

# 实用数学指导教程

SHIYONG SHUXUE ZHIDAO JIAOCHENG

刘锡凤 主编

李 崇 魏兰英 副主编

 东北财经大学出版社  
Dongbei University of Finance & Economics Press



# 实用数学指导教程

## SHIYONG SHUXUE ZHIDAO JIAOCHENG

刘锡凤 主编

李 崇 魏兰英 副主编

 东北财经大学出版社  
Dongbei University of Finance & Economics Press  
大连

© 刘锡凤 2012

图书在版编目 (CIP) 数据

实用数学指导教程 / 刘锡凤主编. —大连 : 东北财经大学出版社, 2012. 9  
ISBN 978-7-5654-0936-3

I. 实… II. 刘… III. 数学—教材 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 185092 号

东北财经大学出版社出版

(大连市黑石礁尖山街 217 号 邮政编码 116025)

教学支持: (0411) 84710309

营销部: (0411) 84710711

总编室: (0411) 84710523

网 址: <http://www.dufep.cn>

读者信箱: dufep @ dufe.edu.cn

大连北方博信印刷包装有限公司印刷

东北财经大学出版社发行

幅面尺寸: 185mm×260mm

字数: 233 千字

印张: 10

2012 年 9 月第 1 版

2012 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑: 杨慧敏 孙 平 吉 扬 李丽娟 吴 茜 责任校对: 何 力

封面设计: 张智波

版式设计: 钟福建

---

ISBN 978-7-5654-0936-3

定价: 20.00 元

# 前言

我们在从事数学的教学过程中，经常要面对这样的问题：中职学校的学生，为什么要学习数学呢？

我们都知道：在现代社会中，数学教育是终身教育的重要方面，是学生终身发展的需要所在。首先，数学对学生个人素质的培养有着极其重要的作用，数学教育可以让学生不仅学到大量的数学基础知识，学会逻辑思维的方法，而且能培养他们分析问题、解决问题的能力。其次，数学知识是以后学习的基础，数学在许多后续学科里有广泛的应用，没有数学的基础知识，这些学科是没有办法学习的。

中职数学教学的任务就是使学生掌握必要的数学基础知识，具备必需的相关技能与能力，为学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础。而职业教育的数学学习，是应用数学的学习，所以不能离开应用数学的定位。

本着“以服务为宗旨”的原则，根据“以就业为导向”的需要，我们这些有责任心的教育工作者，希望激发学生的学习兴趣，尝试从另外一个角度——学生的生活经验入手，以学生喜闻乐见的身边实例为切入点，引导出需要掌握的数学知识；通过知识的学习和理解，再让数学知识服务于新的实际问题。本教材为数学知识注入了许多生活的气息，少了很多知识本身的抽象性，多了通俗易懂的实用性。希望通过本教材的学习，让学生体验、领悟及欣赏数学在他们自己生活和将来工作中的意义和价值。

本教材内容广泛、实用，涵盖了小学、初中、高中，甚至是大学里基础的、实用的、学生又能接受的数学内容。在教材内容选择上，力求做到低起点，也就是基础、简单、够用、实用；叙述的方式尽量通俗、简洁、易懂、直白、形象；淡化形式化的推理论证，降低数学语言的严密性和完整性。以实用性为目的，帮助学生学好有用的数学。

本书共有九个单元，三个附录。

本书由刘锡凤任主编，李崇、魏兰英任副主编。参加编写的还有周怀宇、邵明妍、张茹茵、刘君。其中单元一集合和简易逻辑的内容由邵明妍老师完成；单元二不等式的内容由刘君老师完成；单元四的数列及等差数列、单元七导数的内容由周怀宇老师完成；单元四的等比数列的内容由张茹茵老师完成；单元六解三角形的内容由魏兰英老师完成；单元三的指数及指数函数、对数、对数函数的内容由李崇老师完成；单元三函数、单元五三角函数、单元八向量、单元九排列组合及概率，以及附录一计算器的使用、附录二综合练习

题的内容由刘锡凤老师完成，附录三答案部分分工同正文部分。

本书的统编、审核、插图、版式设计由刘锡凤老师完成，校对由李崇老师完成。

这又是一次教学改革方面的大胆尝试，敬请各位同仁、专家提出宝贵意见。无论怎样我们都会继续努力，探索好的教学方式和途径为广大学生服务。

编者

2012年8月

# 目 录

单元一 集合和简易逻辑 / 1

单元二 不等式 / 8

一元一次不等式及绝对值不等式 / 8

一元二次不等式 / 14

单元三 函数 / 20

函数的概念 / 20

函数的性质 / 24

常用函数 / 27

二次函数 / 30

指数及指数函数 / 38

对数 / 44

对数函数 / 48

单元四 数列 / 54

数列及等差数列 / 54

等比数列 / 63

单元五 三角函数 / 69

角的概念的推广 / 69

弧度制 / 72

任意角的三角函数定义 / 75

三角函数的图像和性质 / 79

单元六 解三角形 / 87

单元七 导数 / 94

单元八 向量 / 101

单元九 排列组合及概率 / 109

附录一 计算器的使用 / 119

附录二 数学模拟题及答案 / 123

数学模拟题一 / 123

数学模拟题一答案 / 125

数学模拟题二 / 127

数学模拟题二答案 / 129

数学模拟题三 / 131

数学模拟题三答案 / 133

附录三 各章习题答案 / 135

答案一 课后作业答案 / 135

答案二 学习效果测试参考答案 / 147

主要参考文献 / 154

## 单元一

# 集合和简易逻辑

### 问题导引

当提到中国古代四大发明时,每位同学都知道是指南针、活字印刷术、造纸术和火药,那么是否可以说“中国古代四大发明”等同于“指南针、活字印刷术、造纸术和火药”(见图 1—1)?

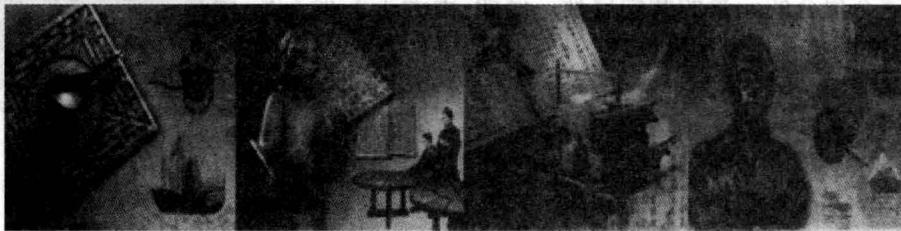


图 1—1

再如:

- 著名的数学家;
- 大连商业学校 2011 级在校的高个子学生;
- 不超过 20 的非负数;
- 太阳系全体行星;
- 本班比较聪明的学生;
- 数轴上非常接近原点的点。

上述每组对象能否构成一个集合呢(见图 1—2)?



图 1—2

### 基础知识

#### 一、集合的概念

一般的,把能够确定的对象的全体称之为集合,把构成集合的每个对象称之为集合的元素。集合通常用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示,元素用小写字母  $a, b, c, \dots$  表示。

例如,全体 201203 班的同学构成一个集合,其中每个学生都是这个集合的元素。

##### (一) 元素与集合之间的关系

若  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于集合  $A$ ,记作  $a \in A$ ;

若  $a$  不是集合  $A$  的元素, 就说  $a$  不属于集合  $A$ , 记作  $a \notin A$ 。

### (二) 元素的性质

①确定性: 集合中的元素是确定的。对于一个确定的集合  $A$ , 要么  $a \in A$ , 要么  $a \notin A$ 。

②互异性: 集合中任何两个元素都是不同的。 $\{-1, 0, -1\}$  中的  $-1$  重复, 应该写成  $\{-1, 0\}$ , 此集合只包含两个元素。

③无序性: 集合中元素的排列位置与顺序无关。 $\{-1, 0\}$  与  $\{0, -1\}$  是同一集合。

### (三) 集合的分类

集合可以分为有限集、无限集、单元素集、空集( $\emptyset$ )。

### (四) 集合的表示方法

①列举法: 常用于表示有限集合, 把集合中的所有元素一一列举出来, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫做列举法。例如:  $x^2 = 1$  的解集可表示为  $\{-1, 1\}$ 。

②描述法: 常用于表示无限集合, 把集合中元素的公共属性用文字、符号或公式等描述出来, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫做描述法。 $\{x | P\}$ ,  $x$  为该集合的元素的一般形式,  $P$  为这个集合的元素的共同属性。例如: 由大于 1 小于 5 的实数组成的集合可表示为  $\{x | 1 < x < 5, x \in R\}$ 。

③Venn 图: 为了形象地表示集合, 我们常常画一条封闭的曲线(或者说圆圈), 用它的内部表示一个集合(见图 1—3)。

### ④常用数集的符号:

正整数集, 记作  $N_+$  或  $N^+$ ;

非负整数集或自然数集, 记作  $N$ ;

整数集, 记作  $Z$ ;

有理数集, 记作  $Q$ ;

实数集, 记作  $R$ 。

## 二、集合之间的关系

### (一) 子集

如果集合  $A$  中的任意一个元素都是集合  $B$  的元素, 那么就称集合  $A$  是集合  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ , 读作“ $A$  包含于  $B$ ”, 或“ $B$  包含  $A$ ”。

如果集合  $A$  中存在不是集合  $B$  的元素, 那么则称集合  $A$  不包含于  $B$ , 记作  $A \not\subseteq B$ 。

### (二) 真子集

若集合  $A \subseteq B$ , 且  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ , 则称  $A$  真包含于  $B$  或  $B$  真包含  $A$ , 记作  $A \subsetneq B$  或  $B \supsetneq A$ 。

### (三) 集合的相等

一般的, 如果集合  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 那么称集合  $A$  等于集合  $B$ , 记作  $A = B$ 。

## 三、集合的运算

### (一) 交集

给定两个集合  $A, B$ , 由既属于  $A$  又属于  $B$  的所有公共元素构成的集合, 叫做  $A, B$  的交

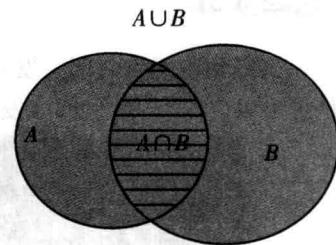


图 1—3

集。记作  $A \cap B$ , 读作  $A$  交  $B$ 。

- ①  $A \cap B = B \cap A$
- ②  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ③  $A \cap A = A$
- ④  $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$

### (二) 并集

给定两个集合  $A$ 、 $B$ , 由属于  $A$  或属于  $B$  的所有元素构成的集合, 叫做  $A$ 、 $B$  的并集。记作  $A \cup B$ , 读作  $A$  并  $B$ 。

- ①  $A \cup B = B \cup A$
- ②  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- ③  $A \cup A = A$
- ④  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

### (三) 补集

在研究集合关系的时候, 如果一些集合都是某一给定集合的子集, 那么称这个给定的集合为这些集合的全集, 通常用  $U$  表示。

设  $A$  是全集  $U$  的一个子集, 由  $U$  中的所有不属于  $A$  的元素构成的集合, 叫做  $A$  在  $U$  中的补集。

记作  $C_U A$ , 读作  $A$  在  $U$  中的补集。

- ①  $A \cup C_U A = U$
- ②  $A \cap C_U A = \emptyset$

## 四、简易逻辑——充要条件

一个数学命题都有条件和结论两部分。如果把条件和结论分别用  $A$ 、 $B$  表示, 那么命题可以写成“如果  $A$  成立, 那么  $B$  成立”, 或简写成“若  $A$ , 则  $B$ ”。

如果  $A$  成立, 那么  $B$  成立, 即  $A \Rightarrow B$ , 这时我们就说条件  $A$  是  $B$  成立的充分条件。

如果  $B$  成立, 那么  $A$  成立, 即  $B \Rightarrow A$ , 这时我们就说条件  $A$  是  $B$  成立的必要条件。

如果  $A$  既是  $B$  成立的充分条件, 又是  $B$  成立的必要条件, 即既有  $A \Rightarrow B$ , 又有  $B \Rightarrow A$ , 这时我们就说  $A$  是  $B$  成立的充分必要条件, 简称充要条件。

### 例题解析

例 1: 用列举法表示下列集合:

- (1)  $\{x \mid x \text{ 是大于 } 2 \text{ 且小于 } 13 \text{ 的奇数}\}$ ;
- (2)  $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

解:(1)  $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ ; (2)  $\{2, 3\}$

例 2: 用适当的符号( $\in$ ,  $\notin$ ,  $\supseteq$ ,  $\subseteq$ ,  $=$ )填空:

- (1)  $0 \underline{\quad} \emptyset$ ;  $\{0\} \underline{\quad} \emptyset$
- (2)  $\{1, 2, 3\} \underline{\quad} \{3, 1, 2\}$ ;  $\{x \mid 0 < x < 2\} \underline{\quad} \{x \mid x < 3\}$

解:(1)  $\notin$ ;  $\supseteq$  (2)  $=$ ;  $\supseteq$

例3: 已知  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B$ 。

解:  $A \cap B = \{3, 4\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

例4: 设全集  $U = R$ ,  $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | x > 0\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B, A \cap C_u B, B \cup C_u A$ 。

解:  $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$

$A \cup B = \{x | x > -1\}$

$A \cap C_u B = \{x | -1 < x \leq 0\}$

$B \cup C_u A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 0\}$

例5: 选择、填空题:

(1)  $x, y$  为实数, 甲:  $x^2 + y^2 = 0$ , 乙:  $x = 0$  且  $y = 0$ , 则( )。

- A. 甲是乙的必要不充分条件
- B. 甲是乙的充分不必要条件
- C. 甲不是乙的充分条件也不是必要条件
- D. 甲是乙的充分必要条件

(2)  $a > 0$  且  $b < 0$  是  $ab < 0$  的\_\_\_\_\_条件。

解: (1) D; (2) 充分不必要

### 针对练习

1. 用列举法表示下列集合:

(1)  $\{x | x \text{ 是大于}-2 \text{ 且小于} 0 \text{ 的整数}\}$

(2)  $\{x | x^2 = 9\}$

2. 用适当的符号( $\in, \notin, \ni, \subseteq, =$ )填空:

(1)  $0 \underline{\quad} \{0\}; \emptyset \underline{\quad} \{0\}$

(2)  $\{-2, 2\} \underline{\quad} \{x | x^2 = 4\}; \{x | -1 < x < 5\} \underline{\quad} \{x | 0 < x < 3\}$

3. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B, A \cap C_u B, B \cup C_u A, C_u A \cap C_u B, C_u A \cup C_u B$ 。

4. 设全集  $U = R$ ,  $A = \{x | x \geq -5\}$ ,  $B = \{x | x < 4\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B, C_u(A \cap B), C_u(A \cup B)$ 。

5.  $a, b$  为实数, 则  $a^2 > b^2$  的充分必要条件为( )。

- A.  $a < b$
- B.  $a > b$

- C.  $|a| > |b|$
- D.  $a > -b$

6. 甲:  $x = 1$ , 乙:  $x^2 - x = 0$ , 则( )。

- A. 甲是乙的充分不必要条件
- B. 甲是乙的必要不充分条件
- C. 甲不是乙的充分条件也不是必要条件
- D. 甲是乙的充分必要条件

## 拓展思考 ?

1. 已知  $A = \{(x, y) | 4x+y=6\}$ ,  $B = \{(x, y) | 3x+2y=7\}$ , 求  $A \cap B$ 。

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(x, y) | 4x+y=6\} \cap \{(x, y) | 3x+2y=7\} \\ &= \{(1, 2)\} \end{aligned}$$

2. 已知  $A = \{x, x^2, xy\}$ ,  $B = \{1, x, y\}$ , 且  $A = B$ , 求实数  $x, y$  的值。

解: 由集合的互异性知,  $x \neq y, x \neq 1, x \neq 0, y \neq 1$ 。

$\because A=B$   
 $\therefore$  两集合元素之和、之积分别相等。

$$\text{即 } \begin{cases} x+x^2+xy=1+x+y \\ x \cdot x^2 \cdot xy=xy \end{cases}$$

解得:  $x=-1, y=0$

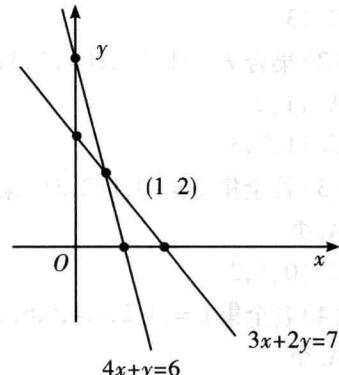


图 1-4

## 作业训练

1. 已知  $A = \{0, 1, 3, 5\}$ ,  $B = \{-2, 3, 4\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B$ 。

2. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B, A \cap C_u B, B \cup C_u A, C_u A \cap C_u B, C_u A \cup C_u B$ 。

3. 已知  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | x > 0\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B$ 。

4. 设全集  $U=R$ ,  $A = \{x | x \geq -3\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 4\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B, A \cap C_u B, B \cup C_u A, C_u(A \cap B), C_u(A \cup B)$ 。

5. 甲:  $k=1$ , 乙: 直线  $y=kx$  与  $y=x+1$  平行, 则( )。

A. 甲是乙的必要不充分条件

B. 甲是乙的充分不必要条件

C. 甲不是乙的充分条件也不是必要条件

D. 甲是乙的充分必要条件

6. 设甲: 四边形 ABCD 是平行四边形, 乙: 四边形 ABCD 是正方形, 则( )。

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲不是乙的充分条件也不是必要条件

## 学习效果测试

## 一、选择题

- (1) 若集合  $M = \{0, 1, 3, 5\}$ ,  $N = \{-2, 3, 4\}$ , 则  $M \cup N = (\quad)$ 。  
 A.  $\{-2, 0, 1, 3, 4, 5\}$       B.  $\{-2, 1, 3, 4, 5\}$   
 C.  $\{3\}$       D.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- (2) 集合  $P = \{1, 2\}$ ,  $Q = \{2, 3\}$ ,  $R = \{1, 3\}$ , 则  $P \cap (Q \cup R)$  为( )。  
 A.  $\{1, 2\}$       B.  $\{1, 3\}$   
 C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\Phi$
- (3) 若全集  $U = \{0, 1, 2, 3\}$ , 集合  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $N = \{0, 2, 3\}$ , 则  $M \cup C_U N$  为( )。  
 A.  $\Phi$       B.  $\{1\}$   
 C.  $\{0, 1, 2\}$       D.  $\{2, 3\}$
- (4) 若全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 集合  $M = \{1, 3, 5\}$ ,  $N = \{2, 4, 6\}$ , 则  $C_U M \cap N$  为( )。  
 A.  $\Phi$       B.  $U$   
 C.  $N$       D.  $M$
- (5) 若全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{1, 3, 4\}$ ,  $N = \{2, 4, 5\}$ , 则  $C_U M \cap C_U N$  为( )。  
 A.  $\Phi$       B.  $\{4\}$   
 C.  $\{1, 3\}$       D.  $\{2, 5\}$
- (6) 若集合  $M = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $N = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$ , 则  $M \cap N = (\quad)$ 。  
 A.  $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$       B.  $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$   
 C.  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$       D.  $\{x | 3 \leq x \leq 4\}$
- (7) 若集合  $M = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $N = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ , 则  $(M \cup N) \cap P$  为( )。  
 A.  $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$       B.  $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$   
 C.  $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$       D.  $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
- (8) 三角形全等是三角形面积相等的( )。  
 A. 充分但不必要条件      B. 必要但不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
- (9)  $b=0$  是直线  $y=kx+b$  过原点的( )。  
 A. 充分但不必要条件      B. 必要但不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
- (10)  $m$  是有理数是  $m$  是实数的( )。  
 A. 充分但不必要条件      B. 必要但不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
- (11) 一元二次方程根的判别式为零, 是这个一元二次方程有两个相等的实根的( )。  
 A. 充分但不必要条件      B. 必要但不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

(12)  $x, y$  为实数, 则  $x^2 = y^2$  的充分且必要条件是( )。

- A.  $x = y$
- B.  $x = -y$
- C.  $x^3 = y^3$
- D.  $|x| = |y|$

(13) “ $a > b > 0$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的( )。

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分且必要条件
- D. 既非充分条件也非必要条件

(14)  $x \in R$ , “ $x > 3$ ”是“ $|x| > 3$ ”的( )。

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分且必要条件
- D. 既非充分条件也非必要条件

(15) 甲:  $y = b - x$  过原点, 乙:  $b = 0$ , 则( )。

- A. 甲是乙的充分不必要条件
- B. 甲是乙的必要不充分条件
- C. 甲既不是乙的充分条件也不是必要条件
- D. 甲是乙的充分必要条件

(16) 甲:  $x = \frac{\pi}{6}$ , 乙:  $\sin x = \frac{1}{2}$ , 则( )。

- A. 甲是乙的必要不充分条件
- B. 甲是乙的充分不必要条件
- C. 甲既不是乙的充分条件也不是必要条件
- D. 甲是乙的充分必要条件

(17) “ $x = \sqrt{ab}$ ”是“ $a, x, b$  成等比数列”的( )。

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充分且必要条件
- D. 既非充分条件也非必要条件

## 二、填空题

(1) 若集合  $M = \{0, 1, 3, 5\}$ ,  $N = \{-2, 3, 4\}$ , 则  $M \cup N = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 已知集合  $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ , 则  $P \cup Q = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P \cap Q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 已知集合  $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $N = \{0, 1, 2, 3\}$ , 则  $M \cap N = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $M \cup N = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 已知全集  $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $A = \{3, 7, 9\}$ , 则  $C_U A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) 已知全集  $U = R$ ,  $A = \{x | x > 0\}$ ,  $B = \{x | -2 < x \leq 3\}$ , 则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

$C_U A = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $C_U B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

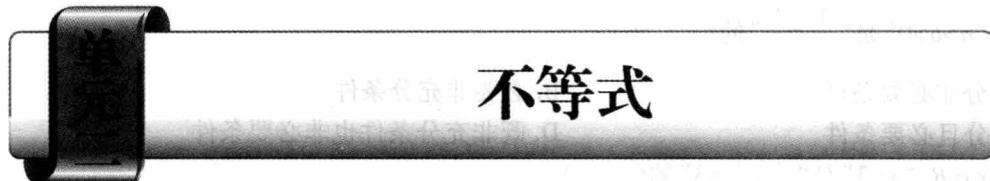
(6) 已知集合  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $N = \{a, b, c\}$ , 则  $M \cup N = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $M \cap N = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



不等式是数学中一个重要的概念，它在解决实际问题时有着广泛的应用。

本章将学习一元一次不等式、绝对值不等式和分式不等式的解法。

通过本章的学习，你将能够运用所学知识解决一些实际问题。



## 一元一次不等式及绝对值不等式

### 问题导引

某校某班班主任带领学生参加金秋之旅(见图2—1)。光华旅行社说:给每位师生七五折优惠;怡园旅行社说:可免去老师的费用,给学生八折优惠。就学生人数讨论哪家旅行社更优惠(两家旅行社的价格都是每人200元)。

### 基础知识

#### 一、不等式的性质

性质一:如果  $a > b, b > c$ , 则  $a > c$ 。

性质二:如果  $a > b$ , 则  $a+c > b+c$ 。

性质三:如果  $a > b, c > 0$ , 则  $ac > bc$ ;

如果  $a > b, c < 0$ , 则  $ac < bc$ 。

#### (一)一元一次不等式

只含有一个未知数,且化简后未知数的最高次数为1的整式不等式,叫做一元一次不等式。

#### (二)一元一次不等式的一般形式

任何一个一元一次不等式,最后总可以化简成  $ax+b>0(a \neq 0)$  或  $ax+b<0(a \neq 0)$  的形式,这就是一元一次不等式的一般形式。

#### (三)不等式的解的讨论

对于不等式  $ax+b>0(a \neq 0)$

当  $a>0$  时,  $x>-\frac{b}{a}$ ; 当  $a<0$  时,  $x<-\frac{b}{a}$ 。



图 2—1

对于不等式  $ax+b < 0 (a \neq 0)$

当  $a > 0$  时,  $x < -\frac{b}{a}$ ; 当  $a < 0$  时,  $x > -\frac{b}{a}$ 。

#### (四)解一元一次不等式的一般步骤

1. 去分母;
2. 去括号;
3. 移项;
4. 合并同类项;
5. 把未知数的系数化成 1。

### 二、不等式的解集与区间

设  $a, b \in \mathbb{R}$ , 且  $a < b$

1. 集合  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ , 记作  $[a, b]$ , 称为闭区间。
2. 集合  $\{x \mid a < x < b\}$ , 记作  $(a, b)$ , 称为开区间。
3. 集合  $\{x \mid a < x \leq b\}$ , 记作  $(a, b]$ , 称为半开半闭区间。
4. 集合  $\{x \mid a \leq x < b\}$ , 记作  $[a, b)$ , 称为半闭半开区间。
- $\infty$ : 表示无穷大的符号。 $+\infty$ : 读作正无穷大;  $-\infty$ : 读作负无穷大。
5. 集合  $\{x \mid x \geq a\}$ , 记作  $[a, +\infty)$ 。
6. 集合  $\{x \mid x > a\}$ , 记作  $(a, +\infty)$ 。
7. 集合  $\{x \mid x \leq a\}$ , 记作  $(-\infty, a]$ 。
8. 集合  $\{x \mid x < a\}$ , 记作  $(-\infty, a)$ 。
9. 实数集  $\mathbb{R}$ , 可用区间  $(-\infty, +\infty)$  来表示。

### 三、一元一次不等式组

#### (一)定义

由几个一元一次不等式组成的不等式组, 叫做一元一次不等式组。

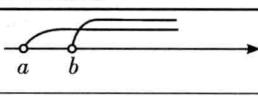
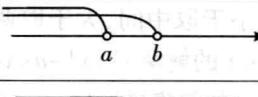
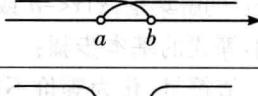
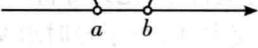
#### (二)一元一次不等式的解集

组成一元一次不等式组的各个一元一次不等式的解集的交集, 叫做这个不等式组的解集。

求一元一次不等式组的解集时, 注意画数轴图。

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集, 可以归纳成以下四种类型(见表 2—1):

表 2—1

$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$	$x > b$	
$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$	$x < a$	
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$	$a < x < b$	
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$	空集	

#### 四、绝对值不等式

1. 绝对值不等式:含有绝对值符号,且绝对值符号内还有未知数的不等式。

2. 绝对值不等式的解法。

让我们先看含绝对值的方程 $|x|=2$ ,方程的解是 $x=2$ 或 $x=-2$ ,在数轴上表示如下(见图2—2):

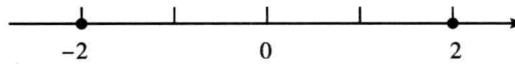


图2—2

再看相应的不等式 $|x|<2$ 与 $|x|>2$ 。

$|x|<2$ 表示数轴上到原点的距离小于2的点的集合,在数轴上表示如下(见图2—3):

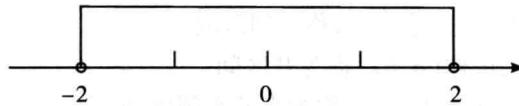


图2—3

因而不等式 $|x|<2$ 的解集是 $\{x | -2 < x < 2\}$ 。

类似地,不等式 $|x|>2$ 表示数轴上到原点的距离大于2的点的集合,在数轴上表示如下(见图2—4):

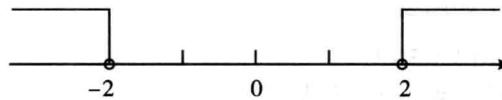


图2—4

因而不等式 $|x|>2$ 的解集是 $\{x | x < -2\} \cup \{x | x > 2\}$ 或 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

一般的,有如下关系成立( $a>0$ ):

$|x|<a \Leftrightarrow -a < x < a$ ,  $|x|>a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$ (见图2—5)

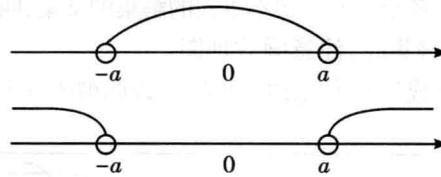


图2—5

公式口诀:小于取中间,大于取两边。

不等式 $|x|<a$ 的解集是 $\{x | -a < x < a\}$ ;

不等式 $|x|>a$ 的解集是 $\{x | x < -a$ 或 $x > a\}$ 。

解绝对值不等式的基本步骤:

1. 去掉绝对值符号,化为等价不等式。

2. 求解:小交大并(小于号时求交集,大于号时求并集)。