GAODENG SHUXUE
XUEXI ZHIDAO

高等数学
学习指导

李 砚 倪科社 刘 波 主编

中国环境出版社

高等数学学习指导

李 砚 倪科社 刘 波 主编

中国环境出版社 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/李砚，倪科社，刘波主编. —北京：中国环境出版社，2013.5

ISBN 978-7-5111-1402-0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①李…②倪…③刘… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 057882 号

出 版 人 王新程
责任编辑 曲 婷
责任校对 扣志红
封面设计 彭 杉

出版发行 中国环境出版社
（100062 北京市东城区广渠门内大街 16 号）
网 址：http://www.cesp.com.cn
电子邮箱：bjgl@cesp.com.cn
联系电话：010-67112765（编辑管理部）
发行热线：010-67125803，010-67113405（传真）

印 刷 北京市联华印刷厂
经 销 各地新华书店
版 次 2013 年 6 月第 1 版
印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷
开 本 787×1092 1/16
印 张 16
字 数 380 千字
定 价 29.00 元

《高等数学学习指导》编写人员

主　　编　李　砚　倪科社　刘　波

编　　写　李　砚　刘　波　姚　斌

王淑芬　崔淑莉　王继红

前　言

在新的世纪里，人们的教育思想与教育理念、教学方式与方法等方面发生了一系列变化。高等数学是高等院校相关专业极其重要的基础课，从教学内容、教学要求也都随时代发生了很大改变。为了使学生在数学概念、计算技能等方面获得充分训练，更好地培养学生的空间想象能力、逻辑推理能力和科学表达能力，我们编写了这本针对高等院校农、医、生物等本科专业的《高等数学学习指导》。

本书共分 10 章，内容包括函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、多元函数积分及其应用、微分方程及其应用、无穷级数。

本书是由李砚、倪科社、刘波担任主编，并负责全书统稿和定稿。其中，各章主要编写人员为：第一章、第二章、第三章、第四章和第五章由李砚和刘波编写，第六章由姚斌编写，第七章和第八章由王淑芬编写，第九章由崔淑莉编写，第十章由王继红编写。所有参加编写人员对全书进行了仔细的校对和修改。

由于编者水平有限，疏漏之处再所难免，恳请读者批评、指正。

编　者

2013 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

一、知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的几种特性：单调性、奇偶性、周期性、有界性
    - 反函数与复合函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 数列极限的概念
    - 数列极限的性质：唯一性、收敛数列的有界性
    - 函数极限的概念
    - 函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性
    - 无穷大与无穷小
    - 极限运算法则
      - 四则运算法则
      - 复合函数的极限运算法则
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
    - 无穷小的比较
  - 连续
    - 连续与间断的概念
    - 间断点的分类
    - 初等函数的连续性
      - 连续函数四则运算的连续性
      - 反函数的连续性
      - 复合函数的连续性
      - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最大值和最小值定理及其推论
      - 零点定理与介值定理

二、学习要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.
2. 了解函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性.
3. 了解分段函数，理解反函数及复合函数的概念，能熟练地对复合函数进行分解.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列的概念，理解数列极限的概念，掌握数列极限的概念及其性质.

6．理解函数极限的概念，函数左、右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.掌握极限的性质及四则运算法则.

7．掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限.

8．掌握两个重要极限，并会利用其求函数的极限.

9．理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

10．理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

11．了解连续函数的性质及初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质（最大值和最小值定理及其推论、零点定理与介值定理），并会应用这些性质.

三、内容提要

1．函数

（1）函数的概念

了解函数，首先了解集合、区间与邻域的概念.在此基础上，掌握函数具有两个基本要素（定义域与对应法则），函数与自变量及因变量与选用字母无关.另外，判断两个函数是否相等，即看其对应的定义域与对应法则是否相同.注意分段函数的概念，若一个函数的自变量在定义域的不同范围，对应法则用不同的表达式来表示，通常称该函数为分段函数.

（2）函数的性质

主要掌握函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性.

1）函数的单调性.在函数的相应定义区间上讨论其单调性，其方法可以根据函数单调性的定义，也可以利用导数（第三章内容）.

2）函数的奇偶性.奇函数与偶函数的定义域均是关于坐标原点对称，奇函数对应的图形关于坐标原点对称，偶函数对应的图形关于 y 轴对称.

3）函数的周期性.周期函数的定义域是无界集，其周期通常指最小正周期，注意并不是每个周期函数都有最小正周期.

4）函数的有界性.函数在区间 I 上有界是指既有上界又有下界.

（3）反函数

在同一坐标系下，$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；另外，$y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

（4）复合函数

将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算，而得到的函数称为复合函数.注意不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.复合函数是微积分学研究的主要对象之一，读者应熟练掌握函数的复合与分解的方法.

（5）基本初等函数和初等函数

1）基本初等函数共有五类：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.读者应熟练掌握基本初等函数的定义域、值域以及它们的图形与性质.

2）初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

2．极限

（1）极限的定义

1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使得当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$.

2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

4）$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

5）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

6）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

7）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（2）数列与函数极限的性质

1）唯一性；

2）有界性（或局部有界性）；

3）局部保号性.

（3）函数极限存在的充要条件

1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（4）两个准则与两个重要极限

1）夹逼准则

在自变量x的同一变化过程中，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.若$\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则$\lim f(x)=A$.

2）单调有界准则：单调有界数列必有极限.对于数列而言，这一准则通常叙述为：单调递增数列有上界（单调递减有下界）的数列必有极限.

通常采用数学归纳法进行有界性的证明.一般地，利用该准则时，先证明有界性，再证明单调性.

3）两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\text{；}\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\text{ 或 }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

另外，对两个重要极限进行推广：设自变量 x 在同一变化趋势下，如果 $\lim f(x)=0$，

且 $f(x)\neq 0$，则有 $\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，与 $\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

（5）极限四则运算法则

在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$.

（6）复合函数的极限运算法则

定理　设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成，函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),$$

此定理表明，若函数 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 满足定理的条件，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时，函数符号 f 与极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可以交换次序，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

（7）无穷小与无穷大

1）在自变量的某一变化过程中，如果 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小；如果 $\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为无穷大.值得注意的是，无穷小与无穷大都是变量.但常数 0 例外，它符合无穷小的定义.

2）无穷小与无穷大的关系：在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

3）无穷小的基本性质.

在同一极限过程下，

a.有限个无穷小的和仍是无穷小.

b.有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小.

c.常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

d.有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

4）无穷大与无界的关系：无穷大的量一定无界，无界的量不一定是无穷大.

5）函数极限与无穷小的关系：设在自变量 x 的同一变化过程中，

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\text{，其中}\lim\alpha=0.$$

（8）无穷小的比较：设在自变量的同一变化过程中，α 和 β 均为无穷小，则

1）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c$，且 $c\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

2）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小.记为 $\alpha\sim\beta$.

3）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是比 β 高阶的无穷小.记为 $\alpha=o(\beta)$.显然 $\lim\dfrac{o(\beta)}{\beta}=0$.

4）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是比 β 低阶的无穷小.

根据如上定义，显然有如下结论成立：

5）若 $\alpha\sim\beta$ 且 $\beta\sim\gamma$，则有 $\alpha\sim\gamma$.

6）$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$

（9）利用等价无穷小的代换求极限.

1）替换定理：

在自变量 x 的某一变化过程中，α，α_1，β，β_1 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$.则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

2）当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小：

$x\sim\sin x$，$x\sim\tan x$，$x\sim\arcsin x$，$x\sim\arctan x$，$x\sim e^x-1$，

$x\sim\ln(1+x)$，$a^x-1\sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

替代适当可以使计算大大简化，但要注意等价无穷小只能在乘积的因子中替代.

3．连续

（1）函数在某点的连续性

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

在增量概念的基础上，又可用下面形式给出函数在某点连续的定义：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量在点 x_0 的增量 Δx 趋于零时，相应的函数增量 Δy 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

注意：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续须具备三个条件：

1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处要有定义；2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.如

果三条有一条不满足，x_0 就是函数 $y=f(x)$ 的不连续点，即 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点.

（2）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处单侧连续

1）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

3）单侧连续与函数连续有如下关系：

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既要左连续又要右连续.即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

（3）函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

（4）函数的间断点

1）定义

2）间断点的分类：

如果函数在间断点处的左、右极限存在，就称这类间断点为第一类间断点；其他类型的间断点称为第二类间断点.而在第一类间断点中，左、右极限相等的间断点又称为可去间断点；左、右极限不相等的间断点称为跳跃间断点.在第二类间断点中，左、右极限至少有一个为无穷大的间断点又称为无穷间断点.

（5）连续函数的运算

1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）均在点 x_0 处连续.

2）设函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3）基本初等函数在其定义域内均连续；初等函数在其定义区间（即定义域内的区间）内是连续的.

（6）闭区间上连续函数的性质

1）最大值和最小值定理　如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值.

推论　如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有界.

2）介值定理　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对介于 m 和 M 之间的任一实数 μ（即 $m<\mu<M$），在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

3）零点定理　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

四、典型例题

1．函数的基本概念

例 1　用邻域符号与区间符号分别表示不等式$|2x+1|<\dfrac{\varepsilon}{2}(\varepsilon>0)$所确定的$x$的范围.

解　由$|2x+1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$得$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$，即$\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.所以它表示以点$-\dfrac{1}{2}$为中心、以$\dfrac{\varepsilon}{4}$为半径的邻域，用邻域符号表示为$U\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$.

由$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$得$-\dfrac{\varepsilon}{4}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{\varepsilon}{4}$，即$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\varepsilon}{4}<x<-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\varepsilon}{4}$，所以用区间符号表示为

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4},-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

例 2　判断下面给出的各对函数是不是相同的函数？

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$；　　（2）$y=\lg x^2$与$y=2\lg x$；

（3）$y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$与$y=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　判断两个函数是否相等，即看其对应的定义域与对应法则是否相同.所以（1）不是相同的函数，两者的定义域不同；（2）不是，两者的定义域不同；（3）是，因为定义域与对应法则均相同.

例 3　求下列函数的定义域.

（1）$y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$.　　（2）$y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解　求复杂函数的定义域就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

（1）$\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$及$2<x<4$，即$(1,2)\cup(2,4)$.

（2）$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leq 1\\ 2x-x^2\geq 0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leq 2x\leq 8\\ x(x-2)\leq 0\\ 2x>1\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leq x\leq 4\\ 0\leq x\leq 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$及$1<x\leq 2$，即

$(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$.

例 4 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解 初等函数的复合，一般可采用代入法.

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\ -x, x\ge 0\end{cases}$.求 $f[g(x)]$.

解 （1）由 $g(x)\le 0$ 得 $g(x)=-x\le 0$，即 $x\ge 0$.所以 $x\ge 0$ 时 $f[g(x)]=1+x$.

（2）由 $g(x)>0$ 得 $g(x)=x^2>0$，即 $x<0$.所以 $x<0$ 时，$f[g(x)]=x^2+2$.

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}x^2+2, x<0\\ 1+x,\quad x\ge 0\end{cases}.$$

例 6 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\ne 0$，$x\ne 1$，求 $f(x)$.

解 函数的表示法与自变量及因变量选用字母无关.令 $t=\dfrac{x-1}{x}$，即 $x=\dfrac{1}{1-t}$，将其代入原方程，可得 $f\left(\dfrac{1}{1-t}\right)+f(t)=\dfrac{2}{1-t}$，即 $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f(x)=\dfrac{2}{1-x}$.

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$，即 $x=\dfrac{1}{1-u}$，代入上式得，$f\left(\dfrac{u-1}{u}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{2(u-1)}{u}$，即 $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2(x-1)}{x}$，解联立方程组得，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}-1$.

例 7 $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$，其中 $a>0$，$a\ne 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x，y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.试判断 $F(x)$ 的奇偶性.

解 令 $g(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，因为

$$g(x)+g(-x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

即 $g(x)=-g(-x)$.所以 $g(x)$ 为奇函数.

又因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)$，推得 $f(0)=0$，而显然有 $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$，即 $f(x)=-f(-x)$.所以 $f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

例 8 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$，$x=b$ 均对称，求证：$f(x)$ 为周期函数，并求其周期.

证 由题设有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]\\&=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)].\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，其周期为 $2(b-a)$.

例 9 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，求证：

（1）若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$.

（2）若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)$.

分析 若函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导，则其单调性的判别用定义；若 $y=f(x)$ 在区间 X 上可导，则利用导数（第三章内容）判别简单.

证 （1）设 $0<x_1<x_2$，由 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降，可得

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\le\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\le x_2f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\le\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\le x_1f(x_2)+x_2f(x_2).$$

推得 $x_2f(x_1+x_2)\le x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$，即 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$.

（2）证明略.

例 10 判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内是否有界.

解 讨论函数是否有界，一般先取绝对值，然后用不等式放缩法；或利用以后章节闭区间上连续函数的性质以及借助导数的应用求最大（小）值来处理.

$|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\le\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$，$(\because 1+x^2\ge 2|x|)$，故有 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$，所以函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内有界，且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$.

例 11 求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

解 求反函数的步骤：（1）把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出；（2）把刚才所得到的表达式

中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $f^{-1}(x)$.

令 $u=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$，于是 $u=\dfrac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$，

故 $x=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\dfrac{y}{(1+y)^2}$，即 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

2. 函数的极限

（1）极限运算法则

例 12 求下列函数的极限.

1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{1}{x-3}\right)$；

2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-x-5}{2x^4-9}$；

4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$；

5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

6）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

解 1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{1}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-3}=2-\left(\dfrac{1}{-3}\right)=\dfrac{7}{3}$.

2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

3）
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-x-5}{2x^4-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}{2-\dfrac{9}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x^4}}=\frac{3}{2}.$$

4）
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{20}(5x+1)^{30}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}}{(5x+1)^{20}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{30}}\\&=\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{30}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}.\end{aligned}$$

5）
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}.$$

6）
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

从上面的例题可知，