

课程标准实验教科书

# 初高中数学

# 衔接读本

KECHENG BIAOZHUN

SHIYAN JIAOKESHU

CHUGAOZHONG SHUXUE XIANJIE DUBEN

© 人民教育出版社中学数学室 编著



PEOPLE'S  
EDUCATION  
PRESS

人民教育出版社

课程标准实验教科书

# 初高中数学

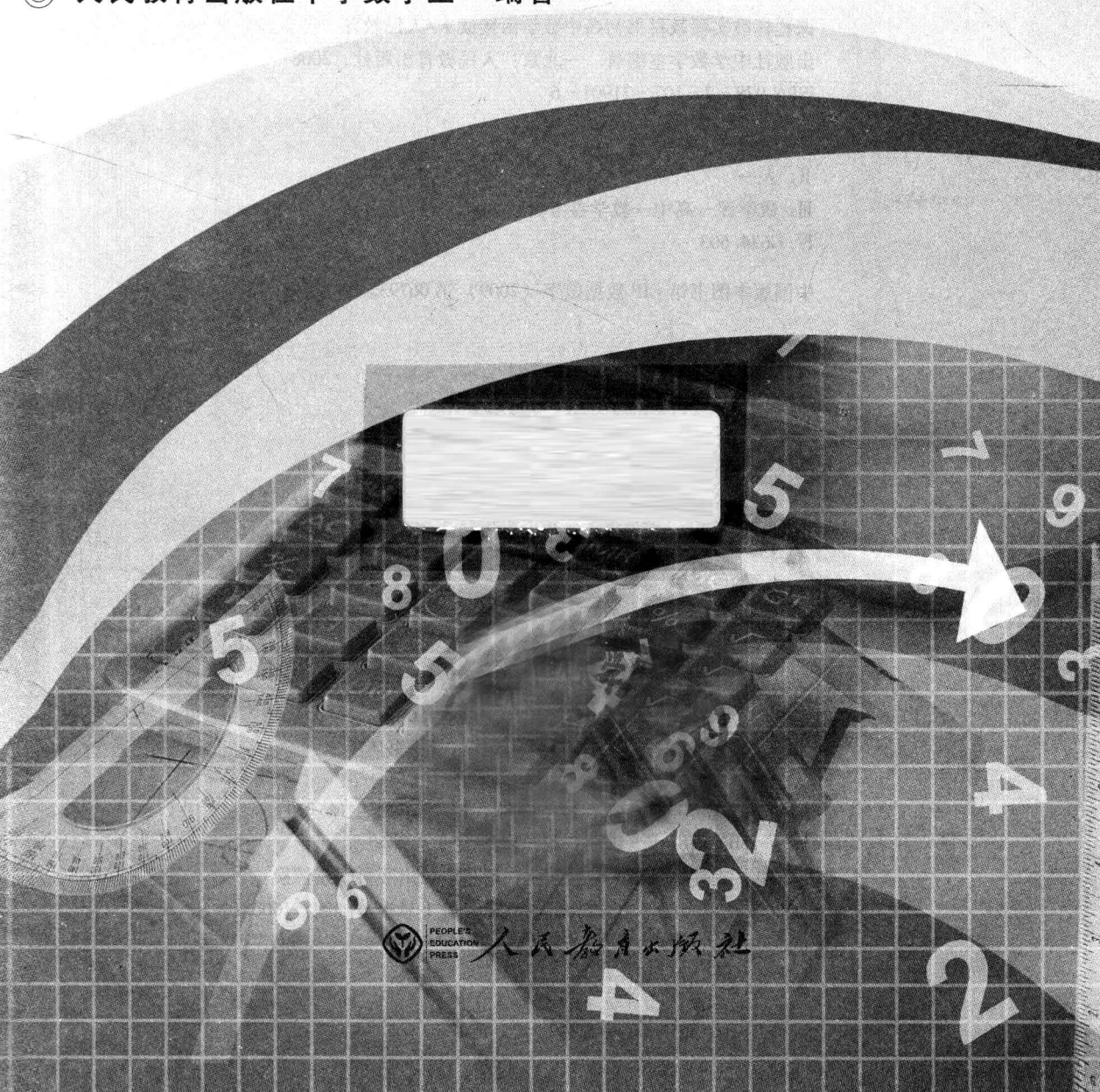
# 衔接读本

KECHENG BIAOZHUN

SHIYAN JIAOKESHU

CHUGAOZHONG SHUXUE XIANJIE DUBEN

© 人民教育出版社中学数学室 编著



PEOPLE'S  
EDUCATION  
PRESS

人民教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

课程标准实验教科书初高中数学衔接读本/人民教育出版社中学数学室编著. —北京: 人民教育出版社, 2008  
ISBN 978-7-107-21901-6

- I. 课…
- II. 人…
- III. 数学课—高中—教学参考资料
- IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 067935 号

人民教育出版社出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

2009年3月第1版 2009年5月第1次印刷

开本: 787毫米×1092毫米 1/16 印张: 6.25 字数: 120 000

ISBN 978-7-107-21901-6 定价: 9.40元

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与本社出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编: 100081)

主 编：章建跃 金克勤

审 定：田载今

编写人员：蒋荣清 王华鹏 王晓君 李柏青

冯海容 周宏勋 陈良照 金克勤

责任编辑：张唯一

# 前 言

由于初中数学课程与高中数学课程在内容、要求等方面存在差异，高中必备的某些数学知识在初中没有学到，使同学们在初中阶段所掌握的数学基础知识、基本技能和数学能力在某些方面不能适应高中数学的学习要求。为了弥补知识空缺，使初、高中数学学习内容达到光滑衔接，并对运算技能和逻辑推理技能进行适当的强化训练，以使同学们能更好、更快地适应高中数学学习的需要，特编写本书。

本书包括知识讲解、例题、习题和习题参考答案等几部分内容，其中涉及的新知识是高中数学学习必备但初中未学的，以代数知识为主、平面几何知识为辅。在讲解知识的过程中，先适当复习初中相关知识，然后引出新的学习内容，并注重对内容反映的数学思想方法的剖析，做到“瞻前顾后”，以帮助同学们形成相对完整知识结构。为了帮助同学们更好地掌握知识，本书选择了丰富的典型例题，并注意从变化的角度进行分析，给出详细的解答过程，其中特别强调对数学思想方法的分析与概括，从“如何思考问题”方面加强启发，有的还给出了“一题多解”的示范。习题的选择主要针对“双基”训练，强调基础性、逻辑性和系统性，特别注意体现适应高中数学学习需求，并适当加强了与已学知识的综合应用，使同学们通过本书的学习而切实提高数学能力。

参加本书编写工作的成员，既有现行初、高中数学教材的编写者，也有中学数学特级教师、名师，他们对当前初、高中数学课程内容及其教学都非常熟悉。我们相信，通过本书的学习，一定会使同学们打下更加坚实的数学基础，为大家顺利开展高中数学学习做好充分准备。

感谢你使用本书。欢迎你对本书的改进提出意见和建议。

# 目 录

## 第一章 乘法公式与因式分解 ..... 1

§ 1.1 乘法公式 ..... 1

§ 1.2 因式分解 ..... 4

第一章测试题 ..... 8

## 第二章 分式与根式 ..... 9

§ 2.1 分式及其运算 ..... 9

§ 2.2 根式及其运算 ..... 13

第二章测试题 ..... 19

## 第三章 方程与方程组 ..... 21

§ 3.1 三元一次方程组 ..... 21

§ 3.2 一元二次方程的根的判别式 ..... 24

§ 3.3 韦达定理及其应用 ..... 27

§ 3.4 可化为一元二次方程的分式方程 ..... 30

§ 3.5 简单的根式方程 ..... 32

§ 3.6 简单的二元二次方程组 ..... 34

第三章测试题 ..... 37

## 第四章 函数的图象与性质 ..... 39

§ 4.1 二次函数的图象和性质 ..... 39

§ 4.2 二次函数与二次方程 ..... 42

§ 4.3 函数图象的变换 ..... 45

§ 4.4 函数性质的应用 .....	49
第四章测试题 .....	54
<b>第五章 比和比例</b> .....	56
§ 5.1 比和比例的性质 .....	56
§ 5.2 比和比例的应用 .....	58
第五章测试题 .....	63
<b>第六章 三角形的几个性质</b> .....	66
§ 6.1 射影定理 .....	66
§ 6.2 三角形的“心” .....	69
§ 6.3 面积法 .....	74
第六章测试题 .....	78
<b>第七章 基本轨迹问题</b> .....	80
<b>参考答案</b> .....	84

# 第一章

## 乘法公式与因式分解

### § 1.1 乘法公式

我们知道 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，将公式左边的指数变为3时，又有什么结论呢？  
由于

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\end{aligned}$$

因此得到和的立方公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

将公式中的 $b$ 全部改为 $-b$ ，又得到差的立方公式

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

上述两个公式称为完全立方公式，它们可以合写为

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

**【例 1】** 化简： $(x+1)^3 - x(x^2+3x+3)$ .

**【解】**  $(x+1)^3 - x(x^2+3x+3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1.$

由完全立方公式可得 $(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3$ ，即

$$(a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = a^3 + b^3,$$

由此可得立方和公式

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

将立方和公式中的 $b$ 全部改为 $-b$ ，得到立方差公式

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$



**【例2】** 对任意实数  $a$ , 试比较  $(1+a)(1-a)(1+a+a^2)(1-a+a^2)$  与 1 的大小.

**【分析】** 观察  $(1+a)(1-a)(1+a+a^2)(1-a+a^2)$  的结构特点, 可运用立方和(差)公式将其化简.

**【解】**

$$\begin{aligned} & (1+a)(1-a)(1+a+a^2)(1-a+a^2) \\ &= [(1+a)(1-a+a^2)][(1-a)(1+a+a^2)] \\ &= (1+a^3)(1-a^3) = 1-a^6. \end{aligned}$$

因为  $1-a^6-1=-a^6$ , 对任意实数  $a$ ,  $-a^6 \leq 0$ , 所以

$$(1+a)(1-a)(1+a+a^2)(1-a+a^2) \leq 1.$$

通过将完全平方公式  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  中的指数 2 推广到 3, 我们得到了完全立方公式. 有兴趣的同学可以将指数推广到 4, 5, ... 另外, 我们也可以从项数的角度推广:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

灵活应用等式  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ , 可以为代数式运算带来方便.

**【例3】** 已知  $a+b+c=0$ ,  $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$ , 求下列各式的值:

(1)  $a^2+b^2+c^2$ ;            (2)  $a^4+b^4+c^4$ .

**【分析】** 将(1)与已知联系, 联想已知中的等式, 发现可将  $a^2+b^2+c^2$  用  $a+b+c$  和  $ab+bc+ca$  表示. 由于  $a^4+b^4+c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2$ , 由(1)得到启发, 如果知道  $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$  的值, 就能得解.

**【解】** (1)  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .

由上式和已知得  $0 = a^2 + b^2 + c^2 - 1$ , 即  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

(2) 由  $ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$ , 得  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = \frac{1}{4}$ .

因为  $a+b+c=0$ , 所以  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$ .

再由(1)的结论, 得  $a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = 1$ .

因此  $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$ .

【例4】 已知  $x^2+x-1=0$ , 求证:  $(x+1)^3-(x-1)^3=8-6x$ .

【证法1】  $(x+1)^3-(x-1)^3$

$$\begin{aligned} &=x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1) \\ &=x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1 \\ &=6x^2+2. \end{aligned}$$

由已知得  $x^2=1-x$ , 故  $6x^2+2=6(1-x)+2=8-6x$ . 因此,

$$(x+1)^3-(x-1)^3=8-6x.$$

【证法2】  $(x+1)^3-(x-1)^3$

$$\begin{aligned} &=(x+1-x+1)[(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2] \\ &=2(x^2+2x+1+x^2-1+x^2-2x+1) \\ &=6x^2+2. \end{aligned}$$

以下同证法1.



### 习题 1.1

- 若  $a+b=8$ ,  $ab=2$ , 则  $a^3+b^3=(\quad)$ .  
A. 128      B. 464      C. 496      D. 512
- 若  $x+y+z=0$ , 则  $x^3+y^3+z^3=(\quad)$ .  
A. 0      B.  $x^2y+y^2z+z^2x$   
C.  $x^2+y^2+z^2$       D.  $3xyz$
- 设  $A=(n+\frac{1}{n})^3$ ,  $B=n^3+\frac{1}{n^3}+6$ , 对于任意  $n>0$ , 则  $A, B$  大小关系为  $(\quad)$ .  
A.  $A \geq B$       B.  $A > B$       C.  $A \leq B$       D. 不一定
- $(5-x)(25+5x+x^2)=\underline{\hspace{2cm}}$ .
- 观察下列各式的规律:  
 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ,  
 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ ,  
 $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$ .  
可得到  $(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)=\underline{\hspace{2cm}}$  (其中  $n$  为正整数).
- 求函数  $y=(x-2)^3-x^3$  的最大值.

7. 当  $x=\sqrt[3]{3}$  时, 求代数式  $(2x+\frac{1}{x})(4x^2-2+\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^3}$  的值.

8. 已知  $a, b, c$  为非零实数,  $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ , 求证:

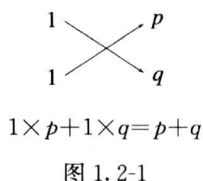
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

## § 1.2 因式分解

因式分解就是将一个多项式化成几个整式的积的形式, 它与多项式乘法运算是互逆变形. 我们已学过两种分解因式的方法: 提取公因式法与公式法. 下面我们继续学习一些分解因式的方法.

### 1 十字相乘法

我们知道, 形如  $x^2+(p+q)x+pq$  的二次三项式, 它的特点是二次项系数是 1, 常数  $pq$  与一次项系数  $p+q$  可以通过如图 1.2-1 的“十字相乘, 乘积相加”方式建立联系, 得到  $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$ . 这种方法能否推广呢?



如果要对  $2x^2-7x+3$  分解因式, 我们把二次项系数 2 分解为  $1 \times 2$ , 把常数项 3 分解成  $1 \times 3$  或  $(-1) \times (-3)$ , 按图 1.2-2 至图 1.2-5 的运算方式, 也用“十字相乘, 乘积相加”验算.



$$1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$$

图 1.2-2



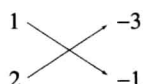
$$1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$$

图 1.2-3



$$1 \times (-3) + 2 \times (-1) = -5$$

图 1.2-4



$$1 \times (-1) + 2 \times (-3) = -7$$

图 1.2-5

可以发现图 1.2-5 对应的结果  $1 \times (-1) + 2 \times (-3) = -7$ , 恰好等于一次项系数  $-7$ . 由于  $(x-3)(2x-1) = 2x^2 - 7x + 3$ , 从而

$$2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1).$$

像这样, 通过十字交叉线帮助, 把二次三项式分解因式的方法, 叫做十字相乘法.

**【例 1】** 将下列各式分解因式：

(1)  $2x^2+x-3$ ;      (2)  $-6a^2+7a+5$ .

**【分析】** (1) 因为  $2=1\times 2$ ,  $-3=(-1)\times 3=1\times(-3)$ , 且一次项系数是 1, 所以可按图 1.2-6 用十字相乘法分解因式.



图 1.2-6

(2) 当二次项系数为负时, 二次项系数分解成的两个因数异号, 则十字辅助图的各种可能性就会更多. 因此先把负号提到括号外面, 即  $-6a^2+7a+5=-(6a^2-7a-5)$ , 然后再把  $6a^2-7a-5$  按图 1.2-7 用十字相乘法分解因式.

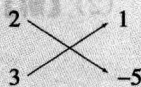


图 1.2-7

**【解】** (1) 因为  $1\times 3+2\times(-1)=1$ , 恰好等于一次项系数 1, 所以

$$2x^2+x-3=(x-1)(2x+3).$$

(2) 因为  $-6a^2+7a+5=-(6a^2-7a-5)$ , 而根据十字相乘法,  $6a^2-7a-5=(2a+1)(3a-5)$ , 所以

$$-6a^2+7a+5=-(2a+1)(3a-5).$$

**【例 2】** 分解因式:  $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2$ .

**【分析】** 先将  $x^2-x$  视为一个整体, 通过两次十字相乘法得到解决.

**【解】**  $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2=(x^2-x-2)(x^2-x+1)=(x-2)(x+1)(x^2-x+1)$ .

## 2 分组分解法

观察多项式  $xm+xn+ym+yn$ , 它的各项并没有公因式, 因此不能用提取公因式来分解因式; 这是一个四项式, 因此也不能直接用公式法或十字相乘法来分解因式.

观察多项式的各项, 前两项有公因式  $x$ , 后两项有公因式  $y$ , 分别提取后得到  $x(m+n)+y(m+n)$ . 这时又有了公因式  $(m+n)$ , 因此能把多项式  $xm+xn+ym+yn$  分解因式. 分解过程是

$$xm+xn+ym+yn=x(m+n)+y(m+n)=(m+n)(x+y).$$

一般地, 如果把一个多项式的项适当分组, 并提出公因式后, 各组之间又出现新的公因式, 那么这个多项式就可以用分组方法来分解因式.

**【例 3】** 将下列各式分解因式:

(1)  $x^3 - x^2 + x - 1$ ;      (2)  $x^2 + 4(xy - 1) + 4y^2$ .

(1) **【解法 1】**  $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x - 1) + (x - 1)$   
 $= (x - 1)(x^2 + 1)$ .

**【解法 2】**  $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 + x) - (x^2 + 1) = x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)$   
 $= (x^2 + 1)(x - 1)$ .

(2) **【解】**  $x^2 + 4(xy - 1) + 4y^2 = x^2 + 4xy - 4 + 4y^2 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 4$   
 $= (x + 2y)^2 - 4 = (x + 2y + 2)(x + 2y - 2)$ .

**【注】** 本题第(2)小题的解法是先多项式分组，再用公式法分解因式。

先将多项式分组后分解因式的方法称为**分组分解法**。用这种方法分解因式，分组时应预见到下一步分解的可能性。

**【例 4】** 分解因式： $x^3 + 3x - 4$ 。

**【分析】** 本题用前面学过的方法似乎均不奏效，若将其中一项拆成两项，就可考虑分组分解。

**【解】**  $x^3 + 3x - 4 = x^3 + 3x - 1 - 3 = (x^3 - 1) + (3x - 3)$   
 $= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1)$   
 $= (x - 1)(x^2 + x + 4)$ .

**【例 5】** 已知  $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0$ ,  $x > y > 0$ , 化简： $xz - 2yz + 1$ 。

**【解】** 因为  $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3 = x^2(x - 2y) - y^2(x - 2y) = (x - 2y)(x^2 - y^2)$   
 $= (x - 2y)(x + y)(x - y)$ ,

所以  $(x - 2y)(x + y)(x - y) = 0$ 。

又因为  $x > y > 0$ , 所以  $x + y \neq 0$ ,  $x - y \neq 0$ , 即只有  $x - 2y = 0$ 。从而

$$xz - 2yz + 1 = z(x - 2y) + 1 = 1.$$



1. 对多项式  $4x^2 + 2x - y - y^2$  用分组分解法分解因式，下面分组正确的是 ( )。

A.  $(4x^2 + 2x) - (y + y^2)$

B.  $4x^2 + (2x - y^2 - y)$

C.  $(4x^2 - y^2) + (2x - y)$

D.  $(4x^2 - y) + (2x - y^2)$

2. 要使二次三项式  $x^2 - 6x + m$  在整数范围内可分解,  $m$  为正整数, 那么  $m$  的取值可以有 ( ).

A. 2 个

B. 3 个

C. 5 个

D. 6 个

3. 把多项式  $2ab + 1 - a^2 - b^2$  分解因式, 结果是 ( ).

A.  $(a + b - 1)(b - a + 1)$

B.  $(a - b + 1)(b - a + 1)$

C.  $(a + b - 1)(a - b + 1)$

D.  $(a - b + 1)(a - b - 1)$

4.  $m^4 + m^2 + 1 = m^4 + \underline{\hspace{2cm}} - m^2 + 1 = (m^2 + \underline{\hspace{2cm}})(m^2 + \underline{\hspace{2cm}})$ .

5. 将下列各式分解因式:

(1)  $4x^2 - x - 3$ ;

(2)  $3x^2 + 2ax - a^2$ .

6. 将下列各式分解因式:

(1)  $x^3 - y^3 - x^2y + xy^2$ ;

(2)  $2a^2 - b^2 + ab - 2a + b$ .

7. 已知  $m = x - y$ ,  $n = xy$ , 试用  $m, n$  表示  $(x^3 + y^3)^2$ .

8. 当  $x = -1$  时,  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ . 请根据这一事实, 将  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  分解因式.

## 第一章测试题

(满分为100分, 考试时间45分钟)

一、选择题 (本题有6小题, 每小题5分, 共30分)

1. 多项式  $-3y^2 - 2yx + x^2$  分解因式的结果是 ( ).  
A.  $-(y+x)(3y+x)$     B.  $(x+y)(x-3y)$     C.  $-(y-x)(3y-x)$     D.  $(x+y)(3x-y)$
2. 若  $a^3 - b^3 = 3a^2b - 3ab^2 + 1$ , 其中  $a, b$  为实数, 则  $a-b = ($  ).  
A. 0    B. -1    C. 1    D.  $\pm 1$
3. 若多项式  $2x^2 + 7x + m$  分解因式的结果中有因式  $x+3$ , 则此多项式分解因式的结果中另一因式为 ( ).  
A.  $2x-1$     B.  $2x+1$     C.  $x+1$     D.  $x-1$
4. 若  $a + \frac{1}{a} = 3$ , 则  $a^2 + a^3 + a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} = ($  ).  
A. 7    B. 25    C. 47    D. 72
5. 多项式  $4 - x^2 - 2xy - y^2$  分解因式的结果是 ( ).  
A.  $(2+x+y)(2-x-y)$     B.  $(2+x+y)(2-x+y)$   
C.  $(1+x-y)(4-x-y)$     D.  $(1-x+y)(4+x+y)$
6. 若  $x - y - z = 3$ ,  $yz - xy - xz = 3$ , 则  $x^2 + y^2 + z^2 = ($  ).  
A. 0    B. 3    C. 9    D. -1

二、填空题 (本题有3小题, 每小题8分, 共24分)

7. 若  $8x^3 + 12x^2y^2 + 6xy^4 + y^6$  可分解为  $(2x + y^m)^3$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.
8. 若关于  $x$  的二次三项式  $ax^2 + 3x - 9$  的两个因式的和为  $3x$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
9.  $x^2 + x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 4 = \left(\frac{1}{x} + x + \text{_____}\right) \left(\frac{1}{x} + x - \text{_____}\right)$ .

三、解答题 (本题有3小题, 第10, 11题各15分, 第12题16分, 共46分)

10. 分解因式: (1)  $x^3 - 5x^2 + 6x$ ; (2)  $4m^3 + m - 1$ .
11. 已知  $x^2 - x - 1 = 0$ , 求  $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x$  的值.
12. 已知  $\frac{a^2 - 9x^2 + 6xy - y^2}{(a+3x)^2 - (ay+3xy)} = 1$ , 求证:  $y = 6x$ .

## 第二章

# 分式与根式

### § 2.1 分式及其运算

#### 1 分式的运算

分式运算与因式分解关系密切，掌握了各种乘法公式和因式分解方法，可以使我们的分式运算能力得到提高。

**【例 1】** 计算： $\frac{a^2+7a+10}{a^2-a+1} \times \frac{a^3+1}{a^2+4a+4} \div \frac{a+1}{a+2}$

**【分析】** 分式乘除运算与约分相关，应考虑先将各分式的分子分母分解因式。

**【解】** 原式 =  $\frac{(a+2)(a+5)}{a^2-a+1} \times \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a+2)^2} \times \frac{a+2}{a+1} = a+5$ .

**【例 2】** 先化简，再求值： $\left[ \frac{m^2+n^2}{m^2+2mn+n^2} - \frac{2}{mn} \div \left( \frac{m+n}{mn} \right)^2 \right] \times \frac{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3}{m^3+m^2n-mn^2-n^3}$

其中  $m=57$ ,  $n=3$ .

**【分析】** 分式混合运算时需合理安排运算顺序，小心完成每一步。本题代数式最后乘上的分式其分子是完全立方，分母可以进行分组分解。

**【解】** 原式 =  $\left[ \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} - \frac{2}{mn} \times \frac{m^2n^2}{(m+n)^2} \right] \times \frac{(m+n)^3}{(m+n)^2(m-n)}$   
=  $\left[ \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} - \frac{2mn}{(m+n)^2} \right] \times \frac{(m+n)}{(m-n)}$   
=  $\frac{m^2-2mn+n^2}{(m+n)^2} \times \frac{(m+n)}{(m-n)}$   
=  $\frac{m-n}{m+n}$ .



当  $m=57, n=3$  时, 原式  $=\frac{m-n}{m+n}=\frac{57-3}{57+3}=\frac{9}{10}$ .

**【例 3】** 已知  $\frac{x}{x^2-3x+1}=1$ , 求  $\frac{x^2}{x^4-9x^2+1}$  的值.

**【分析】** 观察题目特点, 对条件与结论采用取倒数处理, 建立条件与结论间的联系, 从而达到解题的目的.

**【解】** 因为  $\frac{x}{x^2-3x+1}=1$ , 所以  $\frac{x^2-3x+1}{x}=1$ , 得  $x+\frac{1}{x}=4$ .

于是  $\frac{x^4-9x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-9=(x+\frac{1}{x})^2-11=16-11=5$ .

因此  $\frac{x^2}{x^4-9x^2+1}=\frac{1}{5}$ .

**【注】** 本题解答中灵活应用了  $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ .

## 2 分式的证明

**【例 4】** 已知  $b+\frac{1}{c}=1, c+\frac{1}{a}=1$ , 求证:  $a+\frac{1}{b}=1$ .

**【分析】** 由已知两式消去  $c$ , 即可得到含  $a, b$  的关系式.

**【解】** 由  $b+\frac{1}{c}=1$ , 得  $\frac{1}{c}=1-b$ ; 由  $c+\frac{1}{a}=1$ , 得  $c=1-\frac{1}{a}$ .

所以  $(1-b)(1-\frac{1}{a})=1$ , 得  $1-\frac{1}{a}-b+\frac{b}{a}=1$ , 即  $-\frac{1}{a}-b+\frac{b}{a}=0$ .

两边都乘以  $a$ , 得  $-1-ab+b=0$ , 两边再都除以  $b$ , 得  $-\frac{1}{b}-a+1=0$ , 移项得  $a+\frac{1}{b}=1$ .

**【例 5】** 已知  $abc=1$ , 求证:  $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$ .

**【分析】** 此题直接通分太繁, 不可取. 观察求证式子的左边, 发现作轮换  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ , 可将其中一项变为另两项, 结合已知条件, 可以有以下两种策略.

**【解法 1】** 因为  $abc=1$ , 所以  $a, b, c$  均不为零.