建设输送人才,为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是,高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要,不少高校的专业设置和结构不尽合理,教师队伍整体素质亟待提高,人才培养模式、教学内容和教学方法需要进一步转变,学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007年1月,教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》,计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”(简称“质量工程”),通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容,进一步深化高等学校教学改革,提高人才培养的能力和水平,更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中,各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势,对其特色专业及特色课程(群)加以规划、整理和总结,更新教学内容、改革课程体系,建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上,经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议,清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程,分别规划出版系列教材,以配合“质量工程”的实施,满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合21世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版

社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括:

(1) 21 世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。

(2) 21 世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。

(3) 21 世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。

(4) 21 世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。

(5) 21 世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。

(6) 21 世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。

(7) 21 世纪高等学校规划教材·电子商务。

(8) 21 世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人:魏江江

E-mail: weijj@tup.tsinghua.edu.cn

前言

离散数学是伴随着计算机科学与技术的发展而诞生的一门系统的现代数学的分支,由于计算机处理的数据的特殊性,因此顾名思义,离散数学与传统的连续数学不同,它是以离散量为研究对象,结合现实问题背景,建立系统的理论框架和模型,从而为计算机科学提供有力的理论基础和工具。

离散数学是普通高等院校计算机科学与技术、信息与计算科学、信息工程等专业重要的基础课,为相关专业的后续专业课程,如数据结构、编译原理、操作系统、计算机网络、人工智能、形式语言与自动机理论等,做了必要的数学基础知识铺垫,并且锻炼了学生的数学逻辑思维能力,培养了学生用数学思维解决实际问题的能力。

考虑到离散数学课程本身的特点,概念多、内容抽象、理论性较强,学生学习起来难度较大,并且难于找到与专业本身的结合点,学习目标性不强,学习兴趣无法激发等,因此本书在内容安排上,摒弃传统的知识点罗列,为激发学生的学习兴趣和目标关注点,采用问题导入式的引言;借助于正文内容中的提示、拓展等环节,对重要知识点进行强调和进一步突出,并对主要内容进行了适度延伸,使得抽象的教材内容更具体化,更具有鲜活的生命力;尤其是在每章都安排了应用环节,将离散数学的基本知识与信息科学本身以及生活实际结合起来,更加突出应用型普通高等院校的专业教学和办学宗旨,从而系统地建构离散数学这门课程从引入到知识点讲授再到应用的一个完整的体系结构。

本教材由王瑞胡、罗万成任主编,胡章平、杨志刚、汪维华任副主编。其中,第1章、第3章由杨志刚编写;第2章由汪维华编写,第4章、第9章由王瑞胡编写,第5章、第6章由罗万成、王瑞胡共同编写,第7章、第8章由胡章平编写。全书由张明义审稿,最终由王瑞胡完成统稿并定稿。

本教材的出版得到了重庆文理学院校本教材出版基金的资助,以及重庆市2010年高等教育教学改革研究项目“基于MCLA模式与‘合作学习’理论的应用型本科院校创新计算机应用人才培养的实践教学体系构建”(项目编号:103126)、重庆文理学院校级特色教学研究项目“应用型‘离散数学’课程综合教学改革的探索与实践”的资助。在本书编写过程中,得到了重庆文理学院软件工程学院、数学与财经学院、科技部、教学部一些老师的帮助,谨对他们表示衷心的感谢!另外,在本书编写过程中,还参阅了许多离散数学教材和相关资料,并在参考文献中已列出,在此也向这些文献和资料的作者表示感谢。最后,还要特别感谢清华大学出版社的大力支持,使得本书得以顺利出版。

限于作者水平,书中难免有不当和疏漏之处,敬请读者赐教指正。

编者

2013年7月

目 录

第 1 章 命题逻辑	1
1.1 命题与逻辑联结词	2
1.1.1 命题的概念	2
1.1.2 逻辑联结词	3
1.1.3 原子命题和复合命题	6
1.1.4 应用	6
习题 1.1	7
1.2 命题公式及公式分类	8
1.2.1 命题公式的概念	8
1.2.2 命题公式的分类	8
1.2.3 应用	10
习题 1.2	10
1.3 等值式与等值演算	11
1.3.1 基本等值式	11
1.3.2 等值演算	12
1.3.3 应用	13
习题 1.3	15
1.4 范式与主范式	16
1.4.1 范式	16
1.4.2 主范式	17
1.4.3 应用	20
习题 1.4	21
1.5 推理理论	22
1.5.1 形式证明	23
1.5.2 应用	26
习题 1.5	29
第 2 章 谓词逻辑	30
2.1 基本概念	30
2.1.1 个体与谓词	30
2.1.2 量词	32
习题 2.1	33

2.2 谓词公式	34
2.2.1 谓词公式概述	34
2.2.2 谓词公式的类型	35
习题 2.2	38
2.3 谓词逻辑蕴含式和等值式	38
2.3.1 谓词逻辑蕴含式和等值式	38
2.3.2 量词的收缩与扩张	39
2.3.3 常用的量词等值式	40
2.3.4 多个量词的使用	41
习题 2.3	42
2.4 前束范式	42
2.4.1 前束范式	42
2.4.2 前束合取范式	43
2.4.3 前束析取范式	43
习题 2.4	44
2.5 谓词逻辑推理理论	44
习题 2.5	47
2.6 应用	48
2.6.1 人工智能中的归结演绎推理	48
2.6.2 基本思路	51
2.6.3 使用步骤	52
2.6.4 完备性	52
2.6.5 举例说明	52
第3章 关系	54
3.1 笛卡儿积	54
3.1.1 有序对	54
3.1.2 笛卡儿积	55
3.1.3 知识点: 笛卡儿积与数据库	57
3.1.4 拓展	58
习题 3.1	59
3.2 关系的概念与表示方法	60
3.2.1 关系的基本概念	60
3.2.2 拓展: n -ary 关系与关系型数据库	61
3.2.3 关系矩阵与关系图	64
习题 3.2	66
3.3 关系的运算	66
3.3.1 关系的逆运算	66
3.3.2 关系的复合运算	68

3.3.3 关系的幂	70
习题 3.3	70
3.4 关系的性质	71
习题 3.4	74
3.5 关系的闭包	76
3.5.1 关系闭包的概念	76
3.5.2 关系闭包的求法	76
3.5.3 拓展	79
习题 3.5	80
3.6 关系等价与划分	80
3.6.1 等价关系	80
3.6.2 等价类	82
3.6.3 集合的划分	84
3.6.4 划分与等价关系	85
3.6.5 应用	86
习题 3.6	88
3.7 偏序关系	89
3.7.1 偏序和拟序	89
3.7.2 哈斯图	90
3.7.3 偏序关系的应用	93
习题 3.7	94
第 4 章 函数	96
4.1 函数的概念	97
4.1.1 函数的基本概念	97
4.1.2 拓展	99
习题 4.1	101
4.2 特殊函数	101
习题 4.2	103
4.3 逆函数与复合函数	103
4.3.1 逆函数	103
4.3.2 复合函数	104
习题 4.3	107
4.4 几个重要的函数	108
4.4.1 取整函数	108
4.4.2 序列和字符串	109
4.4.3 拓展	110
4.5 函数的应用	111
4.5.1 数字图像的函数模型	111

4.5.2	函数在数字图像平滑处理中的应用	111
4.5.3	二维图像的梯度函数(算子)分析	113
第5章	代数系统	115
5.1	二元运算与代数系统	115
5.1.1	运算	115
5.1.2	二元运算的性质	116
5.1.3	二元运算的特殊元素	119
5.1.4	代数系统的定义	122
5.1.5	应用	122
习题 5.1		123
5.2	子代数与积代数	124
5.2.1	子代数	124
5.2.2	积代数	125
习题 5.2		126
5.3	代数系统的同态与同构	126
5.3.1	同态与同构的概念	126
5.3.2	满同态的性质	128
5.3.3	应用	129
习题 5.3		132
第6章	几个特殊的代数系统	133
6.1	半群	133
6.1.1	半群	133
6.1.2	独异点	134
6.1.3	拓展	134
习题 6.1		135
6.2	群与子群	135
6.2.1	群的定义	135
6.2.2	群的性质	137
6.2.3	子群	139
6.2.4	应用	141
习题 6.2		143
6.3	循环群与置换群	143
6.3.1	循环群	143
6.3.2	置换群	144
6.3.3	应用:置换群与 pólya 定理	145
习题 6.3		146
6.4	环和域	147

6.4.1 环的定义及其性质	147
6.4.2 域的定义	150
习题 6.4	151
第 7 章 图论基础	152
7.1 图的定义及相关概念	153
7.1.1 图的定义	153
7.1.2 顶点的度数	154
7.1.3 补图和子图	156
7.1.4 同构	157
习题 7.1	158
7.2 通路、回路与连通图	158
7.2.1 通路和回路	159
7.2.2 连通图	159
习题 7.2	160
7.3 图的矩阵表示	161
7.3.1 邻接矩阵	162
7.3.2 关联矩阵	164
7.3.3 可达矩阵	165
习题 7.3	166
7.4 欧拉图与哈密顿图	167
7.4.1 欧拉图	167
7.4.2 哈密顿图	169
7.4.3 哈密顿回路算法的实现	170
习题 7.4	171
7.5 最短路径问题与货郎担问题	172
7.5.1 最短路径问题	172
7.5.2 货郎担问题(旅行商问题)	174
习题 7.5	175
7.6 平面图和图的着色	175
7.6.1 基本概念	175
7.6.2 图的 m 着色问题算法的实现	178
习题 7.6	179
7.7 应用	179
7.7.1 考试安排问题	179
7.7.2 ACM 竞赛题	180
第 8 章 树	185
8.1 无向树及性质	185

8.1.1 树的定义	185
8.1.2 树的性质	186
习题 8.1	188
8.2 根树	188
8.2.1 根树及相关概念	188
8.2.2 二叉树	189
8.2.3 二叉搜索树	193
8.2.4 应用:哈夫曼编码	194
习题 8.2	196
8.3 生成树	197
8.3.1 生成树概念	197
8.3.2 最小生成树	199
8.3.3 Kruskal 算法	199
8.3.4 Prim 算法	201
习题 8.3	202
8.4 树在 ACM 竞赛题中的应用	203
8.4.1 百岛湖问题	203
8.4.2 NTA 问题	205
第 9 章 格与布尔代数	211
9.1 格	212
9.1.1 格的定义与性质	212
9.1.2 应用:信息流的格模型	215
习题 9.1	215
9.2 特殊的格	215
9.2.1 分配格	215
9.2.2 有界格和有补格	217
习题 9.2	218
9.3 布尔代数	218
9.3.1 基本概念	218
9.3.2 应用:逻辑门	219
习题 9.3	221
专用术语汉英对照	222
参考文献	229

逻辑即思维的规律,逻辑学就是研究人类思维形式和规律的科学。逻辑学最早由古希腊哲学家亚里士多德创立,他的《工具论》奠定了逻辑学的理论基础。

从 17 世纪开始,就有一些学者试图用数学的方法来研究逻辑。德国哲学家、数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz)认为数学之所以能发展如此迅速,数学知识之所以能如此有效,就是因为数学使用了含义简明的少量符号来表达和比较忠实地描绘事物的内在本质,从而最大限度地减少人的思维劳动。因此他提出了用一种像数学一样的表意符号体系来研究思维形式和规律,能简洁地表达出各种推理的逻辑关系,使得推理过程就像数学一样可以利用公式来进行计算,以便用计算来解决争论。莱布尼茨为此进行了许多开创性的研究工作,尽管他后来中断了这一研究,但却给逻辑的发展指出了新的方向,对后来数理逻辑的创建起到了重要作用,因而被公认为数理逻辑的创始人。

数理逻辑又称为符号逻辑、理论逻辑。它既是数学的一个分支,也是逻辑学的一个分支。是用数学方法研究逻辑或形式逻辑的学科。所谓数学方法就是指数学采用的一般方法,包括使用符号和公式,已有的数学成果和方法,特别是使用形式的公理方法。数理逻辑和计算机科学都属于模拟人类认知机理的科学,数理逻辑的形式化方法与计算机科学不谋而合。计算机系统本身,包括软件和硬件都是一种形式系统,它们的机构都可以被形式地描述。

数理逻辑的主要分支包括:逻辑演算(包括命题演算和谓词演算)、模型论、证明论、递归论和公理化集合论。最基本的内容是命题逻辑和谓词逻辑。下述三个问题都可以采用命题逻辑的方法进行解决。

问题 1: 逻辑学家与生死门。

一位逻辑学家被人绑架,绑匪向他家人索要赎金,后来发现他家一贫如洗,由于不想随意撕票,绑匪头子决定给他一次逃生的机会。他说:“在你面前有且只有两扇门,一扇通向死亡,一扇通向自由,你可以选择一扇门离开。为了帮助你决定或选择,我的两个助手之一会和你在一起,并且只允许你对他说一句话,他会回答真或假(对或错),你可以据此作出判断。然而我必须警告你,我的两个助手一个完全说真话、另外一个则总是说谎。”说完绑匪头子哈哈大笑,并率众离开,只留下他的两个助手之一。绑匪头子认为这样省却了自己做一个杀生决定的麻烦,只不过给了逻辑学家一个求生的赌注机会。但是,逻辑学家在他哈哈大笑的同时也在心里暗自窃喜,因为对于逻辑学家来说,不存在什么赌注机会,自己是可以必然求生的。接着他向留下来的助手说了一句话,按助手的回答,准确无误地走向了自由之门。

逻辑学家说了一句话使他走出了生死门呢?

问题 2: 一公安人员审查一件盗窃案,已知的事实如下:

- (1) 甲或乙盗窃了录音机;
- (2) 若甲盗窃了录音机,则作案时间不能发生在午夜前;
- (3) 若乙的证词正确,则午夜时屋里灯光未灭;
- (4) 若乙的证词不正确,则作案时间发生在午夜之前;
- (5) 午夜时屋里灯光灭了。

公安人员根据已知事实怎么判断是谁盗窃了录音机?

问题 3: 小王最近在市中心买了一个店铺。为了安全起见,他准备在店铺门上安一把保密锁,他希望这把锁的控制电路中有 3 个按钮 A,B,C 和一个报警装置。当 3 个按钮同时按下,或只有 A,B 两个按钮按下,或只有 A,B 中之一按下时,锁才会被打开;当不符合上述开锁信号时电铃发出报警信号。

这样一个具有保密功能的锁的控制电路该如何设计呢?

1.1 命题与逻辑联结词

1.1.1 命题的概念

定义 1.1 称能判断真假的陈述句为**命题**。

命题通常用大写英文字母表示。例如,“任何一个大学本科生在校四年期间都会主修一门专业”是命题,可用符号 P 表示“任何一个大学本科生在校四年期间都会主修一门专业”。

提示(Hint):

判断一个句子是否是命题,首先要判断它是不是陈述句,然后判断其真值是否唯一。真值唯一表示可以判断真假,但并不是说一定要知道其真假。其真值也不一定为真,而是有两种可能,即真或假。

定义 1.2 称命题的判断结果为该命题的**真值**。真值只能取两个值:真或假。其中,真用“1”或“T”表示,假用“0”或“F”表示。真表示判断的结果是正确的,假表示判断的结果是错误的。任何命题的真值都是唯一的,真值为真的命题称为**真命题**,真值为假的命题称为**假命题**。

例 1.1 判断下列句子中哪些是命题,如果是命题,试判断其真值。

- (1) 任何高级语言在执行前都必须通过编译程序生成一个目标程序。
- (2) 6 能被 3 整除。
- (3) 近期工作忙吗?
- (4) 今天的天气真好啊!
- (5) $x+y>0$ 。
- (6) 明天天气晴朗。
- (7) 太阳系外有宇宙人。
- (8) 我正在说谎。

解 (1) 是命题,判断的结果为假。

(2) 是命题,对它进行判断的结果是真的。

(3) 是疑问句,不是陈述句,故不是命题。

(4) 是祈使句,按照命题的定义,不能构成命题。

(5) 是命题,但是真值情况要到明天才能够知道。

(6) 是陈述句,但由于 x, y 取值不确定,整个句子的判断结果可真可假,即没有确定的判断结果,故不是命题。

(7) 尽管目前人们无法确定其真假,但从事物的本质而言,句子本身是可分辨真假的,所以它是一个命题。

(8) 是一个悖论,无法确定其真假,所以不是命题。

1.1.2 逻辑联结词

在自然语言中,人们常使用“和”、“或者”、“只要……,就……”、“如果……,那么……”等一些起连接作用的词语。在数理逻辑中,联结词是构成复合命题的要件,为了便于书写和推理,必须对联结词作出明确规定和符号化。

在数理逻辑中,我们将这种自然语言连词的形式符号称为逻辑联结词。逻辑联结词用于连接原子命题形成复合命题。常见的逻辑联结词有 5 种。

1. 否定联结词

定义 1.3 设 P 是命题,“非 P ”称为 P 的否定式,记作 $\neg P$,读作“非 P ”。称符号 $\neg$ 为否定联结词。并规定, $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

为了更好地表示联结词所代表的逻辑含义,我们引入了真值表的概念。真值表即命题变元和命题真值之间全部可能状态以表格的形式呈现。否定联结词的真值表如表 1.1 所示。

表 1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

否定联结词“ $\neg$ ”对应自然语言中的“非”、“不”、“没有”等表示否定的词语,而且是表示“全盘否定”。

2. 合取联结词

定义 1.4 设 P, Q 都是命题,复合命题“ P 并且 Q ”称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P \wedge Q$,读作“ P 合取 Q ”。称符号 $\wedge$ 为合取联结词。并规定, $P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真。合取联结词的真值表如表 1.2 所示。

表 1.2

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取联结词“ $\wedge$ ”对应自然语言中的“而且”、“并且”、“既……,又……”等词语。

3. 析取联结词

定义 1.5 设 P 、 Q 都是命题,复合命题“ P 或者 Q ”称为 P 与 Q 的析取式,记作 $P \vee Q$,称符号 $\vee$ 为析取联结词。并规定, $P \vee Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 中至少有一个为真。

析取联结词的真值表如表 1.3 所示。

表 1.3

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取联结词“ $\vee$ ”对应自然语言中“或”、“或者”等词语。

自然语言中的“或”具有二义性,可表示“排斥或”,也可表示“相容或”。析取联结词表示的是“相容或”。

例 1.2 将下列命题符号化。

(1) 小刘喜欢吃香蕉或者苹果。

(2) 明天早上的离散数学课是 8 点或者 8 点 20 上课。

解 (1) P : 小刘喜欢吃香蕉 Q : 小刘喜欢吃苹果

显然(1)中的“或”是相容或,即 P 和 Q 同时为真。符号化为 $P \vee Q$ 。

(2) P : 明天早上的离散数学课 8 点上课。

Q : 明天早上的离散数学课 8 点 20 上课。

显然(2)中的“或”是排斥或,即 P 和 Q 不能同时为真。符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 。

4. 蕴含联结词

定义 1.6 设 P 、 Q 都是命题,复合命题“如果 P ,则 Q ”称为 P 与 Q 的蕴含,记作: $P \rightarrow Q$,其中 P 称为前件(假设), Q 称为后件(结论),称符号 $\rightarrow$ 为蕴含联结词。并规定, $P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真且 Q 为假。

蕴含联结词的真值表如表 1.4 所示。

表 1.4

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$P \rightarrow Q$ 读作:

如果 P , 则 Q (If P , then Q)

P 是 Q 的充分条件 (P is sufficient for Q)

Q 当 P (Q if P)

Q 无论何时 P (Q whenever P)

蕴含联结词“ $\rightarrow$ ”对应自然语言中“如果……, 则……”、“只要……, 就……”等词语。

在自然语言中, “如果……, 则……”常常表示一种因果关系, 否则无意义。但对数理逻辑中的条件命题 $P \rightarrow Q$ 来说, 只要 P 、 Q 能够分别确定真值, $P \rightarrow Q$ 即成为命题。

在自然语言中, “如果……”为假时, 则往往无法判断“如果……, 则……”的真假。但在数理逻辑的条件命题中, 该情况规定为“善意的推定”, 即当前提为 F 时, 结论不论真假, 条件命题的真值都为 T 。

例 1.3 令 P 表示: 今天是星期天; Q 表示: 我洗车。

则 $P \rightarrow Q$ 表示: 如果今天是星期天, 那么我洗车。

蕴含式的相反式 (converse): $Q \rightarrow P$, 如果我洗车, 则今天是星期天。

蕴含式的逆 (inverse): $\neg P \rightarrow \neg Q$, 如果今天不是星期天, 我将不会洗车。

蕴含式的对换 (contrapositive): $\neg Q \rightarrow \neg P$, 如果今天不洗车, 则今天不是星期天。

5. 等值联结词

定义 1.7 设 P 、 Q 都是命题, 复合命题“ P 当且仅当 Q ”称作 P 与 Q 的等值, 记作: $P \leftrightarrow Q$, 称符号 $\leftrightarrow$ 为等值联结词。并规定, $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 、 Q 真值相同。

等值联结词的真值表如表 1.5 所示。

表 1.5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \leftrightarrow Q$ 读作:

P 当且仅当 Q (P if and only if Q)

P 是 Q 的充分必要条件 (P is necessary and sufficient for Q)

Q 当且仅当 P (Q if and only if P , Q when and only when P)